

2010年度後期 第3回論文ゼミ

Talluri, K., Ryzin, G.: Revenue Management Under a General Discrete Choice Model of Consumer Behavior, *Management Science*, Vol.50, No.1, pp. 15-33, 2004

M1 齊藤いつみ

目次

1. はじめに
2. 提案モデルの定式化と最適化の考え方
3. Nested allocation policyの最適化
4. 需要モデル
5. 推定方法
6. 数値計算例
7. まとめ

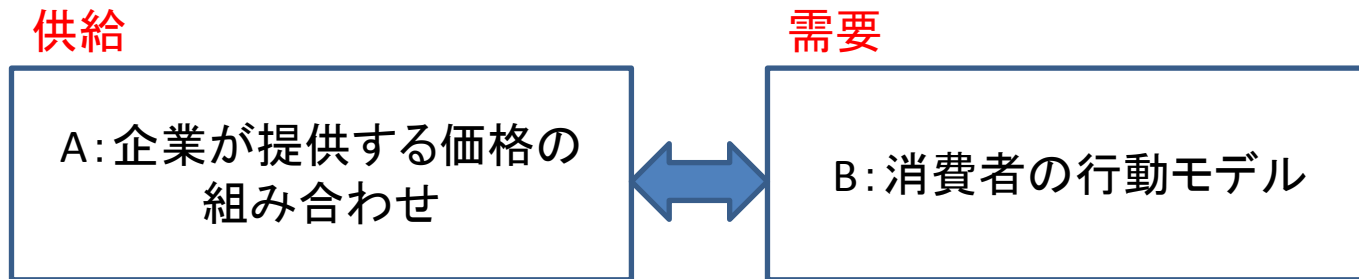
1. はじめに

- Revenue managementは1970年代後半から、航空業界における座席容量と割引価格の適正制御に対するニーズをもとに発達してきた。
- しかし、実際には消費者の行動原理について**アドホックな方法**や、**経験的な方法**で仮定をおいた定式化で、それらの制御が行われてきたのが実情である。
- 特に顧客の行動理論については、buy-upやbuy-downといった行動など、多くが捨象されてきた
 - Buy-up: 安い価格が終了したあとに高い価格で購入すること
 - Buy down: 安い価格が提示されたとき、高い価格で買う代わりに安い価格で購入すること
- 課題として、**どの価格の組み合わせをどのタイミングで提示すれば収益が最大となるのか**という問題がある

1. はじめに

従来のモデルの問題点

従来は需要を静的で独立な関数として与え、供給側の価格設定や収益を考えたり、単純な価格設定と行動モデルの組み合わせたりなど、両者を相互に影響を与えるものとして明示的に扱った理論的な研究はなかった。



本来は相互に影響を与えていると考えられる

2. 提案モデルの定式化

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j + V_{t-1}(x-1)) + (\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t-1}(x) \right\}$$

$V_t(x)$: 時点 t における, 残り容量 x の場合の収益

$N = \{1, \dots, n\}$ (N個の価格の商品が存在する)

$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 0$. (r_j : 選択肢 j によって得られる収益)

$S \subseteq N$ (S は N の部分集合)

$P_0(S)$: 何も選択しない確率



$P_j(S)$: 集合 S の中から選択肢 j を選択する確率

$V_t(x)$

Dead line for sale



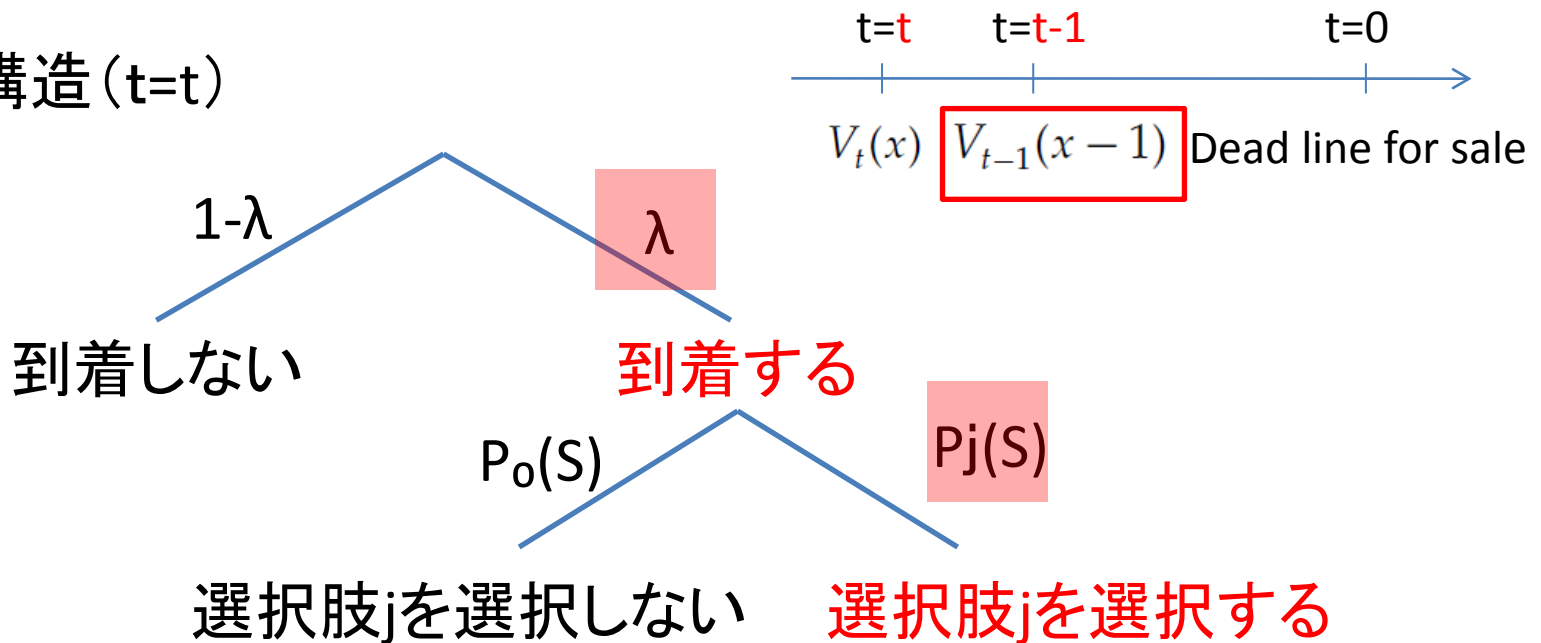
$V_t(x)$ を最大化するような選択モデルのパラメータや価格の組み合わせ S , 到着率 λ を推定することが目標

2. 提案モデルの定式化

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j + V_{t-1}(x-1)) + (\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t-1}(x) \right\}$$

時点 t において選択枝 j を選択する場合

モデル構造 ($t=t$)

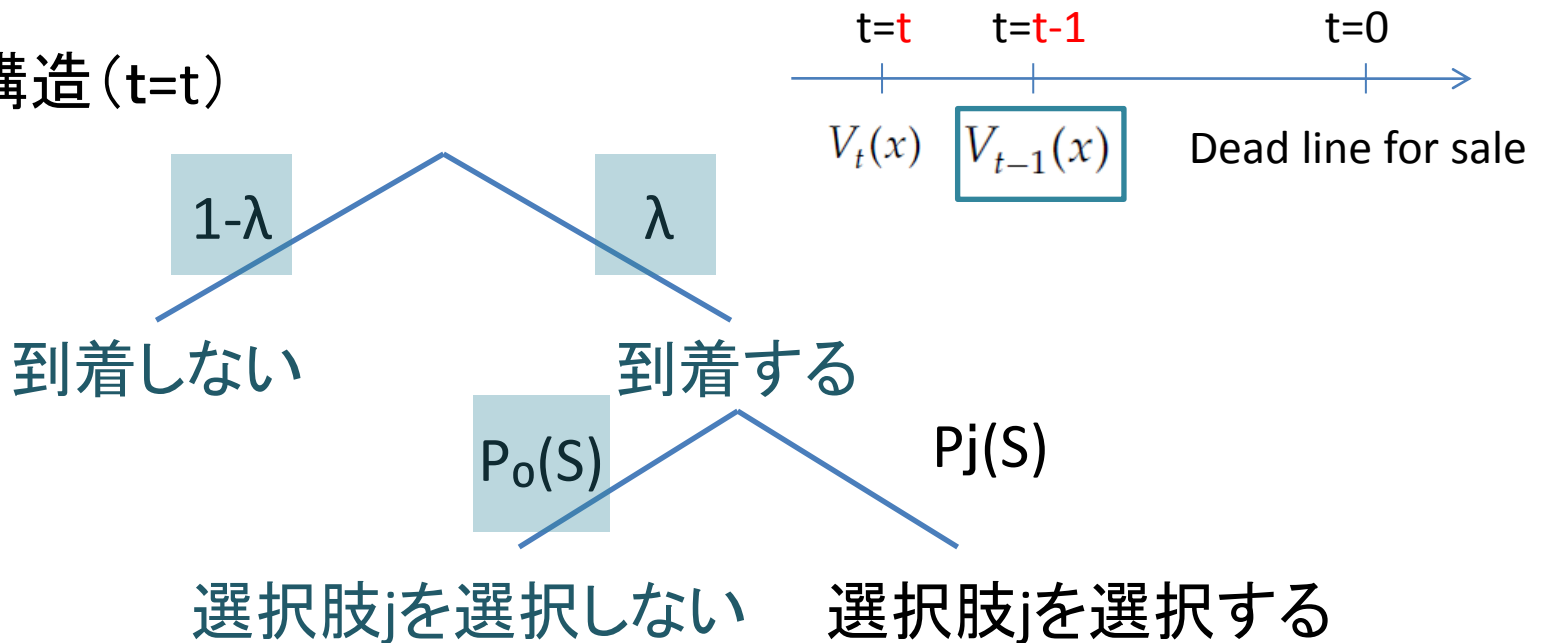


2. 提案モデルの定式化

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j + V_{t-1}(x-1)) + \underbrace{(\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t-1}(x)} \right\}$$

時点 t において選択枝 j を選択しない場合

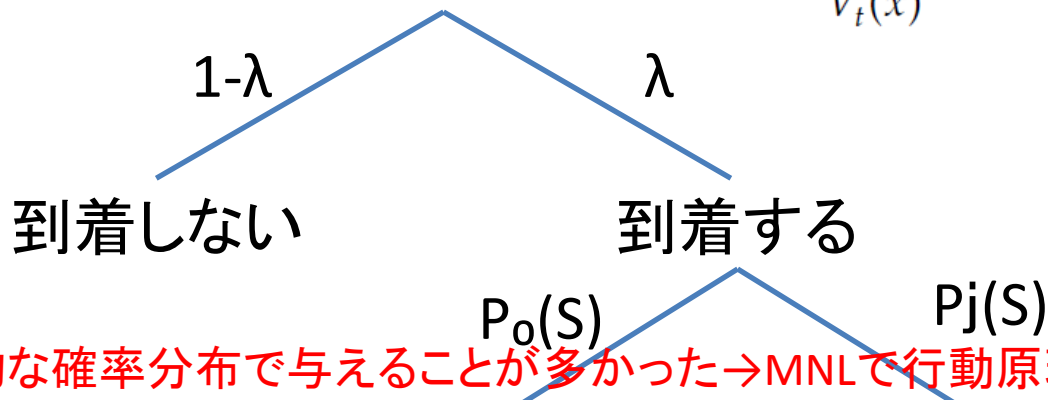
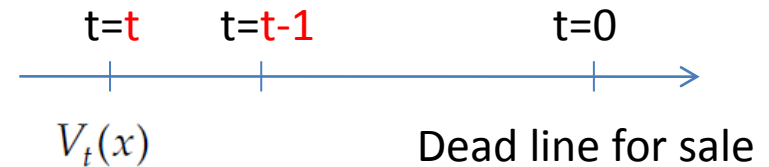
モデル構造 ($t=t$)



2. 提案モデルの定式化

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j + V_{t-1}(x-1)) + (\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t-1}(x) \right\}$$

モデル構造 (t=t)



従来は静的な確率分布で与えることが多かった→MNLで行動原理を仮定

選択枝jを選択しない 選択枝jを選択する

2. 提案モデルの定式化

$$\begin{aligned} V_t(x) &= \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j + V_{t-1}(x-1)) + (\lambda P_0(S) + 1 - \lambda) V_{t-1}(x) \right\} \\ &= \max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{j \in S} \lambda P_j(S) (r_j - \Delta V_{t-1}(x)) \right\} + V_{t-1}(x), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Delta V_{t-1}(x) = V_{t-1}(x) - V_{t-1}(x-1)$$

$$\sum_{j \in S} P_j(S) + P_0(S) = 1.$$

2. 提案モデルの定式化

境界条件は以下の式であらわされる.

$$\begin{aligned} V_t(0) &= 0, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{and} \\ V_0(x) &= 0, \quad x = 1, \dots, C. \end{aligned} \quad (2)$$

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \{ \lambda(R(S) - Q(S)\Delta V_{t-1}(x)) \} + V_{t-1}(x), \quad (3)$$

ここで,

$$Q(S) = \sum_{j \in S} P_j(S) = 1 - P_0(S)$$

$$R(S) = \sum_{j \in S} P_j(S) r_j$$

具体例1: 価格設定

Table 1 **Fare Product Revenues and Restrictions for Example 1**

Fare product (class)	SA stay	21-day adv.	Revenue (\$)
<i>Y</i>	No	No	800
<i>M</i>	No	Yes	500
<i>K</i>	Yes	Yes	450

- ある航空会社の航空運賃について、**3つの異なる価格帯の**商品Y,M,Kを用意する

具体例1: 顧客のセグメンテーション

Table 2 Segments and Their Characteristics for Example 1

Segment	Prob.	Qualifies for restrictions?		Willing to buy?	
		SA stay	21-day adv.	Y class	M class
Bus. 1	0.1	No	No	Yes	Yes
Bus. 2	0.2	No	Yes	Yes	Yes
Leis. 1	0.2	No	Yes	No	Yes
Leis. 2	0.2	Yes	Yes	No	Yes
Leis. 3	0.3	Yes	Yes	No	No

- 5つの異なる顧客層を定義し、それぞれの各商品の選択確率を外生的に与える

具体例1: Q(S), R(S)の計算例

Table 3 Choice Probabilities, $P_j(S)$, Probability of Purchase, $Q(S)$, and Expected Revenue, $R(S)$ for Example 1

S	$P_Y(S)$	$P_M(S)$	$P_K(S)$	$P_0(S)$	$Q(S)$	$R(S)$
$\{\emptyset\}$	0	0	0	1	0	0
$\{Y\}$	0.3	0	0	0.7	0.3	240
$\{M\}$	0	0.4	0	0.6	0.4	200
$\{K\}$	0	0	0.5	0.5	0.5	225
$\{Y, M\}$	0.1	0.6	0	0.3	0.7	380
$\{Y, K\}$	0.3	0	0.5	0.2	0.8	465
$\{M, K\}$	0	0.4	0.5	0.1	0.9	425
$\{Y, M, K\}$	0.1	0.4	0.5	0	1	505

$$V_t(x) = \max_{S \subseteq N} \{ \lambda (R(S) - Q(S) \Delta V_{t-1}(x)) \} + V_{t-1}(x),$$

➡ どの組み合わせ集合Sを選択すべきか

2.1 効率的な価格集合

定義1:

ある価格集合 T が以下の式(4)を満たすような確率 $\alpha(S)$ が存在するとき, 集合 T は効率的ではない. それ以外の場合は効率的である.

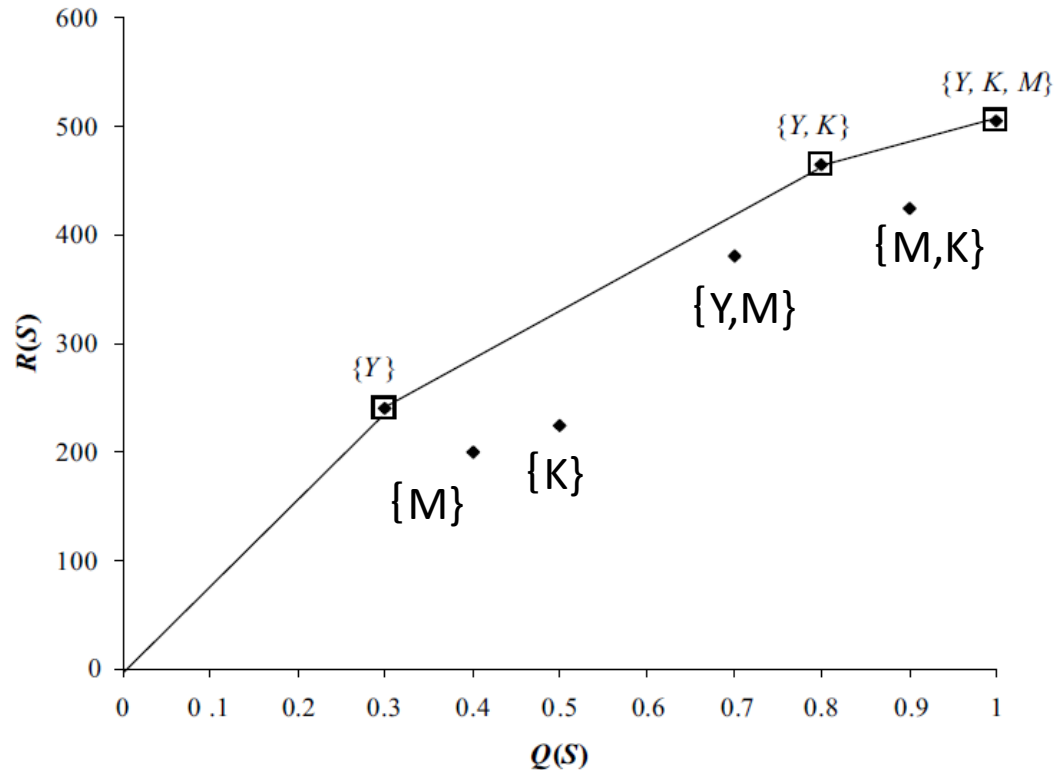
$$Q(T) \geq \sum_{S \subseteq N} \alpha(S)Q(S) \quad \text{and} \quad R(T) < \sum_{S \subseteq N} \alpha(S)R(S). \quad (4)$$

効率的フロンティア:

$$\bar{R}(q) = \max \left\{ \sum_{S \subseteq N} \alpha(S)R(S) : \sum_{S \subseteq N} \alpha(S)Q(S) \leq q, \right. \\ \left. \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) = 1, \alpha(S) \geq 0 \quad \forall S \subseteq N \right\}, \quad (5)$$

2.1 効率的な価格集合

Figure 1 Scatter Plot of $Q(S)$ and $R(S)$ for Example 1 (Efficient Points Enclosed in Squares and Labeled)



提議1: ある価格集合 T が効率的であるのは, ある 0 以上の v に対して次の式を満たす場合である $\max_{S \subseteq N} \{R(S) - vQ(S)\}$.

例1の場合の各集合の効率性

Table 3 Choice Probabilities, $P_j(S)$, Probability of Purchase, $Q(S)$, and Expected Revenue, $R(S)$ for Example 1

S	$P_Y(S)$	$P_M(S)$	$P_K(S)$	$P_0(S)$	$Q(S)$	$R(S)$	Efficient?
$\{\emptyset\}$	0	0	0	1	0	0	Yes
$\{Y\}$	0.3	0	0	0.7	0.3	240	Yes
$\{M\}$	0	0.4	0	0.6	0.4	200	No
$\{K\}$	0	0	0.5	0.5	0.5	225	No
$\{Y, M\}$	0.1	0.6	0	0.3	0.7	380	No
$\{Y, K\}$	0.3	0	0.5	0.2	0.8	465	Yes
$\{M, K\}$	0	0.4	0.5	0.1	0.9	425	No
$\{Y, M, K\}$	0.1	0.4	0.5	0	1	505	Yes

2.2 効率的な組み合わせの抽出法

ここでは効率的な組み合わせの抽出方法として以下の方法があげられている

1) 全ての組み合わせについて、次の式を解く方法

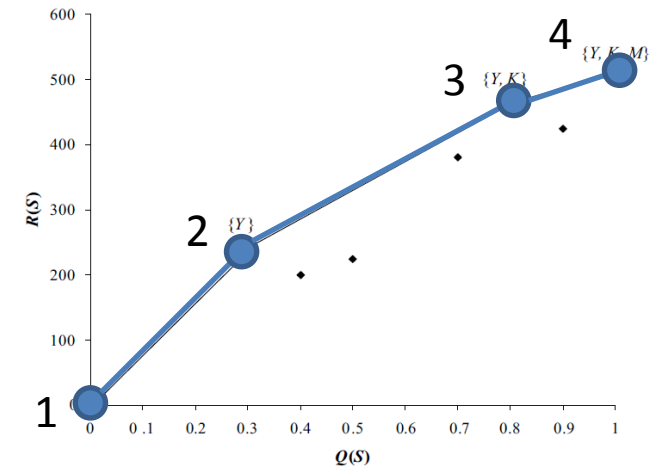
$$\begin{aligned} \max \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) R(S) & \quad \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) = 1, \\ \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) Q(S) \leq Q(T), & \quad \alpha(S) \geq 0, \quad S \subseteq N. \end{aligned}$$

2) 「最大限界収入」の概念を用いる方法

$$\frac{R(S) - R(S_i)}{Q(S) - Q(S_i)} \quad (6)$$

上式が最大となるような点 $(R(S), Q(S))$ を選択する. これを $i=0$ から繰り返し行う

Figure 1 Scatter Plot of $Q(S)$ and $R(S)$ for Example 1 (Efficient Points Enclosed in Squares and Labeled)



2.3 本研究の最適化ルール of 性質

提議3:

もし, m 個の効率的な集合に以下のような不等式を満たすように番号をふるとき, それに対応する $R(S_i)$ も以下のような不等式を満たす.

$$\begin{aligned} Q(S_1) &\leq Q(S_2) \leq \dots \leq Q(S_m), \\ R(S_1) &\leq R(S_2) \leq \dots \leq R(S_m) \end{aligned} \quad (7)$$

このとき, ベルマン方程式(3)は以下のように簡略化することができる.

$$V_t(x) = \max_{k=1, \dots, m} \{ \lambda(R_k - Q_k \Delta V_{t-1}(x)) \} + V_{t-1}(x),$$

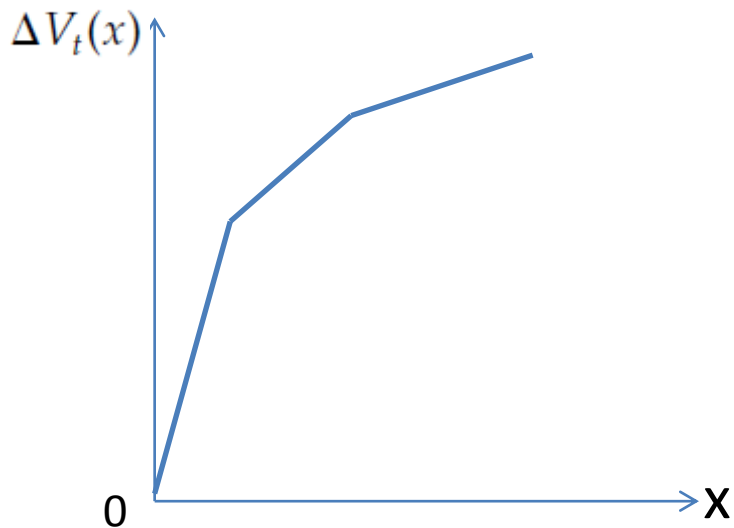
2.3 本研究の最適化ルール の性質

補題4:

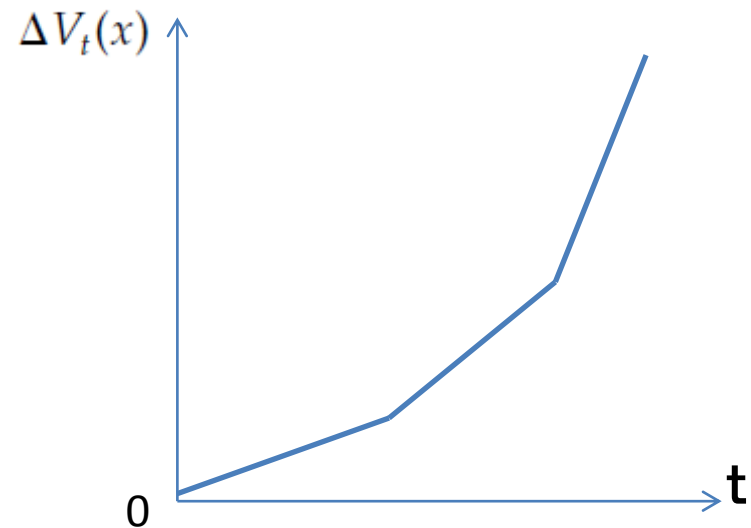
$$\Delta V_t(x) \leq \Delta V_t(x - 1), \quad t = 1, \dots, T, \quad x = 1, \dots, C.$$

補題5:

$$\Delta V_t(x) \geq \Delta V_{t-1}(x), \quad t = 1, \dots, T, \quad x = 1, \dots, C.$$



$\Delta V_t(x)$ は残り容量が小さくなるにつれて、大きくなる



$\Delta V_t(x)$ は残り時間が小さくなるにつれて、小さくなる

2.3 本研究の最適化ルール of 性質

定理1:

(1) 式(4)の最適化とは、効率的な組み合わせの集合 $\{S_k : k = 1, \dots, m\}$ の中から式(4)を最大化する組み合わせ k^* を選択することである。

さらに、 t を固定したとき k^* は残り容量 x に比例して大きくなり、 x を固定すると k^* は残り時間に比例して小さくなる。

例えば、以下のような3つの効率的組み合わせがある場合を考える。

$\{Y\}$, $\{Y, K\}$, $\{Y, M, K\}$

このとき、 $S_1 = \{Y\}$, $S_2 = \{Y, K\}$, $S_3 = \{Y, M, K\}$ である。このとき、式(4)を最大化するような料金提示は以下のようになる。

x が減少するのにともない, $S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$

t が減少する (deadline に近づく) のにともない, $S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$

3.1. General Nested Policies

定義2: nested policyとは

(1)における制御手法は以下のような条件を満たす場合 nested policyとよばれる.

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_m$$

時点 t で残り容量が x のときに $S_{k_t(x)}$ が選択される

Nested allocation policyの定義と特徴

1)Nested protection levels:

$$p_k = \max\{x: R_k - Q_k \Delta V_{t-1}(x) > R_{k+1} - Q_{k+1} \Delta V_{t-1}(x)\},$$
$$k = 1, 2, \dots, m - 1,$$

2)Nested booking limits:

$$b_i = C - p_{k(i)-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

具体例

$$S_1 = \{Y\},$$

$$S_2 = \{Y, K\}$$

$$S_3 = \{Y, K, M\}$$

$$p_k = \max\{x: R_k - Q_k \Delta V_{t-1}(x) > R_{k+1} - Q_{k+1} \Delta V_{t-1}(x)\},$$

$$k = 1, 2, \dots, m-1,$$

1) Nested protection levels:

$$p_0 = 0, p_1 = 3, p_2 = 12, p_3 = 20$$

2) Nested booking limits:

$$b_3 = 20 - 12 = 8$$

$$b_2 = 20 - 3 = 17$$

$$b_1 = 20 - 0 = 20$$

Table 4 Illustration of Nested Policy for Example 1

x	$\Delta V_{t-1}(x)$	$R_k - Q_k \Delta V_{t-1}(x)$			$k_t^*(x)$
		k = 1	k = 2	k = 3	
1	780.00	6.00	-159.00	-275.00	1
2	624.00	52.80	-34.20	-119.00	1
3	520.00	84.00	49.00	-15.00	1
4	445.71	106.29	108.43	59.29	2
5	390.00	123.00	153.00	115.00	2
6	346.67	136.00	187.67	158.33	2
7	312.00	146.40	215.40	193.00	2
8	283.64	154.91	238.09	221.36	2
9	260.00	162.00	257.00	245.00	2
10	240.00	168.00	273.00	265.00	2
11	222.86	173.14	286.71	282.14	2
12	208.00	177.60	298.60	297.00	2
13	195.00	181.50	309.00	310.00	3
14	183.53	184.94	318.18	321.47	3
15	173.33	188.00	326.33	331.67	3
16	164.21	190.74	333.63	340.79	3
17	156.00	193.20	340.20	349.00	3
18	148.57	195.43	346.14	356.43	3
19	141.82	197.45	351.55	363.18	3
20	135.65	199.30	356.48	369.35	3

4.1. Independent Demand Model

従来から利用されてきたモデル. 需要を静的に扱っている.

モデルの特徴

- 顧客はランダムに到着する
- 顧客は利用可能な料金クラスのうち1つのみを希望する
(他に提供されるクラスによって選択確率が変化しない)

$$P_j(S) = \begin{cases} q_j, & j \in S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall S \subseteq N.$$

4.2 Multinomial Logit Choice Model

MNLモデルは交通需要予測やマーケティングの分野で広く用いられているモデルである。ランダム効用理論を用いて、選択肢 j の効用は以下のように表わされる。

$$U_j = u_j + \xi_j,$$

このように効用 U_j を定めたとき、選択肢 j を選択する確率は以下のように求められる。

$$P_j(S) = \frac{e^{u_j}}{\sum_{i \in S} e^{u_i} + e^{u_0}}, \quad j \in S \text{ or } j = 0$$

$$P_j(S) = \frac{w_j}{\sum_{i \in S} w_i + 1}, \quad j \in S \text{ or } j = 0.$$

提示された選択肢集合によって各選択肢の選択確率が変化する

5. 推定

MNLによって以下のように選択肢 j の選択確率を定式化する

$$P_j(S) = P_j(z, \beta, S), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

説明変数 パラメータ 選択肢集合

このとき、時点 t における消費者の到着確率を以下のように定式化する。

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{if customer arrives in period } t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

尤度関数は以下のように定式化される。

$$\prod_{t \in D} [\lambda P_{j(t)}(z, \beta, S(t))]^{a(t)} (1 - \lambda)^{(1-a(t))}. \quad (8)$$

5.1. EMアルゴリズム

対数をとると, 以下のように変形できる

$$\mathcal{L} = \sum_{t \in D} \left[\underbrace{a(t) \ln(P_{j(t)}(z, \beta, S(t)))}_{\text{blue}} + \underbrace{a(t) \ln(\lambda) + (1 - a(t)) \ln(1 - \lambda)}_{\text{orange}} \right]. \quad (9)$$

(9)式は β を含む項と λ を含む項に分解することができる.
以下, EMアルゴリズムによる推定手順を述べる.

Step0: β と λ の初期値を決める $\hat{\lambda} = \frac{1}{|D|} \sum_{t \in D} a(t) = \frac{|A|}{|D|}, \max_{\beta} \sum_{t \in A} \ln(P_{j(t)}(z, \beta, S(t))).$

Step1:Estep

初期値を尤度関数 \mathcal{L} に代入し, \mathcal{L} の期待値 $\mathcal{L}: E[\mathcal{L} | \hat{\beta}, \hat{\lambda}]$ を求める.

Step2:Mstep

step1で求めた期待値を最大にする β と λ を求める.

Step3:Estep,Mstepを β と λ の値が収束するまで繰り返す.

6. 数値計算例

- 今回提案したモデルと従来の方法 (EMSR-b モデル) の比較を数値計算によって行う.
- シミュレーション1:
需要は外生的に与え, 提示料金の組み合わせ方法の違いによる収益の差を比較する
- シミュレーション2:
需要について選択モデルを導入することで, 最適な料金の組み合わせと選択モデルのパラメータを同時に推定し, 収益を比較する.

6.1. EMSR-bモデル

- EMSR-bモデルではprotection level x_j を以下のようにヒューリスティックに決定している

$$r_{j+1} = \bar{r}_j P(\bar{X}_j > x_j), \quad \bar{r}_j = \frac{\sum_{i=1}^j r_i \hat{\mu}_i}{\sum_{i=1}^j \hat{\mu}_i}.$$

\bar{X}_j は, $\sum_{i=1}^j \hat{\mu}_i$ を平均, $\sum_{i=1}^j \hat{\sigma}_i^2$ を分散とする標準正規分布である.

6.2. シミュレーション例1

- 例1のデータを用いて, choice basedの最適化コントロール手法と従来のEMSR-b手法の比較を行う.
 - 提示料金の組み合わせが異なる
 - choice based: $\{Y\}, \{Y,K\}, \{Y,M,K\}$
 - EMSR: $\{Y\}, \{Y,M\}, \{Y,M,K\} \Rightarrow$ fare orderd
- 容量 $C=15,20,25$ の3通りとする
- 需要の分布は他の選択肢によらず**外生的**に与える.

6.2.1. 需要分布の設定

Table 6 Segment Choices in Example 1 If All Products Are Open and Resulting Demand for Population Size of 20

Segment	%	SA stay	21-day adv.	Can buy Y?	Can buy M?	Eligible for K?	Choice	Mean	Var.
Bus. 1	0.1	No	No	Yes	N.E.	N.E.	Y	2	1.8
Bus. 2	0.2	No	Yes	Yes	Yes	N.E.	M	4	3.2
Leis. 1	0.2	No	Yes	No	Yes	N.E.	M	4	3.2
Leis. 2	0.2	Yes	Yes	No	Yes	Yes	K	4	3.2
Leis. 3	0.3	Yes	Yes	No	No	Yes	K	6	4.2

Note. N.E. signifies the segment is not eligible.

まず、各顧客のセグメントごとに需要の分布(平均値と分散)を与える。(table6)
上記を足し合わせることで、各クラスの需要の分布を求める。(table7)

Table 7 Inputs to the EMSR-b Model

Class	Mean	SD	Buy-up factors
Y	2	1.34	
M	8	2.52	0.33
K	10	2.72	0.40

Buy-up factors : 価格の低いクラスがなくなったときに、次に価格の高いクラスの商品を選択する確率

6.2.2. 推定結果

Table 9 Simulation Results Comparison Between the Choice Dynamic Program and the EMSR-b Model with Buy-up

Population size	EMSR-b revenue	Choice DP revenue	% gain from choice DP	99% conf. int. error on % gain
15	7,466	7,466		
20	9,825	10,129	3.10	±0.0050
25	10,142	11,301	11.48	±0.0079

人口が多い場合(需要が密な場合)で収益の差が大きくなっている。

6.3. シミュレーション例2

- 例1では, 需要のパラメータをヒューリスティックに与えた.
- ここでは需要についてMNLモデルを用いることでパラメータ推定と最適化の両方を評価する.

条件:

- 容量 $C=185$ とし, 10個の料金クラスを考える.
- 簡単のため, MNLにおける変数は料金 x のみとする
→各選択肢の効用は
$$w_j^L = e^{\beta^L x} \text{ (Low Price sensitivity)}$$
$$w_j^H = e^{\beta^H x} \text{ (High Price sensitivity)}$$
と書ける.
- 旅客の到着率 $\lambda = 0.5$ とする

6.3.1. 各選択肢の効用値と推定結果

Table 10 Fares and w_j Values for Example 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_j	600	550	475	400	300	280	240	200	185	175
w_j^L	0.407	0.438	0.490	0.549	0.638	0.657	0.698	0.741	0.758	0.769
w_j^H	0.050	0.064	0.093	0.135	0.223	0.247	0.301	0.368	0.397	0.417

Table 11 Simulation Results

	Low price sensitivity		High price sensitivity	
	Choice DP	EMSR-b buy-up	Choice DP	EMSR-b buy-up
Average revenue	68,373	61,049	36,507	36,414
Load factor (%)	74	90	72	77

- **Low price sensitivity**の場合で収益の差が大きくなっている
- Load factor (乗車/座席数)はChoice DPの方が小さい
 → choice-based DPでは、**消費者が高い方の価格で買うように**各価格の割り当てをコントロールしている

7.まとめ

- 価格の組み合わせとそれぞれの価格で売ることのできる容量の上限であるnested protection levelを需要から求めた
- 価格の組み合わせについて, fared orderedでない方が収益が大きくなる場合があることを示した.
- 需要モデルと価格設定の基準, 収益最大化を入れ子構造で扱うモデルの枠組みを示した.