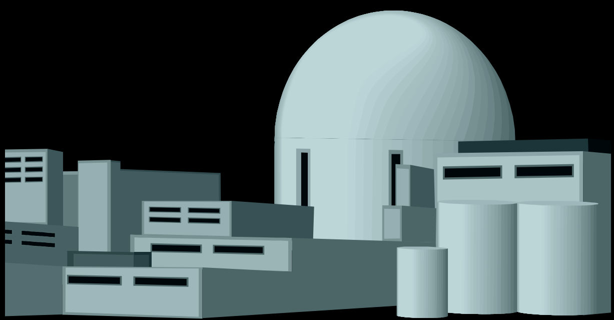
第9章

データ検証問題とゲーム理論：核不拡散条約の事例



2012年7月29日(日) ゲーム理論合宿

M1　伊藤 創太

Introduction

第9章　データ検証問題とゲーム理論：核不拡散条約の事例

キーワード：展開型ゲーム、データ検証、査察ゲーム、情報不完備ゲーム

- はじめに
- データ検証問題：核不拡散条約の事例
- 査察ゲームΓ^0
- 査察ゲームΓ^1
- 査察ゲームΓ^2
- 情報不完備ゲーム -査察ゲームΓ^3-
- 結論

核拡散防止条約(NPT)

核軍縮と核不拡散を目的とした国際条約

核兵器国
核軍縮交渉を義務づけ

非核兵器国
保障措置を受諾する

査察者
（IAEA）

独自計量の査察の権利

行為者
（国）

核物質の在庫報告

保障措置

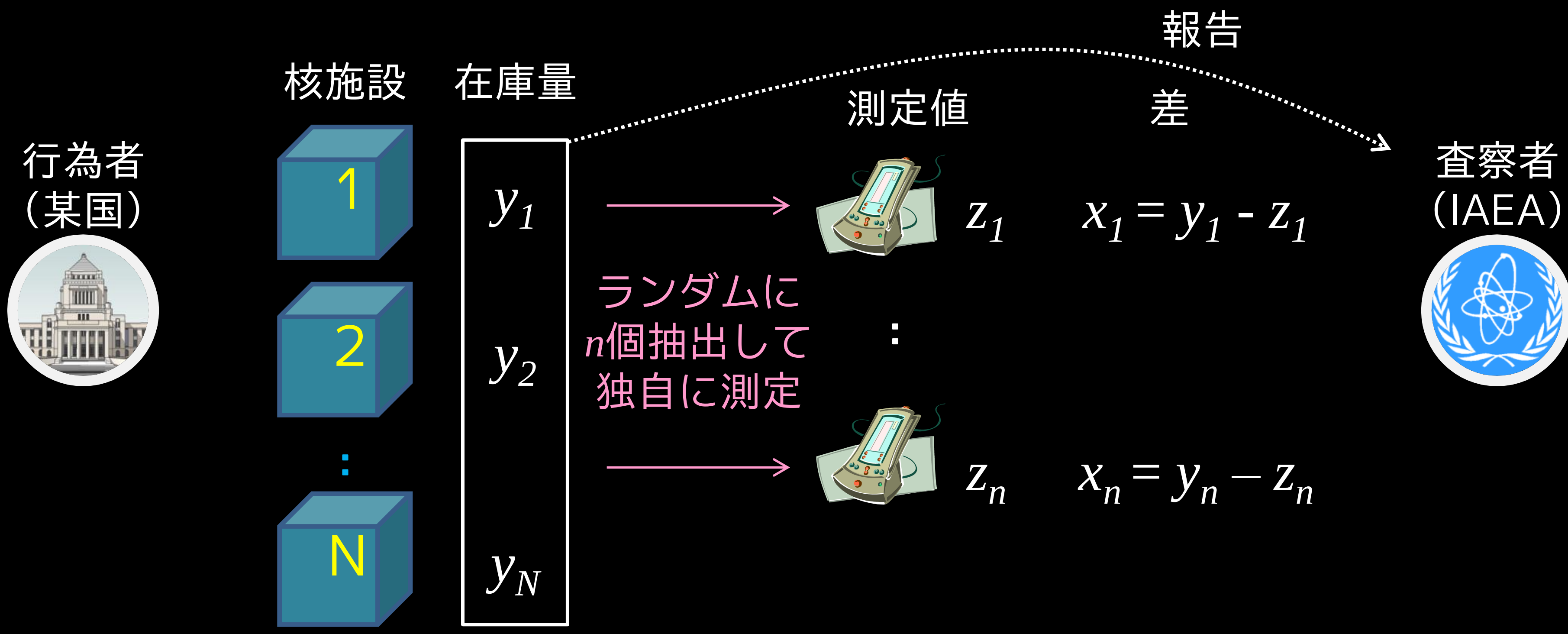
核物質が軍事目的で利用されないことを確保する措置
在庫報告、ビデオ監視等

有意量

核兵器が製造できる量
プルトニウムの場合8kg
この量の不正転用を防ぎたい

データ検証問題

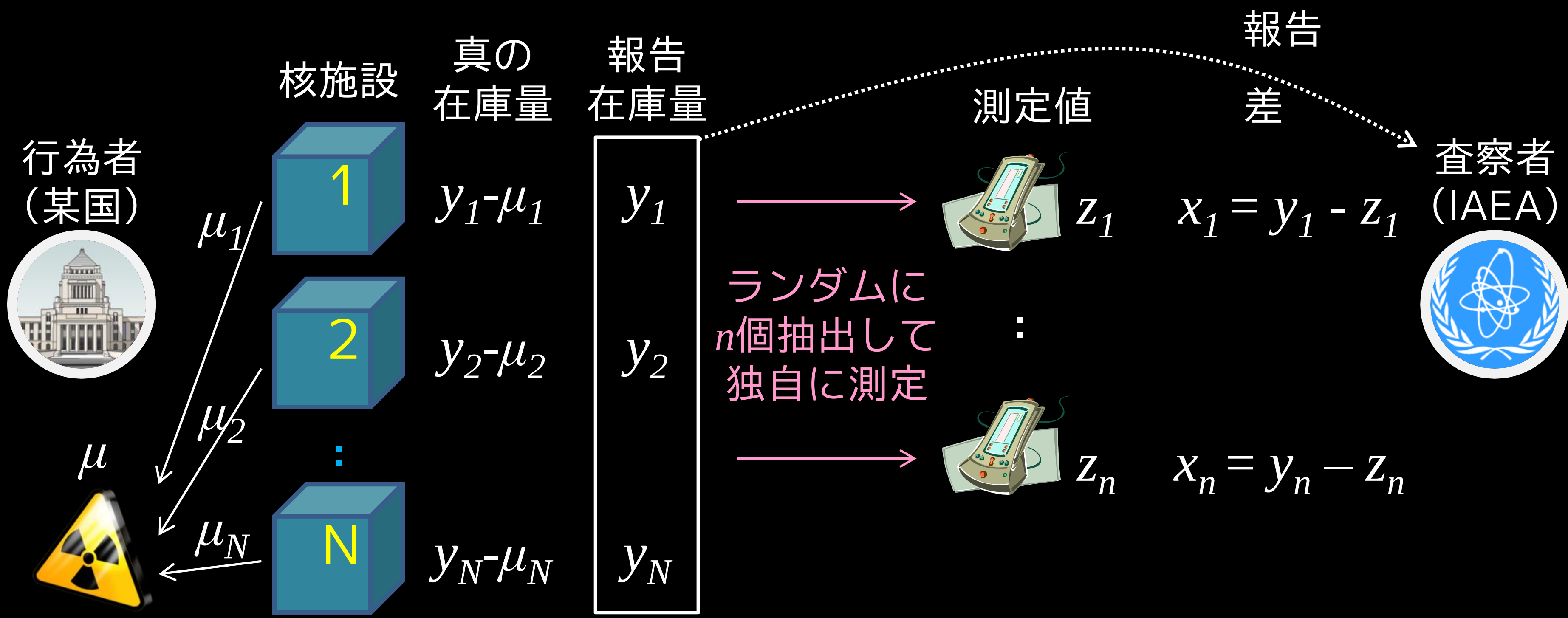
NPT順守しているとき



NPTを順守している場合、報告データy_iとIAEAの測定値z_iは同じ平均値のはず。 → $E(x_i) = 0,\ i = 1, \cdots, N$ （帰無仮説）

データ検証問題

NPT順守していないとき



NPTを順守していない場合、報告データy_iは粉飾されている

$E(x_i) = \mu_i,\ i = 1, \cdots, N$ （対立仮説）

査察ゲーム

利得行列

利得：（査察者、行為者）		行為者：合法（H_0）	行為者：不法（H_1）
査察者	警告しない（$\bar{A}$）	(0 , 0)	(-1 , 1)
査察者	警告する（A）	($-c$, $-d$)	($-a$, $-b$)

査察者の損失

- 1 不法行為見逃しによる損失
- a 警告して、不法行為される損失
- c 誤って警告を出してしまう損失
- 0 正常な状態

行為者の損失

- b 不法行為発見での処罰の損失
- d 誤って警告されたときの損失
- 0 正常な状態

2つの確率

$$\alpha = Prob(A|H_0)$$

合法行為なのに警告を出す確率

$$\beta = Prob(\bar{A}|H_1)$$

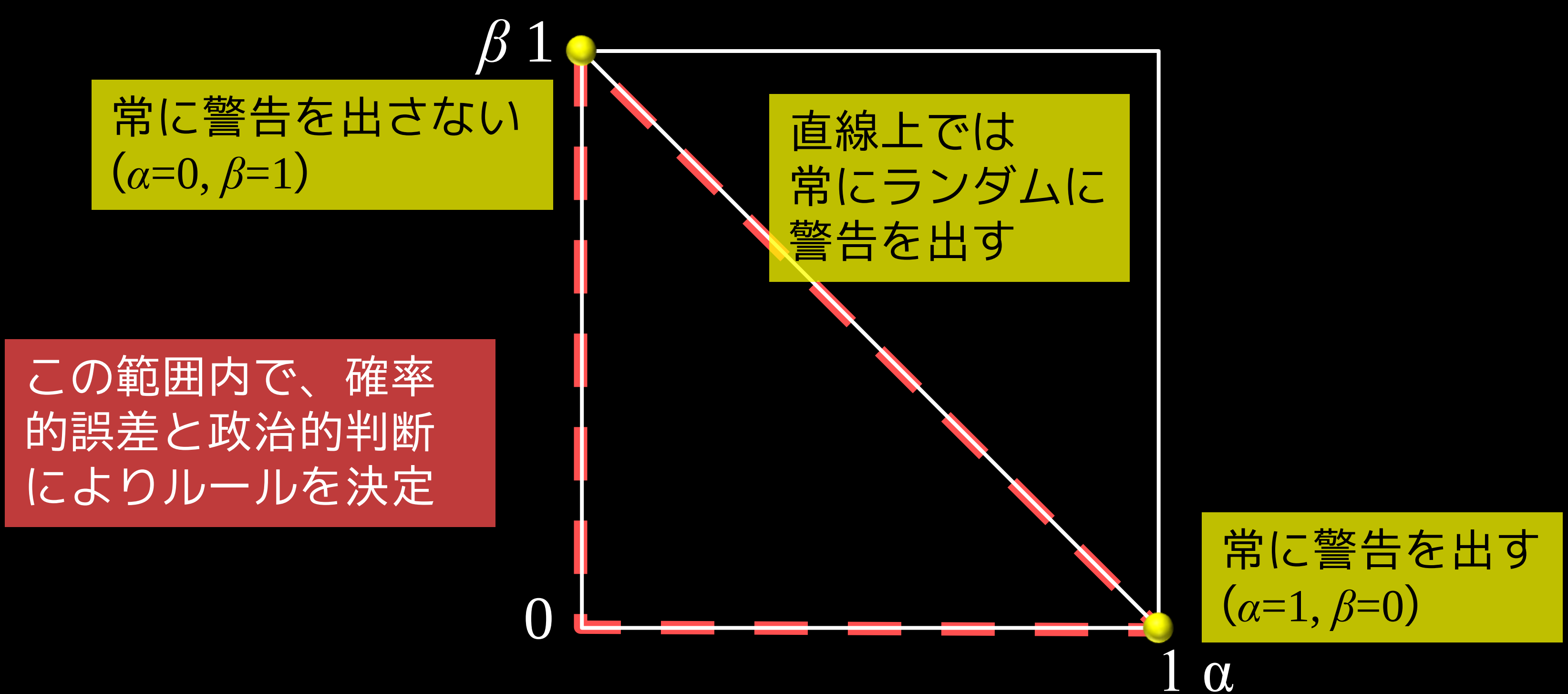
不法行為なのに警告を出さない確率

査察ゲーム

2つの確率　査察にはサンプリングや測定誤差があるため、査察者の判定ルールも確率的に考える

・行為者が合法なのに査察者が警告する確率　α

・行為者が不法なのに査察者が警告しない確率　β



査察ゲームΓ^0

査察者は行為者の行為と独立にランダムに警告を出す

査察者 $\xrightarrow{\alpha}$ 警告を出す

査察者 $\xrightarrow[1-\alpha]{}$ 警告を出さない

不法行為見逃しの確率：　$\beta(\alpha) = 1 - \alpha$

誤った警告の確率：　α

行為者の期待利得を考えると、ナッシュ均衡では･･･

$$\underbrace{-d\alpha}_{\text{合法行為選択の期待利得}} = \underbrace{(1-\alpha) - b\alpha}_{\text{不法行為選択の期待利得}}$$

とくと･･･

$$\alpha^* = \frac{1}{1+b-d}$$

同様に査察者の期待利得を考えると、

行為者の合法行為選択確率

$$t^* = \frac{1-a}{1-a+c} > 0$$

査察ゲームΓ^0

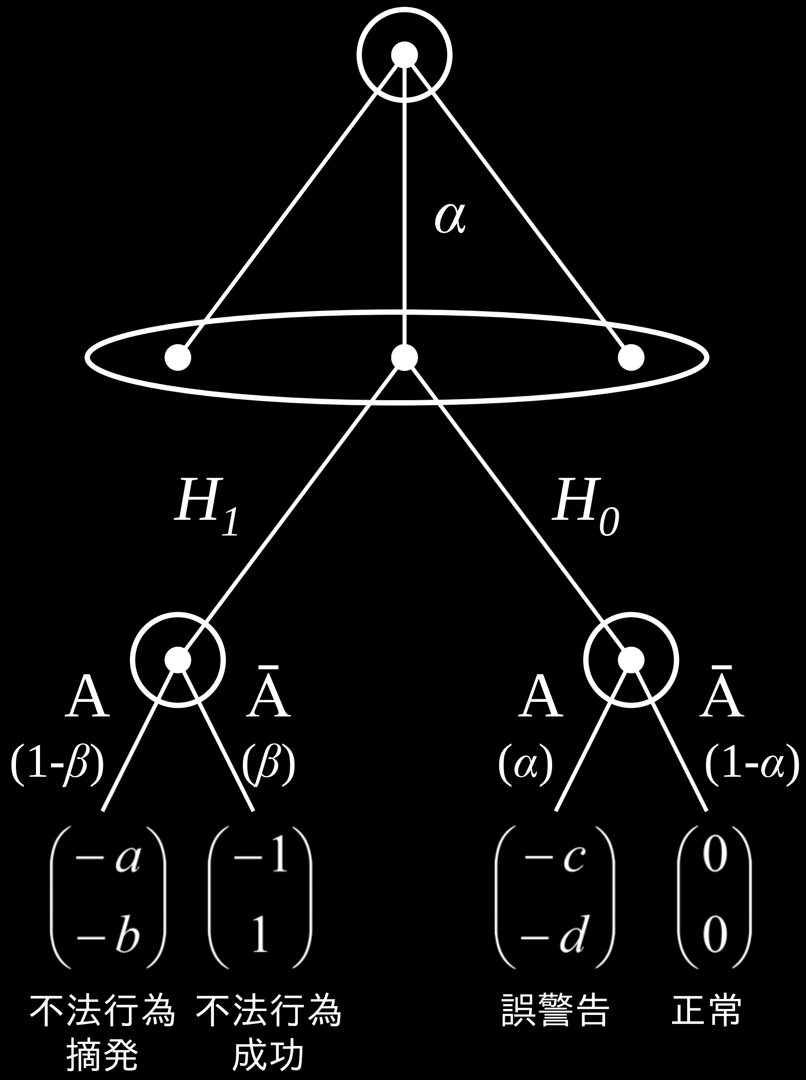
結果

・査察者の警告は、行為者が合法でも不法でも正の確率で出現する

・行為者の不法行為選択確率は正

→不法行為を阻止できない

査察ゲームΓ[1]



1. 査察者が誤って警告する確率αを選択する

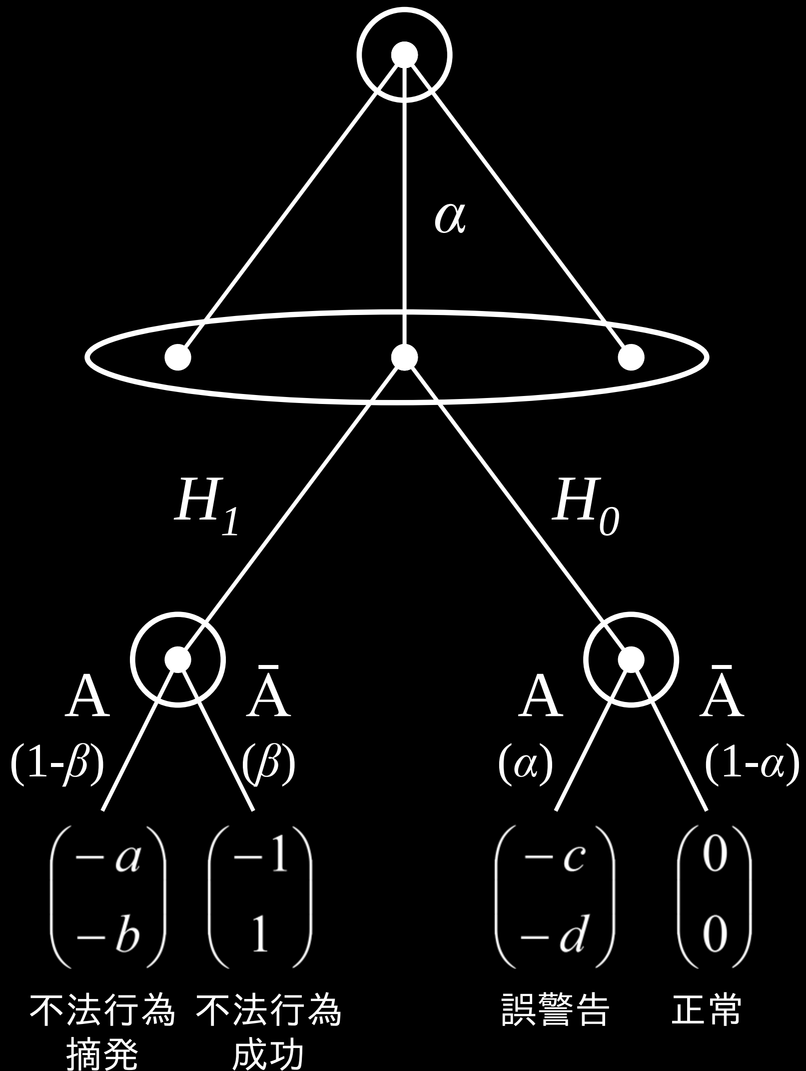
2. 行為者はαを知らずに合法不法を(H_0 / H_1)選択

3. 次の確率で警告が出る

$$P(A) = \begin{cases} \alpha & （H_0\text{選択のとき}） \\ 1-\beta & （H_1\text{選択のとき}） \end{cases}$$

行為者が不法行為を選択する戦略変数の確率をqとおく

査察ゲームΓ^1



純戦略でのナッシュ均衡はない。
行為者の利得は、

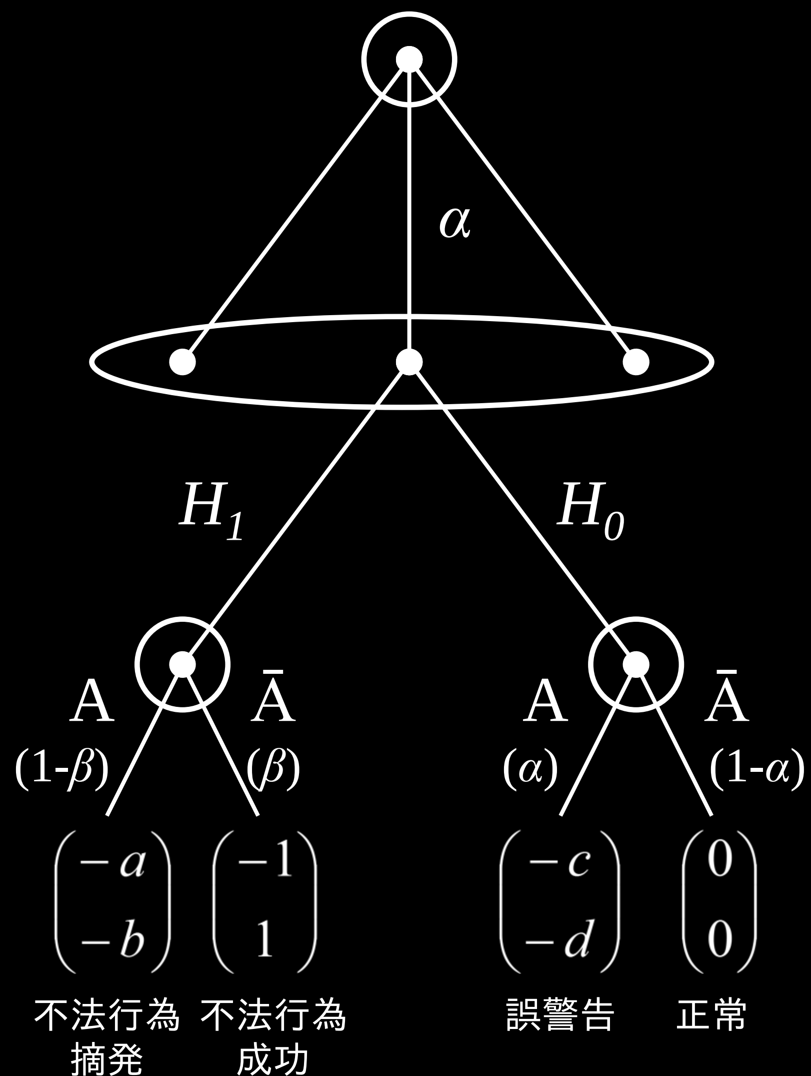
$$g_2(\alpha,q)$$
$$=(-b(1-\beta)+\beta)q-d\alpha(1-q)$$
$$=\boxed{(-b(1-\beta)+\beta+d\alpha)}q-d\alpha$$

$0<q^*<1$ なので、この部分が0

$$H(\alpha)=\beta(\alpha)-\frac{b-d\alpha}{b+1}$$ とすると、

関数は単調減少、$H(0)>0$、$H(1)<0$
より、$0<\alpha^*<1$のα^*が存在

査察ゲームΓ^1



行為者の均衡戦略q^*は、

$$g_1(\alpha^*, q^*) \geq g_1(\alpha, q^*)$$

を満たすので、

$$\frac{g_1(\alpha^*, q^*)}{\partial \alpha} = (c + (a-1)\beta'(\alpha^*))q^* - c$$

$$= 0$$

$$q^* = \frac{c}{c + (a-1)\beta'(\alpha^*)}$$

で一意にきまる

査察ゲームΓ^1

結果

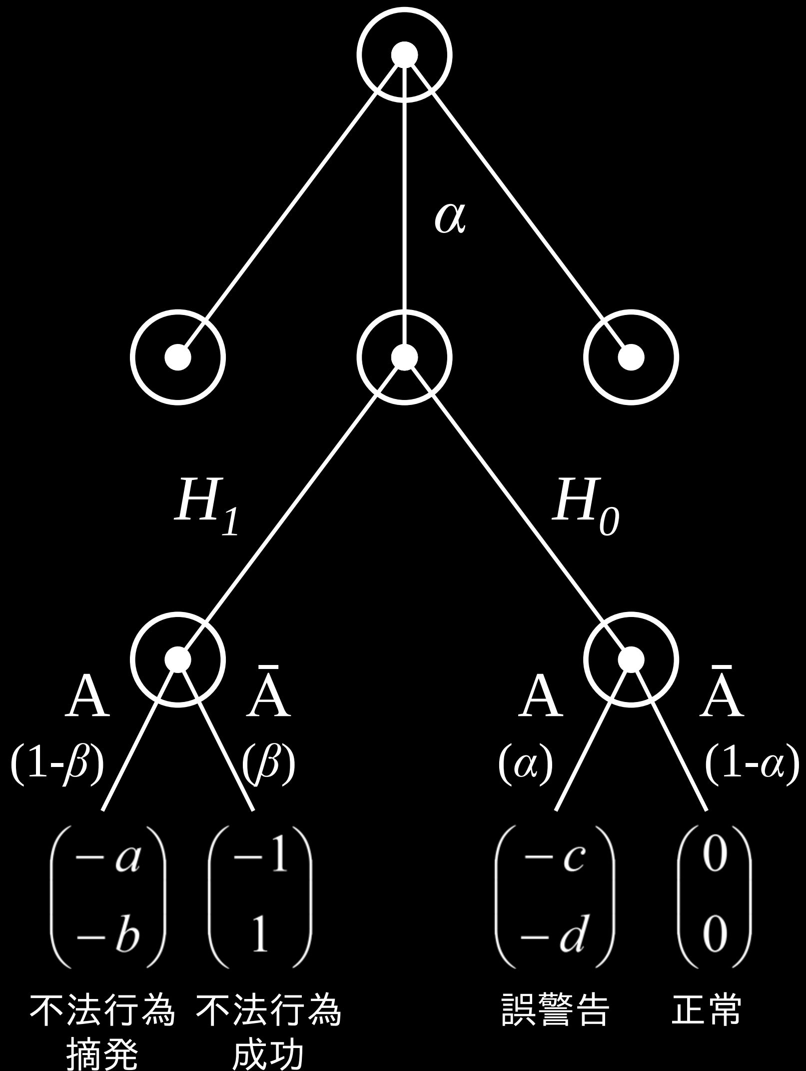
・査察者の警告は行為者が合法/不法どちらを選択しても出現する

・誤警告確率αは行為者の利得パラメータb、dで決まる

・行為者が不法行為を選択する確率$q*$は正

→不法行為を阻止できない

査察ゲームΓ^2



1. 査察者が誤って警告する確率αを選択する

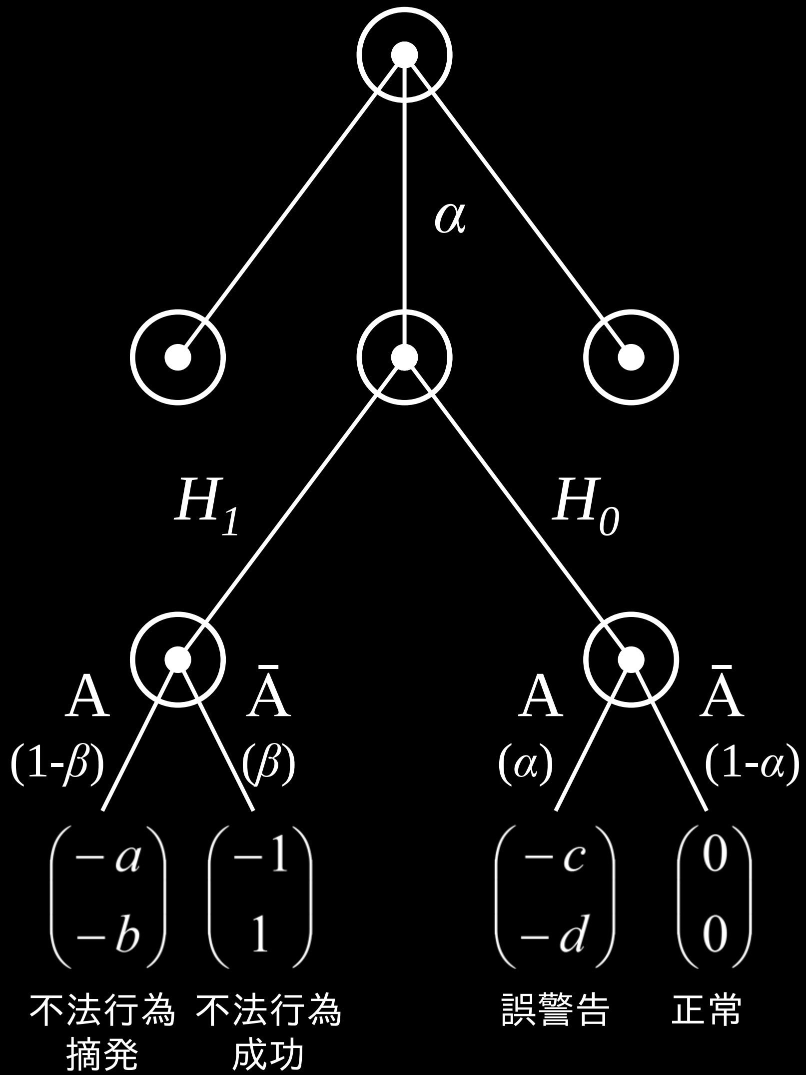
2. 行為者はαを知った上で合法不法を(H_0/H_1)選択

3. 次の確率で警告が出る

$$P(A) = \begin{cases} \alpha & （H_0\text{選択のとき}） \\ 1-\beta & （H_1\text{選択のとき}） \end{cases}$$

行為者のαに対する応答（合法と不法の選択）を$\gamma(\alpha)$とおく

査察ゲームΓ^2



純戦略でのナッシュ均衡はない。
行為者の利得は、

$$
\begin{aligned}
&g_2(\alpha, q) \\
&= (-b(1-\beta)+\beta)q - d\alpha(1-q) \\
&= \boxed{(-b(1-\beta)+\beta+d\alpha)}q - d\alpha
\end{aligned}
$$

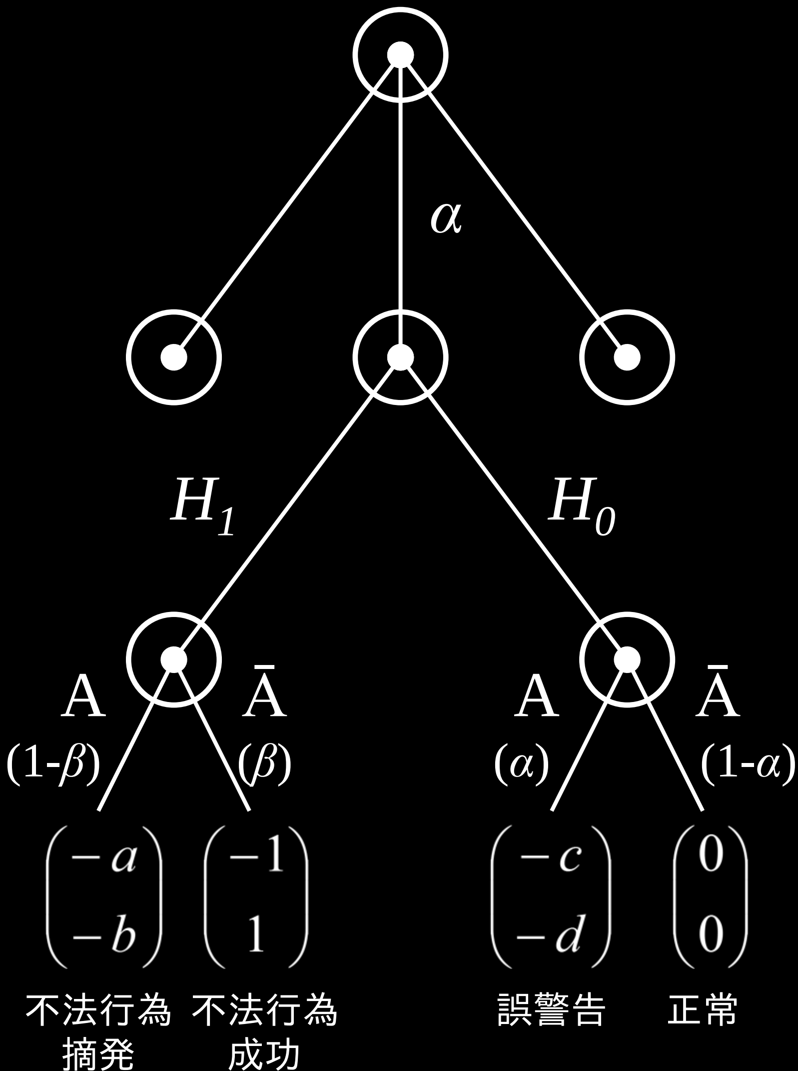
$0 < q^* < 1$ なので、この部分が0

$$H(\alpha) = \beta(\alpha) - \frac{b - d\alpha}{b+1}$$ とすると、

関数は単調減少、$H(0)>0$、$H(1)<0$
より、$0<\alpha^*<1$のα^*が存在

（ここまでは査察ゲームΓ^1と同じ）

査察ゲームΓ²



行為者の最適戦略γ*は

$$\gamma^*(\alpha) = \begin{cases} H_1 & \text{if} \quad 0 \le \alpha \le \alpha^* \\ H_0 & \text{if} \quad \alpha^* \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

このとき、査察者の利得は

$$g_1(\alpha, \gamma^*) =$$

$$\begin{cases} -a(1-\beta) - \beta & \text{if} \quad 0 \le \alpha \le \alpha^* \\ -c\alpha & \text{if} \quad \alpha^* \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

全てのα∈[0,1]で $-c\alpha > -a(1-\beta)-\beta$ なので査察者の利得最大化の条件から均衡点は

$$\gamma^*(\alpha^*) = H_0$$

査察ゲームΓ^2

結果

・査察者の行為者の不法行為を完全阻止

→査察ルールを宣言することが効力を持つ

問題点

・査察者の利得関数が不連続、αの微小変動に頑健でない

→不法行為を阻止できない

・均衡点では行為者が合法をとるか不法をとるかは無差別

不法行為方法の拡張

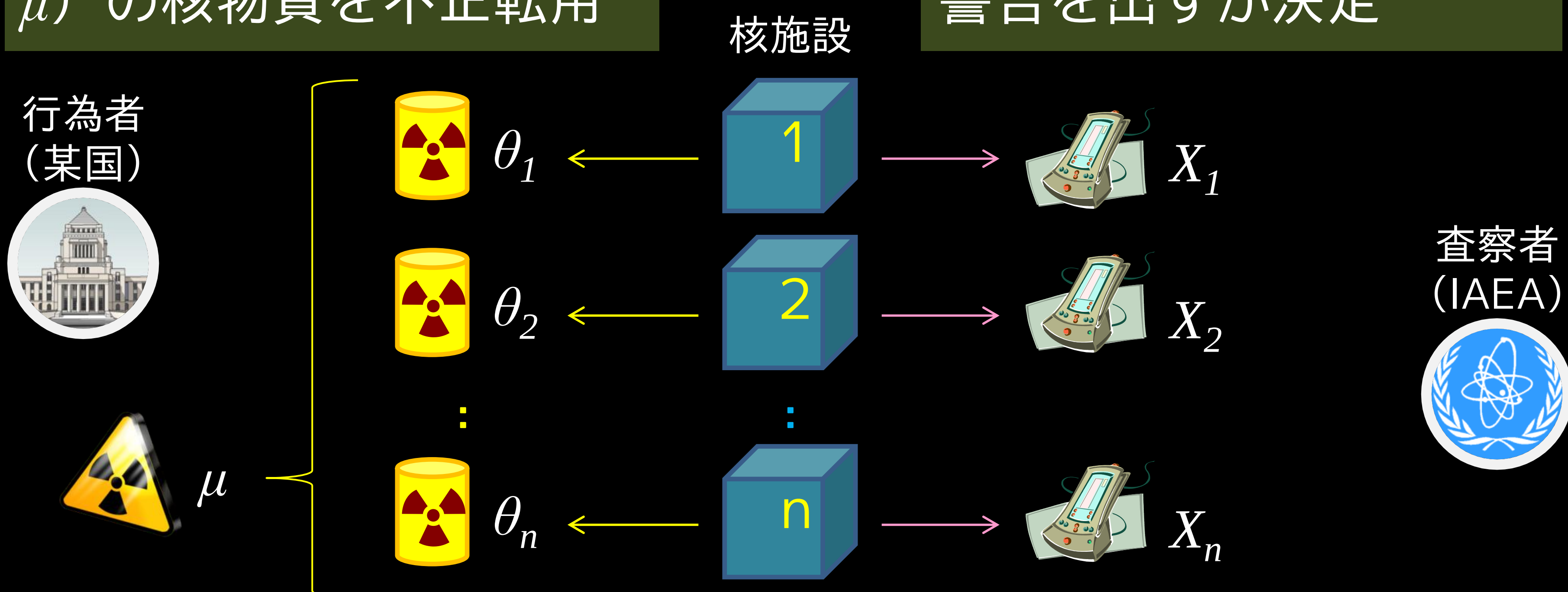
$$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n), \quad \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \mu, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

行為者の不法行為θ

各施設iからθ_i（合計がμ）の核物質を不正転用

査察者の査察戦略 δ

独自の調査観測値X_iから警告を出すか決定



情報不完備ゲーム

利得：（査察者、行為者）		行為者	
		合法（H_0）	不法（H_1）
査察者	警告しない（$\bar{A}$）	$(0 , 0)$	$(-1 , x)$
	警告する（A）	$(-c , -d)$	$(-a , -b)$

1→xに変える

情報不完備ゲーム

査察者はxの分布関数Gのみを知り、値を知らない

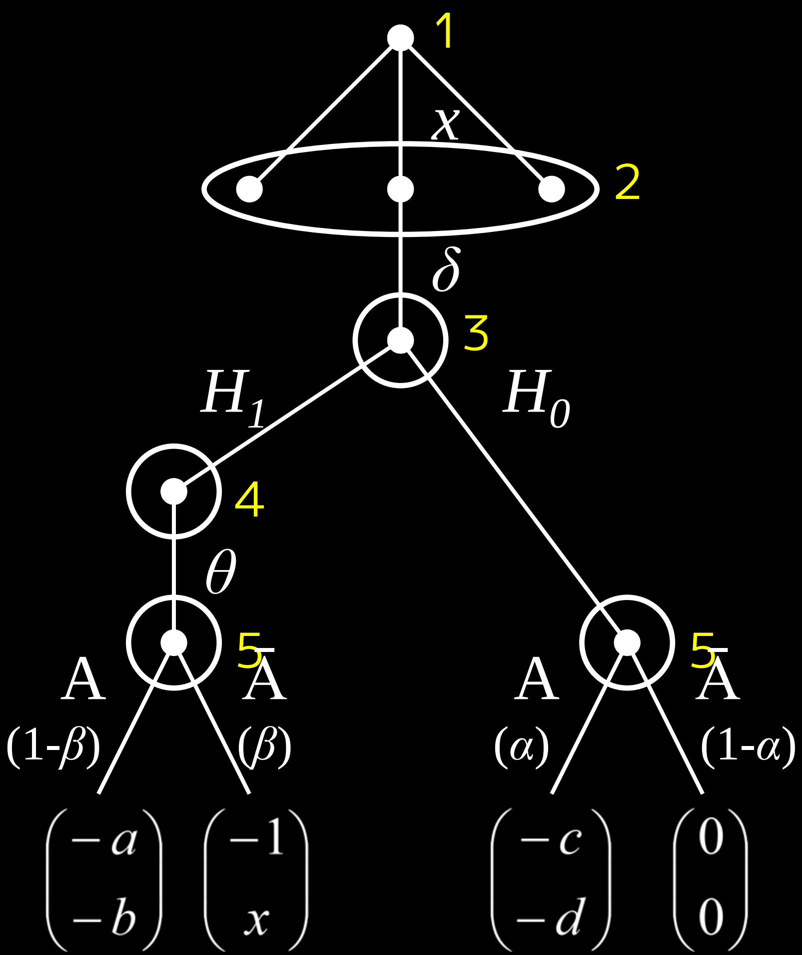
不法行為をするインセンティブの大きさの知識はわからない（確率分布はわかるけど）

査察者（IAEA）

行為者（某国）

不法行為が見つからなければ利得x！

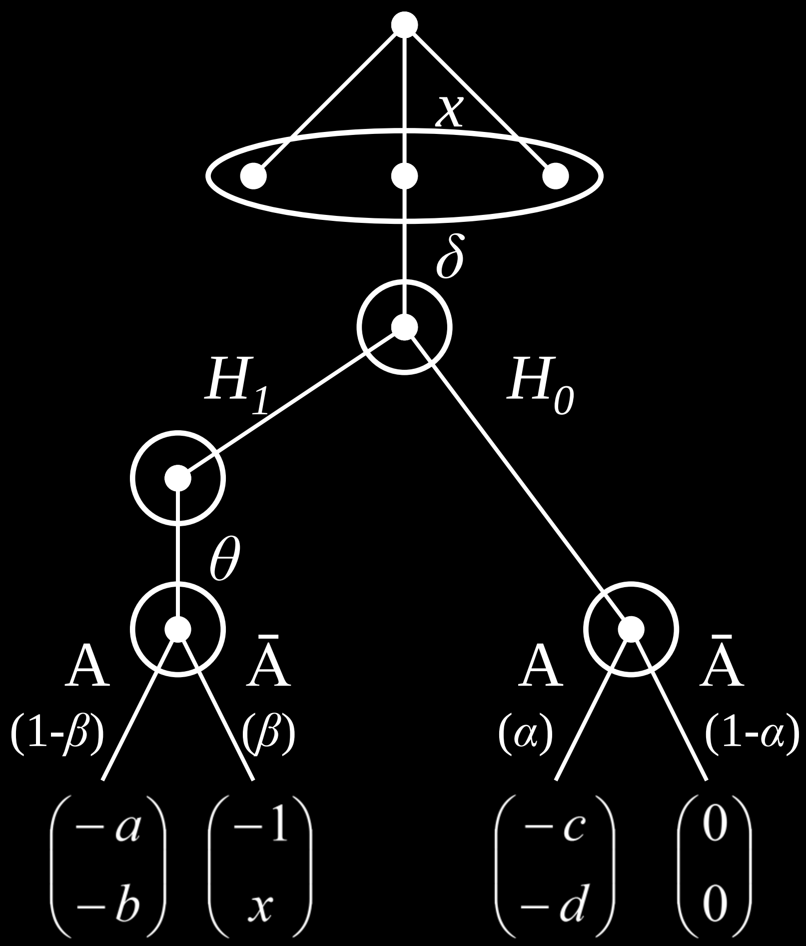
査察ゲームΓ^3



1. 不法行為見逃しの時の行為者の利得xを分布関数Gから決定
2. 査察者が査察戦略δを選択（査察者はxを知らない）
3. 行為者は(x,δ)を知り、合法不法を選択
4. 不法選択なら、戦略θを選択
5. 次の確率で警告が出る

$$P(A)=\begin{cases}\alpha(\delta) & （H_0\text{選択のとき}）\\ 1-\beta(\delta,\theta) & （H_1\text{選択のとき}）\end{cases}$$

査察ゲームΓ^3



部分ゲーム完全均衡点を求める！

仮定

1. xの分布関数Gは密度関数g

2. 全ての$\alpha\in[0,1]$と全ての$\delta\in\Delta\alpha$についての最大化問題

$$\max_{\theta\in\Theta}\beta(\delta,\theta)$$

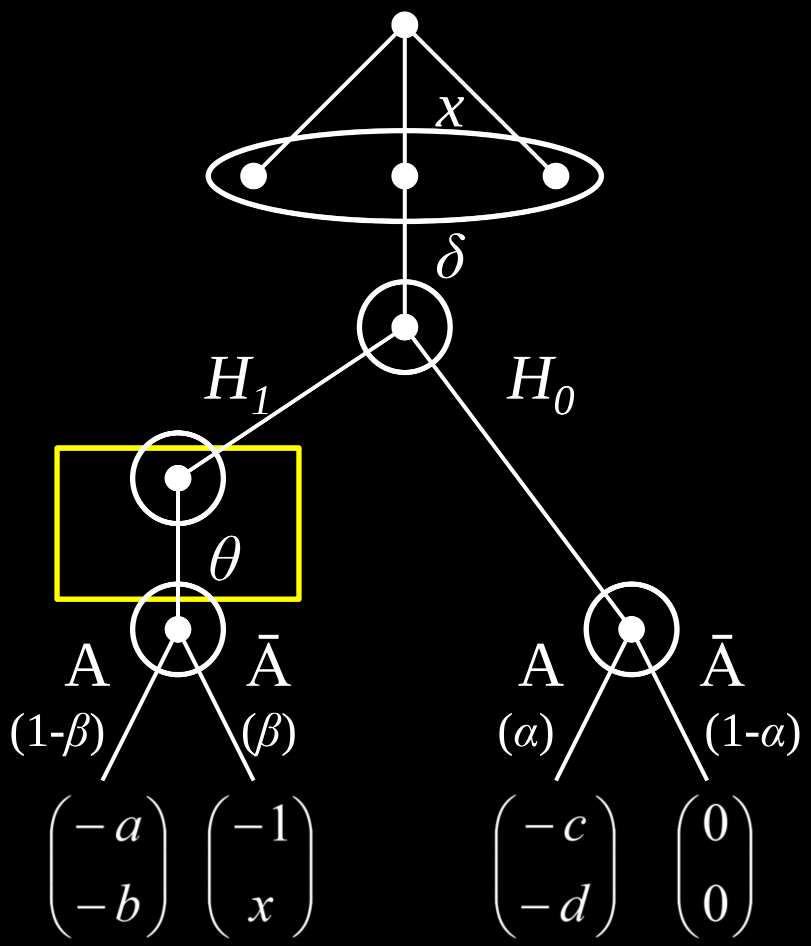
の解が存在し、その最大値を$\beta(\delta)$とする

3. 全てのについてminmax問題

$$\min_{\delta\in\Delta\alpha}\max_{\theta\in\Theta}\beta(\delta,\theta)$$

の解が存在し、その値を$\beta(\alpha)$とする

査察ゲームΓ^3



まず行為者の最適な不法行為θを求める

全ての $x,\delta\in[0,\infty)$ に対する行為者の期待利得

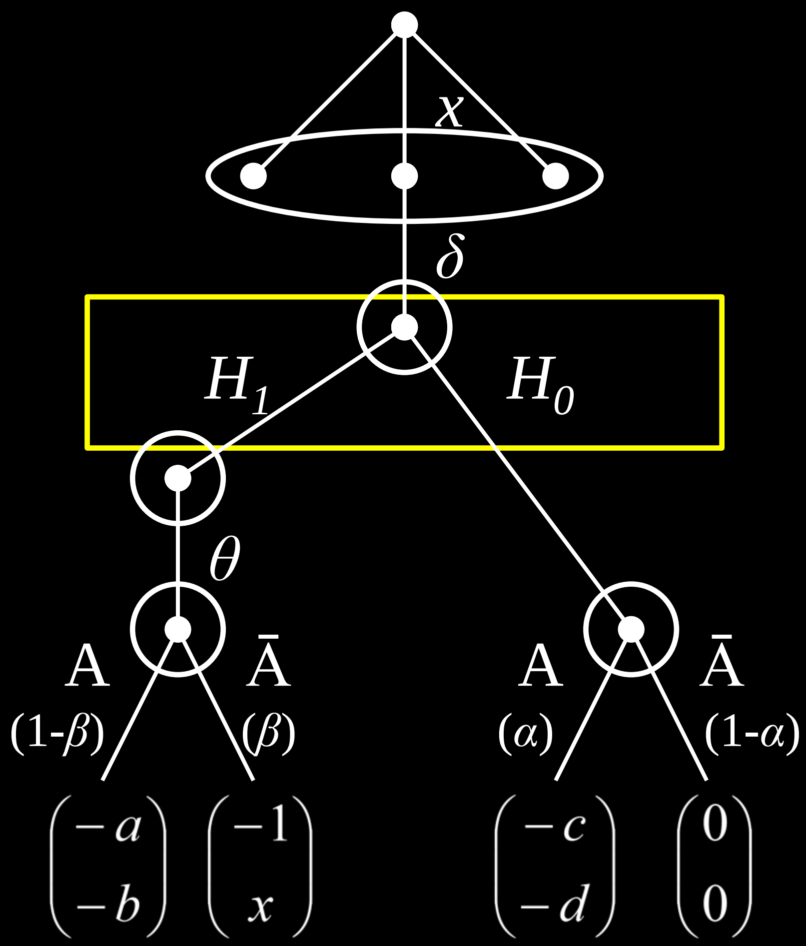
$$(b+x)\beta(\delta,\theta)-b$$

↓これを最大にしたいから・・・

$$\beta(\delta)=\max_{\theta\in\Theta}\beta(\delta,\theta)$$

行為者は不法行為の見逃し確率を最大化する

査察ゲームΓ^3



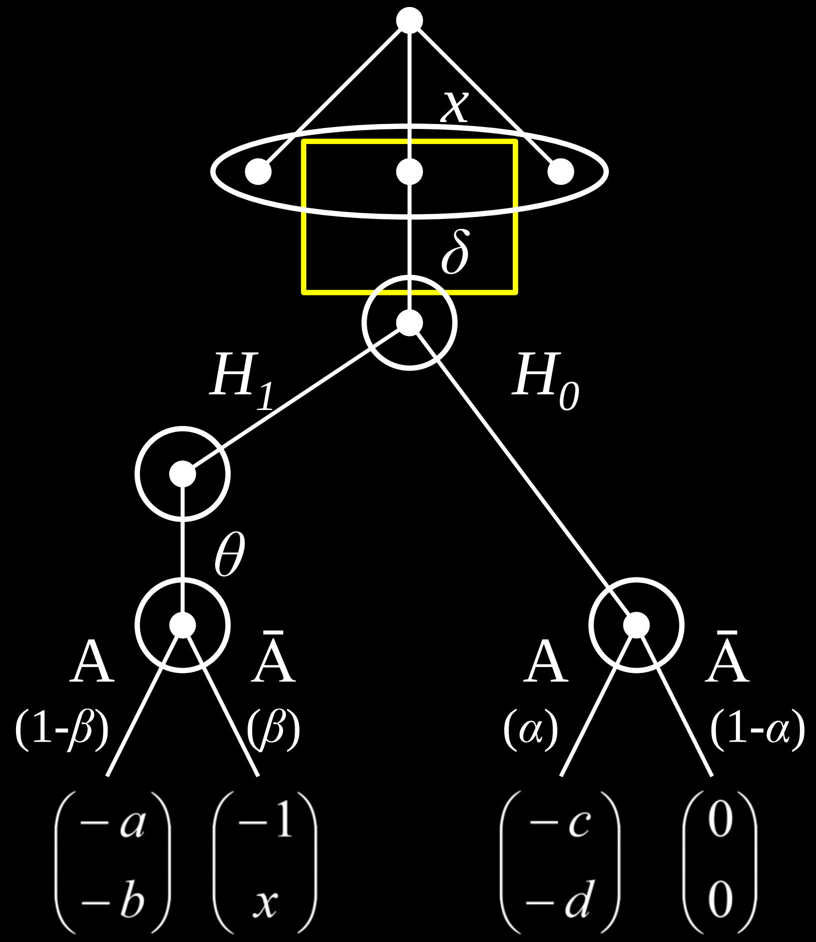
行為者の期待利得は、
合法選択：$-d\alpha(\delta)$
不法選択：$(b+x)\beta(\delta)-b$

2つの大きい利得の方をとる

よって、最適行動は、
$h(x,\delta)= (b+x)\beta(\delta)-b+d\alpha(\delta)$として、

$$\begin{array}{ll} H_0 & \text{if} \quad h(x,\delta)<0 \\ H_0\text{または}H_1 & \text{if} \quad h(x,\delta)=0 \\ H_1 & \text{if} \quad h(x,\delta)>0 \end{array}$$

査察ゲームΓ^3



査察者の最適戦略は、

$$\boxed{\max_{\delta\in\Delta}\int_0^\infty g_1(\delta,x)dG(x)}$$

βの減少関数

の解。

査察者の期待利得は

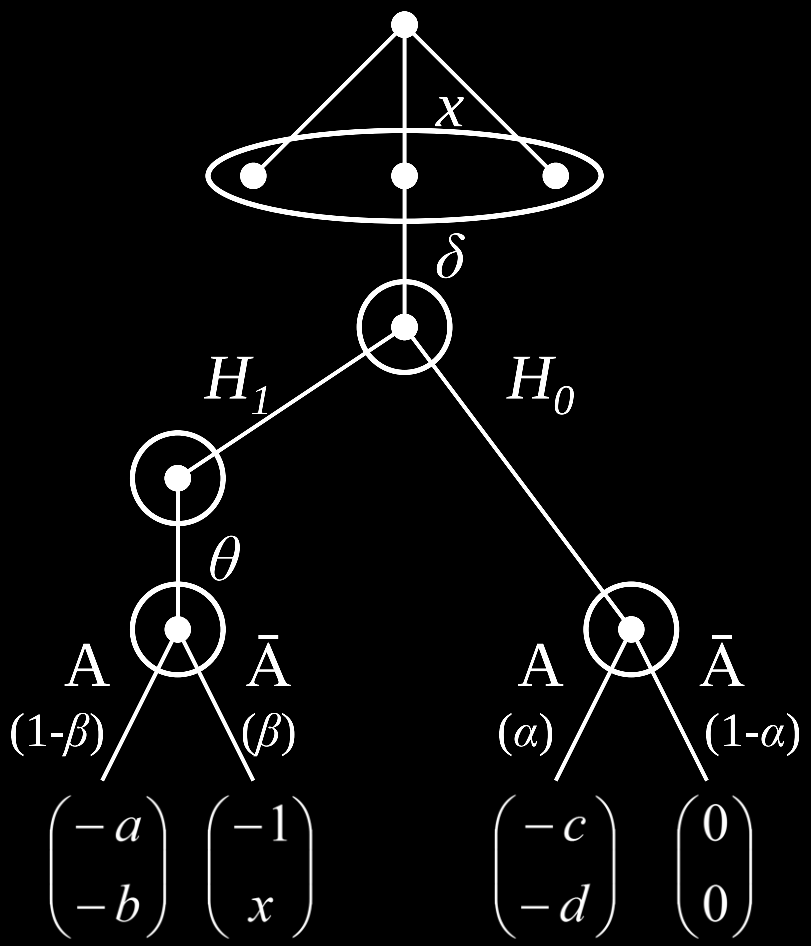
$$g_1(\delta,x)=$$
$$\begin{cases}-c\alpha(\delta) & (\text{if}\quad h(x,\delta)<0)\\ -a(1-\beta(\delta))-\beta(\delta) & (\text{if}\quad h(x,\delta)>0)\end{cases}$$

とすると、査察者の最適戦略δは

$$\min_{\delta\in\Delta_\alpha}\beta(\delta)$$

と同じ

査察ゲームΓ^3



よって、完全均衡点は、
最適査察戦略δは、

$$\min_{\delta\in\Delta_\alpha}\max_{\theta\in\Theta}\beta(\delta,\theta)$$

の解。

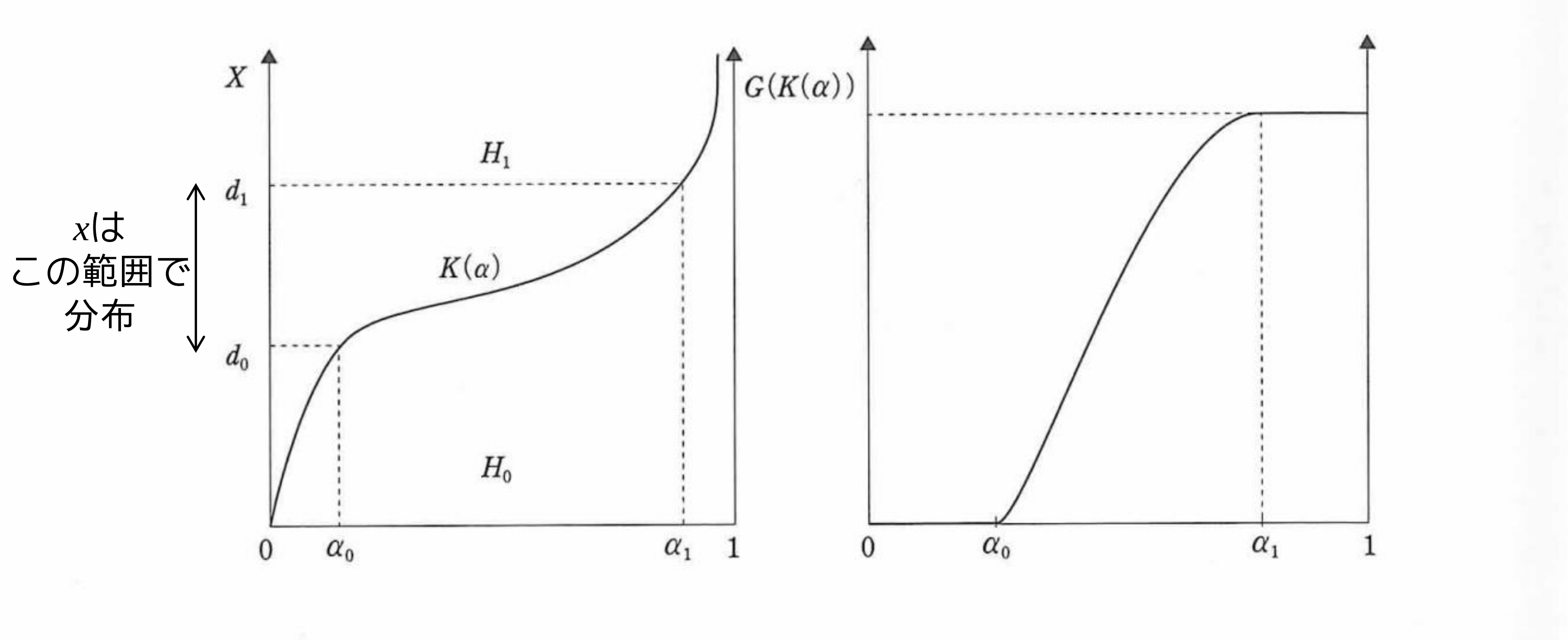
行為者は不法行為見逃し利得xが
臨界値関数

$$K(\delta)=\frac{b-d\alpha(\delta)}{\beta(\delta)}-b$$

より小さいとき合法行為を選択

査察ゲームΓ^3

合法行為臨界値関数$K(\alpha)$と合法行為確率



結果

・$\alpha^*=\alpha_1$とすれば不法行為は完全に抑止

・期待利得の不連続性が解消

得られた結果

1 査察ルールを公表して査察者がルールにコミットできる状況では、不法行為を阻止できる可能性が高い

査察者
（IAEA）

査察ルール公表 →

行為者
（国）

2 誤警告確率と、不法行為を発見できない確率を最適にコントロールすることが必要

査察者
（IAEA）

誤警告確率 α
不法行為見逃し確率 β

……　測定誤差と査察者利得パラメータによる政治的判断