新ゲーム理論ゼミ 第12章
「τ値」

M1 松村 草也

第5章 - 目次

1. τ 値の定義
   - 1.1.最大限度額
   - 1.2.最小権利額
   - 1.3.ギャップ関数
   - 1.4.許容範囲
   - 1.5.準平衡ゲーム
   - 1.6.τ 値の定義

2. τ 値の性質
   - 2.1.τ 値と残余均等配分解
   - 2.2.τ 値と比例配分解
   - 2.3.τ 値は配分である
   - 2.4.ダミプレイヤー性
   - 2.5.対称性（無名性）
   - 2.6.最小権利保証性
   - 2.7.限定比例性
   - 2.8.安定性
   - 2.9.まとめ

τ値の定義

Definition of Tau value

最大限度額と最小権利額

$N = \{1,\ 2,\ 3\}$

$v(\phi) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(12) = 60,\ v(13) = 70,\ v(23) = 80$

$v(123) = 120$

左のような提携形ゲームを考える

最大限度額M_i：全体提携による利得を配分するときに**プレイヤーが要求しうる最大の額**

$M_1=v(123)-v(23)=120-80=40$　同様に$M_2=50$, $M_3=60$

残余R_i：ある提携の提携値から自分以外のプレイヤーの最大限度額を引いた値

$R_1(12,1)=v(12)-M_2=10$　とか　$R_1(1,1)=v(1)=0$　　2^{n-1}個存在する

最小権利額m_i：残余のうち最大のもの．残余の最小値は$v(i)$なので個人合理性を満たす．

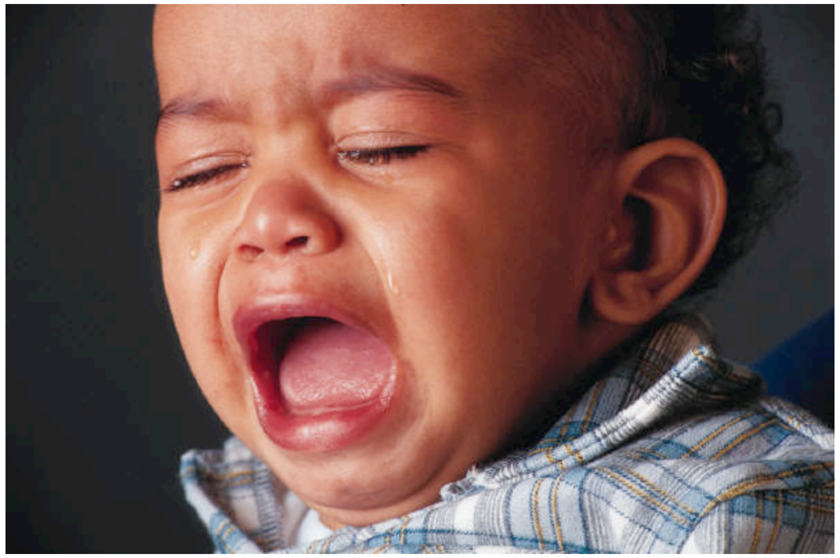
プレイヤー１については上のゲームの場合10.

つまり，**最低でも全体提携時の利得に対してこれだけの要求はしてもいいはず**，という値

・・・最大限度額と最小権利額の間に

最適な配分解があるのは間違いないだろう．

ギャップ関数と許容範囲



みんな提携時に最大限度額を要求したいけれど，
全体提携の利得はそんなにありません.

ギャップ関数g(S)：提携値を提携参加プレイヤー全員の最大限度額合計からひいたもの.
$g(12) = M_1+M_2-v(12) = 90-60 = 30$

許容範囲λ_i：プレイヤーiを含む全ての提携Sの中でg(S)が最小のもの
$\lambda_1 = \min(g(1),g(12),g(13),g(123)) = \min(40,30,30,30) = 30$

定理：$\lambda_i=M_i-m_i$が成り立つ.
つまり，許容範囲はコアの幅を意味する.

ゲームの例

$N=\{1,\ 2,\ 3\}$

$v(\phi)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=60,\ v(13)=70,\ v(23)=80$

$v(123)=120$

$M_1=v(123)-v(23)=120-80=40$

$M_2=v(123)-v(13)=120-70=50$

$M_3=v(123)-v(12)=120-60=60$

$g(\phi)=0-v(\phi)=0$

$g(1)=M_1-v(1)=40$

$g(2)=M_2-v(2)=50$

$g(3)=M_3-v(3)=60$

$$g(12)=\sum_{i\in\{1,\ 2\}} M_i-v(12)=30$$

$$g(13)=\sum_{i\in\{1,\ 3\}} M_i-v(13)=30$$

$$g(23)=\sum_{i\in\{2,\ 3\}} M_i-v(23)=30$$

$$g(123)=\sum_{i\in N} M_i-v(123)=30$$

$\lambda_1=\min\ (40,\ 30,\ 30,\ 30)=30$

$\lambda_2=\min\ (50,\ 30,\ 30,\ 30)=30$

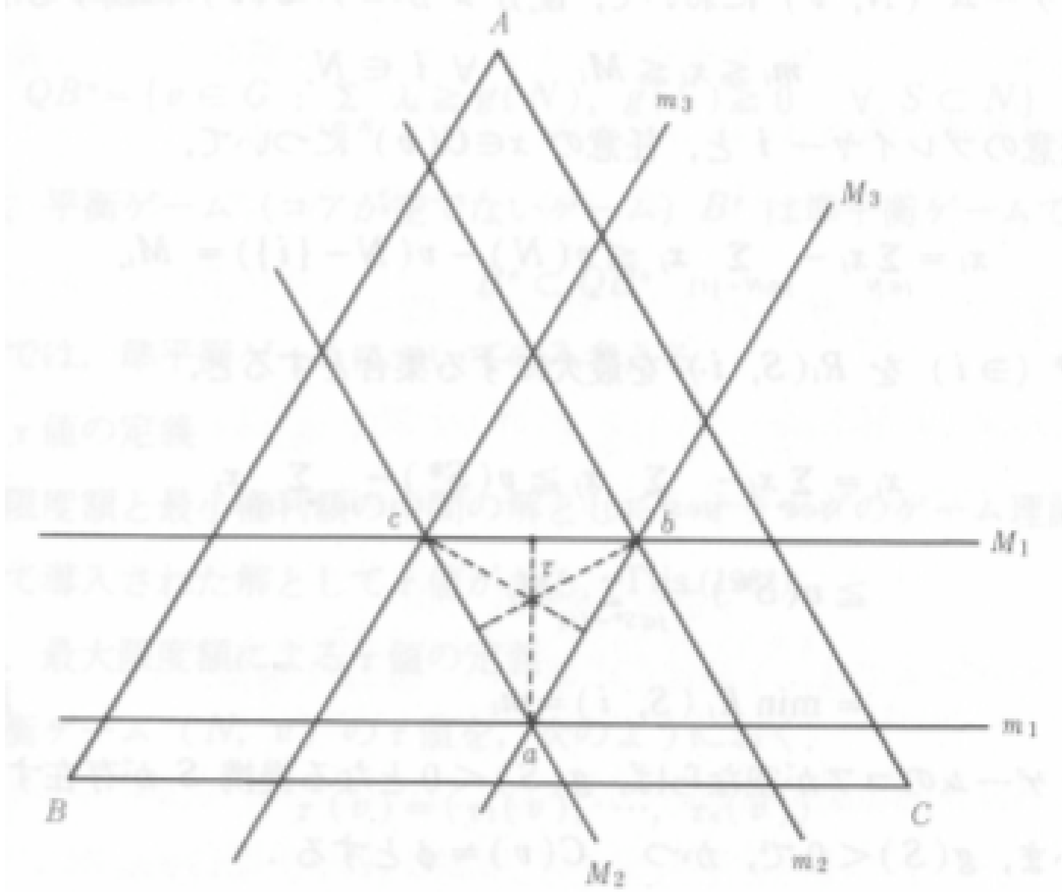
$\lambda_3=\min\ (60,\ 30,\ 30,\ 30)=30$

最大限度額と最小権利額を用いて
コアが表現出来る.

$a=(m_1,\ M_2,\ M_3)=(10,\ 50,\ 60)$

$b=(M_1,\ m_2,\ M_3)=(40,\ 20,\ 60)$

$c=(M_1,\ M_2,\ m_3)=(40,\ 50,\ 30)$



$\tau(v)=(30,\ 40,\ 50)$,　仁$=(30,\ 40,\ 50)$

$\phi(v)=(35,\ 40,\ 45)$，相対仁$=(32,\ 40,\ 48)$

準平衡ゲーム

ゲームvが以下の条件を満たすとき，準平衡ゲームという．

1. 全てのプレイヤーの最小権利額はその最大限度額を超えない
2. 全てのプレイヤーの最小権利額の和はv(N)を超えない
3. 全てのプレイヤーの最大限度額の和は少なくともv(N)である

$$QB^n = \{v \in G; m_i \leq M_i, \forall i \in N, \sum_{i \in N} m_i \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i\}$$

$$QB^n = \{v \in G; \sum_{i \in N} \lambda_i \geq g(N), g(S) \geq 0, \forall S \subset N\}$$

τ値の定義

最大限度額を用いた定義：

最大限度額ー全体のギャップ関数を各プレイヤーの許容範囲の比で分けたもの

$g(N)=0$のとき，$\tau_i(v)=M_i \quad \forall\ i\in N.$

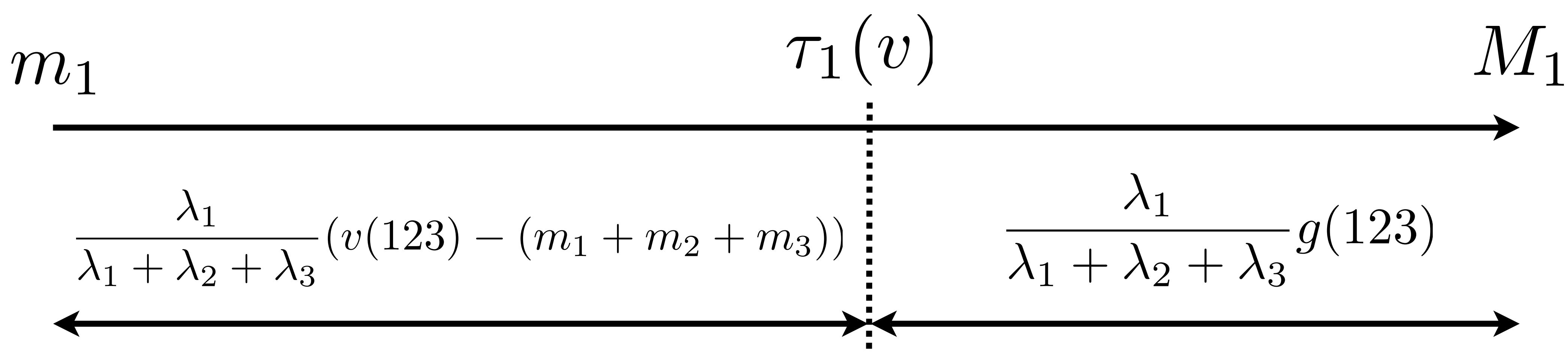
$g(N)>0$のとき，$\tau_i(v)=M_i-\dfrac{\lambda_i}{\sum_{i\in N}\lambda_i}g(N) \quad \forall\ i\in N.$

最小権利額を用いた定義：

最小権利額＋全体としての残余を各プレイヤーの許容範囲の比で分けたもの

$g(N)=0$のとき，$\tau_i(v)=m_i=M_i \quad \forall\ i\in N.$

$g(N)>0$のとき，$\tau_i(v)=m_i+\dfrac{\lambda_i}{\sum_{i\in N}\lambda_i}[v(N)-\sum_{i\in N}m_i] \quad \forall\ i\in N.$



定理

■常に$g(N-\{i\})=g(N)$

■常に$\lambda_i=M_i-m_i$

■配分xがコアC(v)に属するならば，$m_i \leq x_i \leq M_i$

■ゲームのコアが空ならば，$g(S)<0$となるSが存在する

τ 値の性質

Attribute of Tau value

τ値と残余均等配分解

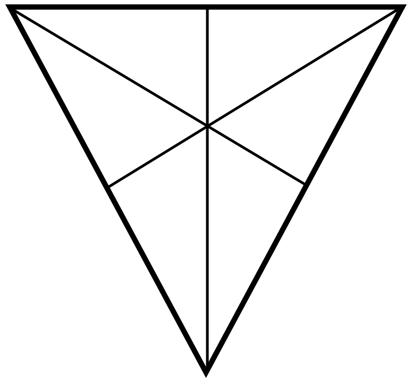
$$0 \leq g(N) \leq g(S), \forall S \subset N, S \neq \phi$$ のとき

$$\tau_i(v) = M_i - \frac{1}{n}(\sum_{i \in N} M_i - v(N))$$

λ_iがiに依らず同じ値を取る

このような形の利得ベクトルを持つ解を

残余均等配分解　または　**不足額均等配分解**　という.



τが三角形abcの垂心にくる（はず）

τ 値と比例配分解

半凸ゲーム

$0 \leq g(i) \leq g(S), \forall i \in N, \forall S \subset N, i \in S$　を満たすゲームを半凸ゲームと呼ぶ.

このとき

$$\lambda_i = g(i) = M_i - v(i)$$

なので, τ 値を簡単に書くことが出来る.

$$\tau_i = M_i - \frac{g(i)}{\sum_{i \in N} g(i)} g(N)$$

⇒このような解を比例配分解という

さらにゼロ正規化すると,

$$\tau_i = \frac{M_i}{\sum_{i \in N} M_i} v(N)$$

⇒比例配分解なので相対仁と一致する.

半凸ゲームの例

$N=\{1, 2, 3\}$

$v(\phi)=0,\ v(i)=0,\ i=1, 2, 3$

$v(12)=20,\ v(13)=40,\ v(23)=80$

$v(123)=120$

$M=(40, 80, 100)$

$g(\phi)=0,\ g(1)=40,\ g(2)=80,\ g(3)=100$

$g(12)=g(13)=g(23)=100,\ g(123)=100$

$\lambda=(40, 80, 100)$

$m=(0, 0, 0)$

$\tau_1(v)=40\times 120/220=21.8$

$\tau_2(v)=80\times 120/220=43.6$

$\tau_3(v)=100\times 120/220=54.5$

τ値＝相対仁＝(21.8, 43.6, 54.5)

仁＝(20.0, 40.0, 60.0)

シャープレイ値＝(23.3, 43.3, 53.3)

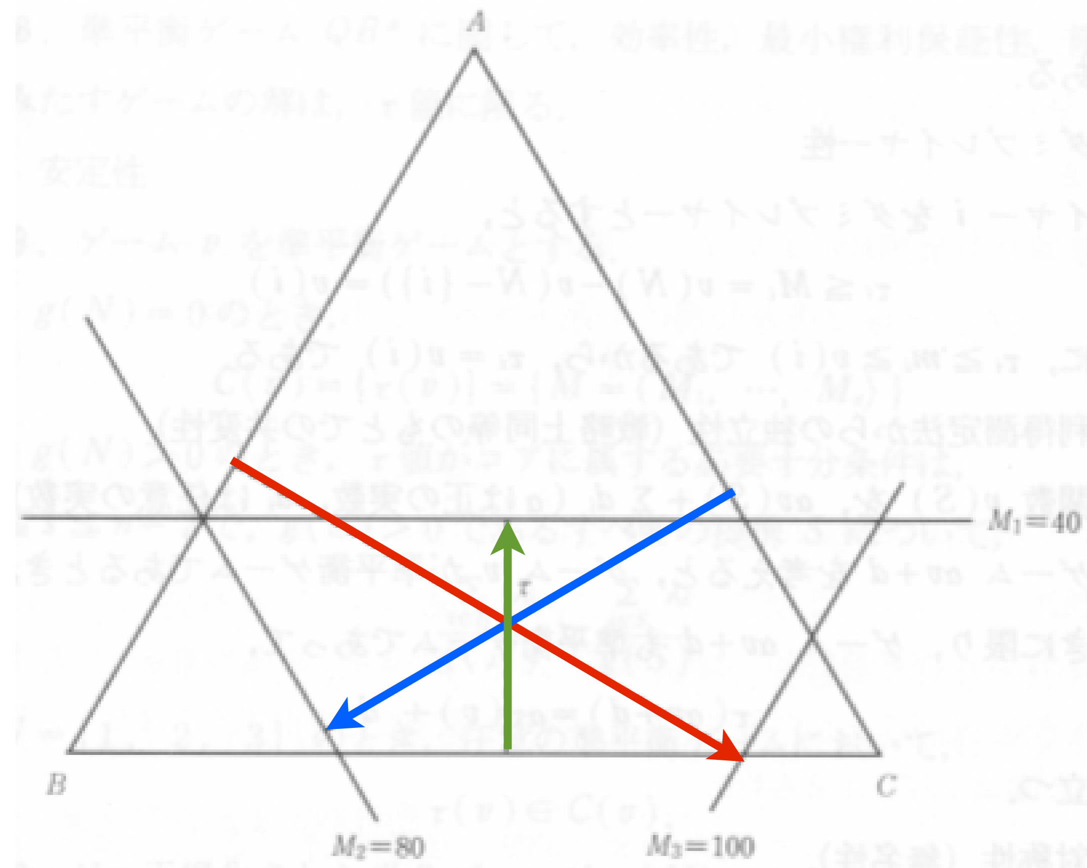


図 12.2. 半凸ゲームの τ 値

半凸ゲームなので λi＝Mi-v(i)

安定性の検証

g(N)=0のとき

$$C(v)=\{\tau(v)\}=\{M_i\}$$

g(N)>0のとき

τ 値がコアに属する必要十分条件は,

2≤s≤n-2で，g(S)>0である全ての提携Sについて

$$\frac{\sum_{i\in N}\lambda_i}{g(N)}\leq\frac{\sum_{i\in S}\lambda_i}{g(S)}$$

系：N={1,2,3}のとき，任意の準平行ゲームにおいて τ 値はコアに含まれる.

以上の定理から，プレイヤーの数が2,3の時は τ 値はコアに属するが，４人以上になると，必ずしもコアに属さず安定しているとはいえない．凸ゲームでも５人以上になるとコアに属するとは限らない.

その他の性質

■ τ 値は全体合理性と個人合理性を満たしているので配分である.
（τ_i>v(i)がみたされているから）

■ プレイヤーiがダミプレイヤーならばM_i=v(i)，一方，m_i≥v(i)なので，τ_i=v(i)
（xi=v(i)となる）

■ 利得測定法からの独立性
特性関数v(S)をav(S)+Σdiと変換したゲームav+dを考えると，vが準平衡ゲームである時av+dも準平衡ゲームで，τ(av+d)=aτ(v)+dが成り立つ.

■ 対称性　プレイヤーの番号を付け替えても本質的な変更はない.

■ 最小権利保障性（τはmを確保している）

■ 限定比例制（m=0の時，Mに比例する．ひとつ前のスライド）

■ 定理：準平衡ゲームに関して，効率性，最小権利保障性，限定比例性を満たすゲームの解はτ値に限る.

τ値は解として有効か

■シャープレイ値と比較すると，加法性，単調性は満たされていない．また，シャープレイ値や仁のもつ縮小ゲームによる整合性をτ値が確保しているかは不明.

■提携合理的な解を求める方法としては不安定だと思われる.

■コアの性質を知るには有効であるが，必ずしも十分に納得がいく解とは言えない.