連続吸収マルコフ過程を用いた交通量分布

佐佐木綱，松井寛.

第八回日本道路会議論文文集，pp.1086-1089,1966.

2015/6/19(金)
理論談話会
2015#6
B4近松京介

目次

目次

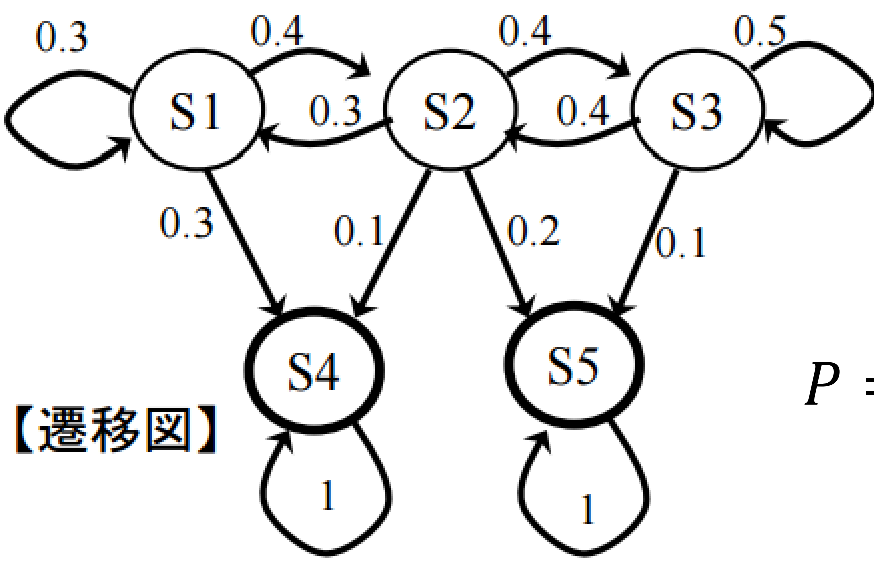
時間的に連続な吸収マルコフ過程

■本章の目的

- 交通流解析のための交通流状態表現として，連続時間吸収マルコフ過程を用いる
- 吸収マルコフ過程の理解
- 連続時間マルコフ過程の導入

吸収マルコフ過程

- 状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
- 終わりの状態＝吸収状態



【遷移図】

$$
P = \begin{array}{c} \\ S4 \\ S5 \\ S1 \\ S2 \\ S3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} S4 & S5 & S1 & S2 & S3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\
0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.4 \\
0 & 0.1 & 0 & 0.4 & 0.5
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

一時的状態: S1, S2, S3
吸収状態: S4, S5

吸収マルコフ過程(既出)

Part 1
Part 2
→ Part 3
Part 4
Part 5

①MCA（マルコフ連鎖配分）

・一般に遷移確率行列は、終点の数をa個、全ノード数をn個として

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & n-a \end{array} \\ \boldsymbol{P} = & \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{I}$:終点の移動を表す単位行列
$\boldsymbol{R}$:終点以外から終点に移る
$\boldsymbol{Q}$:終点以外から終点以外に移る

・実際のネットワークで効いてくるのは行列Q。
起点の数をg個として

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & n-a-g \end{array} \\ \boldsymbol{Q} = & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q_2} \end{pmatrix} \end{array}$$

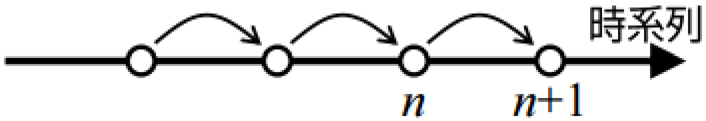
いかなるノードも始点には戻らない
$\boldsymbol{Q_1}$:始点から始点以外に移る
$\boldsymbol{Q_2}$:始点以外から始点以外に移る

連続時間マルコフ過程

■離散時間におけるマルコフ連鎖

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

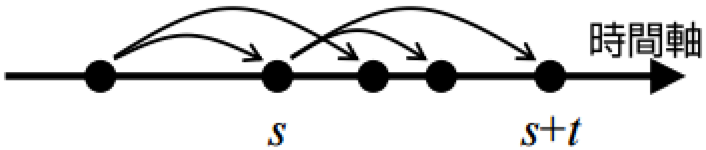
時点nで状態iで，時点$n+1$で状態jへと移る確率は
時点nでの状態iにのみ依存する



■連続時間におけるマルコフ連鎖

$$P(X_{t+s}=j \mid X_s=i, X_{s_n}=i_n, \cdots, X_{s_0}=i_0)=P(X_t=j \mid X_s=i)$$

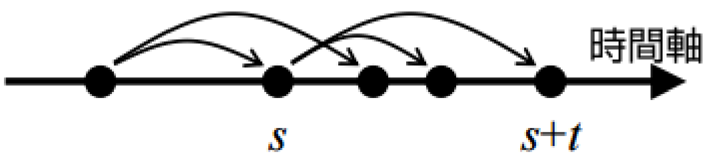
時刻sで状態iで，時刻$s+t$で状態jへ移る確率は
時間差tにのみ依存



連続時間マルコフ過程

■推移確率の導入

- 離散時間マルコフ連鎖では推移確率p_{ij}，すなわち1ステップで状態iから状態jに移動する確率を用いて記述
- 連続時間では1ステップに対応する定まった時間tが存在しない



したがって…

- $t > 0$で以下の推移確率を導入

$$p_t(i,j) = P(X_t = j | X_0 = i).$$

(意味：初期状態iで時刻t時に状態jである確率)

連続時間マルコフ過程

■確率の表記の注意

$p_t(i,j)$：初期状態i，時刻t時で状態jである確率

$p_{ij}(t+\Delta t|t)$：時刻t時に状態iで，時刻$t+\Delta t$時に状態jである確率

連続時間マルコフ過程

$p_t(i,j)$を求めるために方程式を立てたい！
そのために…

■推移確率速度の導入

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t|t) - p_{ij}(t|t)}{\Delta t}$$

q_{ij}の意味：時刻tに状態iから状態jに遷移しようとする速度

■状態iから離れる速度の導入

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \ (= \lambda_i \text{とする})$$

連続時間マルコフ過程

■微分方程式を考えてみる

$$p'_t(i,j) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{t+\Delta t}(i,j) - p_t(i,j)}{\Delta t}$$

元の式は

$$p'_t(i,j)\Delta t = \boxed{p_{t+\Delta t}(i,j) - p_t(i,j)}$$

初期状態iで，時刻t時に状態j以外であり，時刻$t+\Delta t$時には状態jである確率

$p'_{ij}(t)$の意味

「初期状態iで，時刻t時の状態jへ収束する速度」

連続時間マルコフ過程

例）状態１と２があるとする

$p'_{ij}(t)$の意味
「初期状態iで，時刻t時の状態jへ収束する速度」

「初期状態1で，時刻t時の状態1へ収束する速度」

$$p'_t(1{,}1) = q_{12}p_t(2{,}1) - \lambda_1 p_t(1{,}1)$$

「初期状態1で，時刻t時の状態2へ収束する速度」

$$p'_t(1{,}2) = q_{12}p_t(2{,}2) - \lambda_2 p_t(1{,}2)$$

初期状態2の時も同様に考えて整理すると...(次のページ)

連続時間マルコフ過程

$$p_t'(1,1) = q_{12}p_t(2,1) - \lambda_1 p_t(1,1)$$
$$p_t'(1,2) = q_{12}p_t(2,2) - \lambda_2 p_t(1,2)$$
$$p_t'(2,1) = q_{21}p_t(1,1) - \lambda_1 p_t(2,1)$$
$$p_t'(2,2) = q_{21}p_t(1,2) - \lambda_2 p_t(2,2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_t'(1,1) & p_t'(1,2) \\ p_t'(2,1) & p_t'(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & q_{12} \\ q_{21} & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t(1,1) & p_t(1,2) \\ p_t(2,1) & p_t(2,2) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$p'(t) = Qp(t)$$

このＱを微分行列という

このように微分方程式を立てることができ, $p(t)$ を推移確率速度から導くことができる

連続時間マルコフ過程

■微分行列について

$-\lambda_i = q_{ii}$ とする

　λ_iは状態iを離れようとする速度

　q_{ii}はそれと逆向きの速度というイメージ

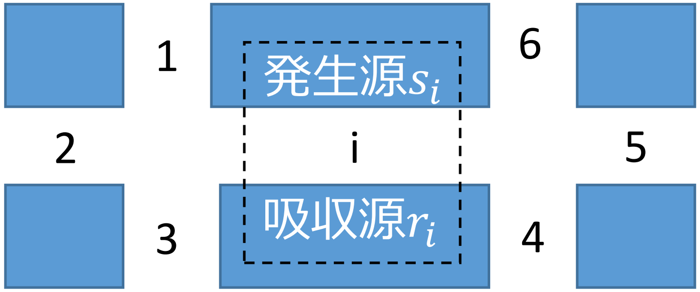
このとき微分行列$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$

$$\sum_j q_{ij} = q_{ii} + \sum_{j \neq i} q_{ij} = -\lambda_i + \lambda_i = 0$$

目次

街路網モデル

右図のような街路を考える



時刻tにおいて街路i上の自動車数を$f_i(t)$で表すと,
点線で囲まれたゾーンについてΔt後のの自動車数は

$$
\begin{aligned}
&f_i(t+\Delta t) \\
&= f_i(t) + \sum_{l=1,\dots,6} p_{li}(t+\Delta t|t) f_l(t) - \sum_{l=1,\dots,6} p_{il}(t+\Delta t|t) f_i(t) \\
&+ p_{s_i i}(t+\Delta t|t) f_{s_i}(t) - p_{i r_i}(t+\Delta t|t) f_i(t)
\end{aligned}
$$

街路網モデル

$p_{il}(t|t) = p_{li}(t|t) = 0$ を利用して式を書き直すと

$$
\begin{aligned}
& f_i(t+\Delta t) - f_i(t) \\
& = \sum_{l=1,\ldots,6} \big(p_{li}(t+\Delta t|t) - p_{li}(t|t)\big) f_l(t) \\
& - \sum_{l=1,\ldots,6} \big(p_{il}(t+\Delta t|t) - p_{il}(t|t)\big) f_i(t) \\
& \quad + \Big(p_{s_i i}(t+\Delta t|t) - p_{s_i i}(t|t)\Big) f_{s_i}(t) \\
& \quad -(p_{ir_i}(t+\Delta t|t) - p_{ir_i}(t|t)) f_i(t)
\end{aligned}
$$

街路網モデル

さらに両辺をΔtで割り， Δtを0に近づけると,

$$\frac{df_i(t)}{dt} = \sum_{l=1,\ldots,6} q_{li}\, f_l(t) - \sum_{l=1,\ldots,6} q_{il}\, f_i(t) + q_{s_i} f_{s_i}(t) - q_{ir_i} f_i(t)$$

$$= \sum_{l=1,\ldots,6} q_{li}\, f_l(t) - \sum_{l=1,\ldots,6,r_i} q_{il}\, f_i(t) + q_{s_i} f_{s_i}(t)$$

街路網モデル

ここで $\sum_{l=1,\ldots,6,r_i,i} q_{il} = 0$ より $-\sum_{l=1,\ldots,6,r_i} q_{il} = q_{ii}$
したがって

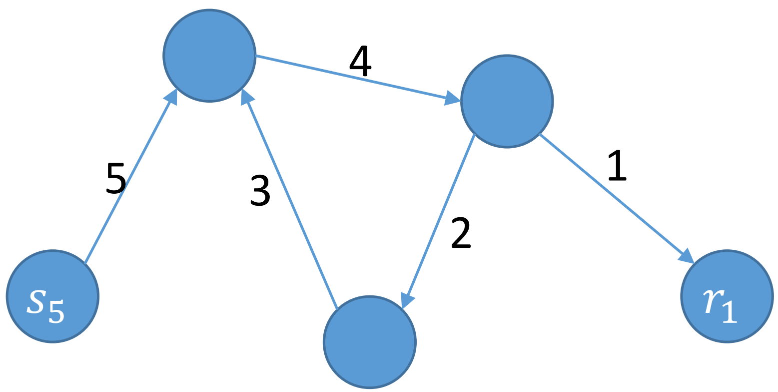
$$\frac{df_i(t)}{dt}$$

$$= \sum_{l=1,\ldots,6} q_{li}\, f_l(t) + q_{ii} f_i(t) + q_{s_i} f_{s_i}(t)$$

$$= \sum_{l=1,\ldots,6,i} q_{li}\, f_l(t) + q_{s_i} f_{s_i}(t)$$

微分方程式完成！！(基本式：$\frac{df_i(t)}{dt} = \sum q_{\gamma i}\, f_\gamma(t)$)

街路網モデル(例)



$q_{s_5 5} = 1$
$q_{54} = 1$
$q_{41} = 1/3$
$q_{42} = 2/3$
$q_{23} = 1$
$q_{1r_1} = 1$

微分方程式を５式立てることができる

- $df_1(t)/dt = q_{41}f_4(t) - q_{1r_1}f_1(t)$
- $df_2(t)/dt = q_{42}f_4(t) - q_{23}f_2(t)$
- $df_3(t)/dt = q_{23}f_2(t) - q_{34}f_3(t)$
- $df_4(t)/dt = q_{34}f_3(t) + q_{54}f_5(t) - q_{41}f_4(t)$
- $df_5(t)/dt = q_{s_5 5}f_{s_5}(t) - q_{54}f_5(t)$

街路網モデル(例)

上記の方程式に，初期値(ex. $f_{s_5}(0) = N, f_1(0) = 0, \ldots$)と発生源に存在する自動車数をex. $f_{s_5}(t) = e^{-t}N$と与えることで連立方程式を解くことができる

もとめたfを時間で無限大まで積分することで通過交通量を求めることができるが，標準化した微分行列を考えれば，離散マルコフ過程のように捉えることもできる

街路網モデル

■標準化された微分行列Q

$$
\begin{array}{c}
 \\ \gamma_1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ S_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\gamma_1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & S_5
\end{array} \\
\left(\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 2/3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

街路網モデル

- 非吸収状態を示す部分をQ^*としたときの$(I - Q^*)^{-1}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & S_5 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
S_5 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1
\end{array}
$$

行列のij成分は，iを出発または通過した車がまわりまわってjを通過する回数の期待値を表している

目次

1．時間的に連続な吸収マルコフ過程

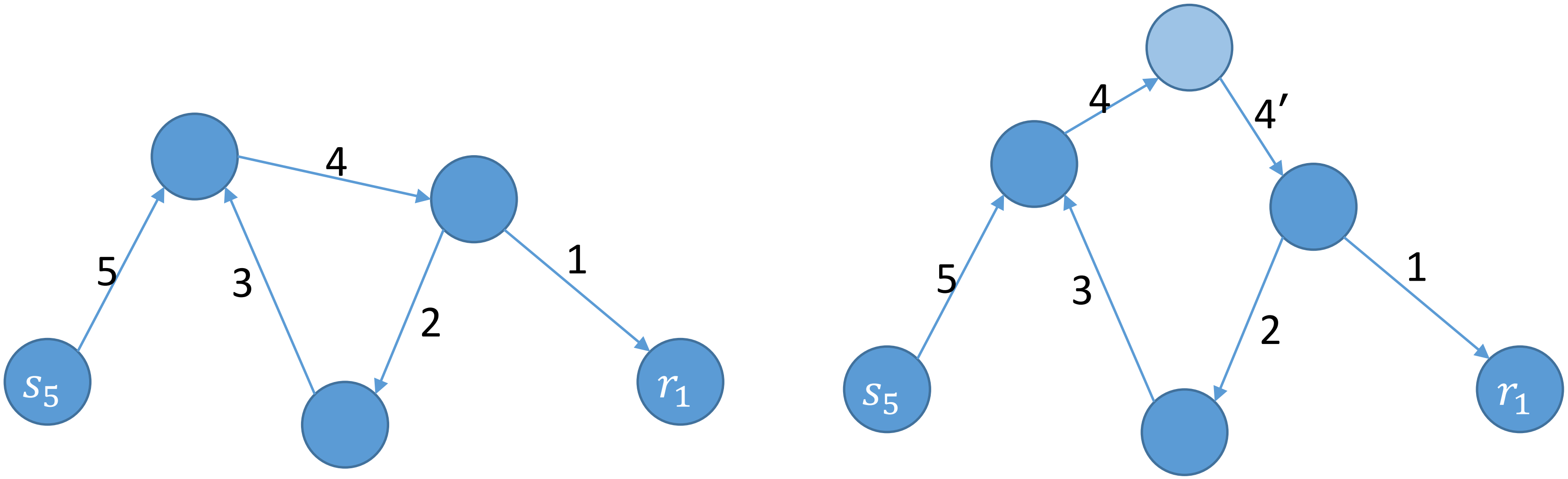
2．街路網モデル

3．交通量分布解析への応用

交通量分布解析への応用

■街路延長を考慮する場合

例）先程の街路網の例で街路4が他街路の2倍の長さ



交通量分布解析への応用

■街路の交通容量を考える場合

$f_i(t)$の代わりに交通量Q_iを用いる

$$Q_i = V_i f_i \qquad V_i = C_1 - C_2 \frac{f_i}{B_i}$$ とすると

$$Q_i = C_1 f_i - \frac{C_2}{B_i} f_i^2$$ となる

あとは基本式を

$$\frac{dQ_i}{dt} = \sum q_{\gamma i} Q_\gamma$$

とすればよい

まとめ

- 連続時間マルコフ過程の考え方
  - 微分行列Q
- 街路網モデルに当てはめてみる
  - (基本式： $\frac{df_i(t)}{dt} = \sum q_{\gamma i}\, f_\gamma(t)$)
- 交通量分布解析への応用
  - 街路延長を考える
  - 交通容量(道路の幅)を考える