Paramet Luathep, Agachai Sumalee, William H. K. Lam, Zhi-Chu Li, Hong K. Lo

Global optimization method for mixed transportation network design problem A mixed-integer linear programming approach

transportation research part B, pp. 808-827, 2011.

理論談話会　6/28(Sat)

今泉 孝章　M2

この論文でやること

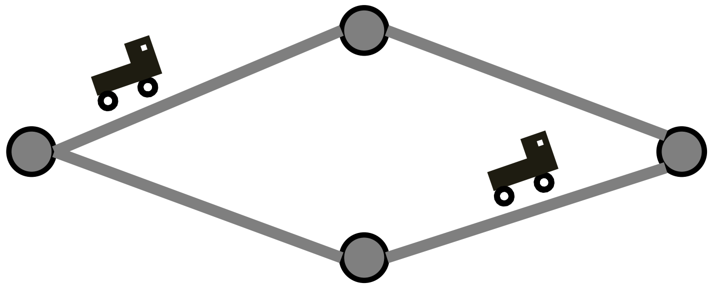
〇利用者均衡条件をリンクフローの実行可能領域の有限の端点の凸結合の形で再定式化する.→既存アルゴリズムによる解法が可能になる

〇関数を線形化することで緩和問題を解き原問題の上界を得る.

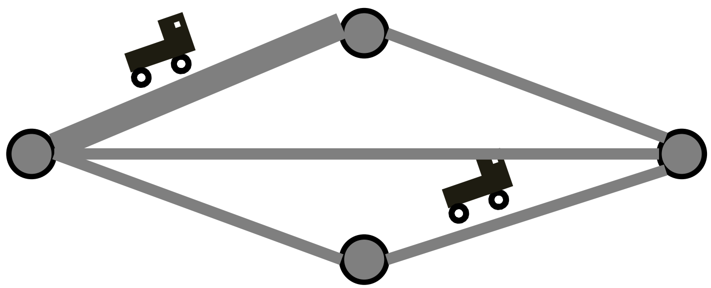
〇テストネットワークで数値計算を行う.

導入

ネットワークデザイン問題 (NDP)



増加する交通需要や混雑問題に対処するために, 限られた財源で道路のパフォーマンス(道路幅員の増加や新道路の敷設)を変化させる.



このとき利用者均衡条件(UEあるいはSUE)が成立している.

ネットワークデザイン問題(NDP)

ネットワークデザイン問題は一般に以下の3つに分類される.

〇CNDP

連続ネットワークデザイン問題. 存在するリンクの最適なキャパシティを決定する際にキャパシティを連続量として扱う.

〇DNDP

離散ネットワークデザイン問題. 新しい道路を敷設する際, 候補リンクを0-1の離散変数として扱う.

〇MNDP

混合ネットワークデザイン問題. CNDPとDNDPを同時に扱う.

NDPは一般に利用者均衡が成立していることが条件の一つとなっているので, 均衡制約付き数理計画問題(MPEC)として定式化される.

変数の定義

$\mathbf{G}=(\mathbf{N},\mathbf{A})$: ノード集合 $\mathbf{N}$ とリンク集合$\mathbf{A}$ から成るネットワーク.

$\mathbf{O}$: 起点ノードの集合 $\mathbf{O}\in\mathbf{N}$

$\mathbf{D}$: 終点ノードの集合 $\mathbf{D}\in\mathbf{N}$

o : 起点ノード $o\in\mathbf{O}$

d : 終点ノード $d\in\mathbf{D}$

od : 起点, 終点ノードのペア

a : リンク $a\in\mathbf{A}$

q^{od} : ODペア od の旅行需要. ここでは所与.

$\mathbf{q}^{od}$:ODペアの旅行需要に関する $\mathbf{N}\times 1$ ベクトル. それぞれの要素には起点ノードの場合は, q^{od} ,終点ノードの場合は $-q^{od}$,それ以外は0.

Λ : $\mathbf{N}\times\mathbf{A}$ のノード, リンクの行列

: ノードn がリンクa の終点の場合 $\delta_a^n=1$
ノードn がリンクa の起点の場合 $\delta_a^n=0$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\delta_1^1 & \cdots & \delta_a^1\\ \cdot & & \cdot\\ \delta_1^n & \cdots & \delta_a^n\end{pmatrix}$$

変数の定義

$\mathbf{A_1}$: 拡張しないリンクの集合 $\mathbf{A_1} \in \mathbf{A}$

$\mathbf{A}_2$: 拡張するリンクの集合 $\mathbf{A}_2 \in \mathbf{A}$

$\mathbf{A}_3$: 新しく加える候補のリンクの集合 $\mathbf{A}_3 \in \mathbf{A}$

v_a^{od} : ODペア od 間の交通によるリンク a の交通量.

$\mathbf{v}_a^{od}$: v_a^{od} のベクトル

x_a : リンク a の交通量

y_a^0 : 現存するリンク $a \in A_1 \cup A_2$ の元の容量.

y_a : 拡張するリンク $a \in A_2$ の増加させる容量

y_a' : 新しく加える候補リンク $a \in A_3$ の固定された容量

$t_a(x_a)$: 拡張しないリンクに関する旅行時間関数. $a \in A_1$

$t_a(x_a, y_a)$: 拡張するリンクに関する旅行時間関数. $a \in A_2$

$t_a(x_a, y_a')$: 新しく加える候補のリンクに関する旅行時間関数. $a \in A_3$

$g(y_a)$: リンク a を y_a だけ拡張するときのコスト関数. $a \in A_2$

変数の定義

c_a ：リンク a のキャパシティあたりの改善費用. $a \in \mathbf{A}_2$

d_a ：リンク当たりの敷設費用. $a \in \mathbf{A}_3$

χ_a ：リンクa が敷設されるとき1, そうでなければ0の0-1変数. $a \in \mathbf{A}_3$

$\bar{x}_a$ ：リンク aが敷設されるときの最大許容フロー数

$\bar{y}_a$ ：リンクのキャパシティを拡張するときの上限値 $a \in \mathbf{A}_2$

MNDPの定式化

$$\min_{x\in\Omega,y,\chi} Z_{MNDP} = \sum_{a\in\mathbf{A}_1} x_a t_a(x_a) + \sum_{a\in\mathbf{A}_2} x_a t_a(x_a, y_a) + \sum_{a\in\mathbf{A}_3} x_a t_a(x_a) \quad \textbf{(1)}$$

目的関数= ネットワークの総旅行時間

$$\sum_{a\in\mathbf{A}_2} g_a(y_a) + \sum_{a\in\mathbf{A}_3} d_a \chi_a \le budget \quad \textbf{(2)}$$ 拡張費用+敷設費用は予算を超えない

$$x_a \le \chi_a \bar{x}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}_3 \quad \textbf{(3)}$$ リンクの最大許容フロー数を超えない.

$$\underline{y}_a \le y_a \le \bar{y}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}_2 \quad \textbf{(4)}$$ リンクを拡張する際の領域.

$$\chi_a = \{0,1\} \quad \textbf{(5)}$$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid x_a = \sum_{o\in\mathbf{O}} \sum_{d\in\mathbf{D}} v_a^{od}, \Lambda \cdot \mathbf{v}^{od} = \mathbf{q}^{od}, v_a^{od} \ge 0, \forall a \in \mathbf{A}, o \in \mathbf{o}, d \in \mathbf{D} \right\} \quad \textbf{(6)}$$

OD需要を満たすようにリンクフローが定義されるということ

(2)～(6)の制約式+**利用者均衡の条件**

変分不等式を用いた利用者均衡条件

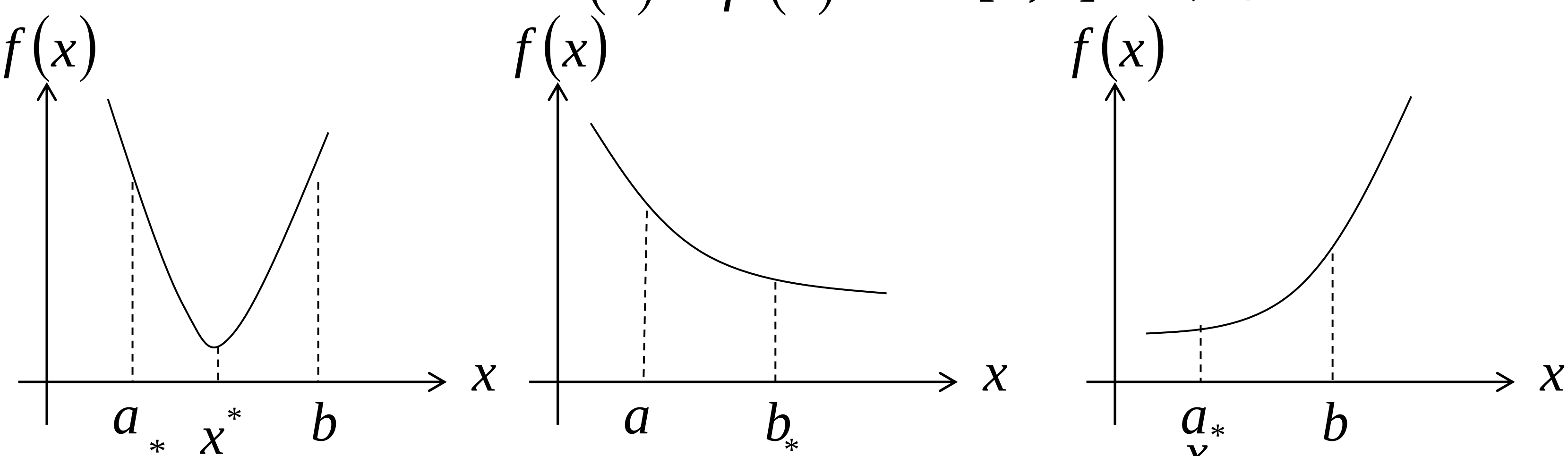
集合 $S \in R^n$ とベクトル値関数 $F: R^n \to R^n$ が与えられたとき, 条件

$$x \in S \qquad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in S$$

を満たすベクトル $x \in R^n$ を求める問題を変分不等式問題という.

これは凸関数 $f(x)$ の最小化問題と同様の意味をもつ.

$F(x) = f'(x)$ 　$S = [a, b]$ とする



$x = x^*$ 　$F(x)(y - x) = 0$

$x = b$ 　$F(x)(y - x) > 0$

$x = a$ 　$F(x)(y - x) > 0$

変分不等式を用いた利用者均衡条件

$\sum_{a \in \mathbf{A}} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$ を最小化する問題 $\rightarrow F(\bullet) = \sum_{a \in \mathbf{A}} t_a(x_a)$

従って変分不等式を用いると最小化問題は以下の式(7)のように書ける.

$$\sum_{a \in \mathbf{A}} t_a(x_a^*) \cdot (x_a^* - x_a) \leq 0, \ \forall x_a \in \Omega \quad \textbf{(7)}$$

Ω は線形等式制約で構成されるから, 多面体である.

$\mathbf{S}$ を多面体 Ω の端点とし, $s \in \mathbf{S}$ とすると, 全ての x_a は端点の要素 s の凸結合

つまり, $x_a = \sum_{s \in \mathbf{S}} \lambda_s x_a^s$ で表される. このとき x_a^s は s 番目の端点, λ_s は

0から1の間の係数で $\sum_{s \in \mathbf{S}} \lambda_s = 1, \ 0 \leq \lambda_s \leq 1$ である.

このとき以下の式(8)が成り立つ.

$$\sum_{a \in \mathbf{A}} t_a(x^*) \cdot (x_a^* - x_a^s) \leq 0, \ \forall s \in \mathbf{S} \quad \textbf{(8)}$$

変分不等式を用いた利用者均衡条件

このとき以下の式(9)が成り立つ.

$$\sum_{a\in\mathbf{A_1}} t_a\left(x_a^*, y_a\right)\cdot\left(x_a^* - x_a^s\right) + \sum_{a\in\mathbf{A_2}} t_a\left(x_a^*\right)\cdot\left(x_a^* - x_a^s\right)$$

$$+\sum_{a\in\mathbf{A_3}}\left[t_a\left(x_a^*, y_a'\right) + \left(1-\chi_a\right)U\right]\cdot\left(x_a^* - x_a^s\right) \le 0,\quad \forall s\in\mathbf{S} \qquad \textbf{(9)}$$

$a\in\mathbf{A_3}$ については, ネットワークに新しくリンクを加えるとリンクフローの実行可能領域が変化するので, 全てネットワーク上にあるとする.

$\left(1-\chi_a\right)U$ のU は極めて大きな数であり, リンク a がネットワークに加えられるなら $\left(\chi_a = 1\right)$ $\left(1-\chi_a\right)U = 0$ となり, そのリンクの旅行時間は $t_a\left(x_a^*, y_a'\right)$ となる.

一方リンク a がネットワークに加えられないなら,$\left(\chi_a = 0\right)$ そのリンクの旅行時間は U で非常に大きくなるため利用されることはない.

以上制約式(2)～(9)のもとで目的関数(1)を最小化する問題を考える.

非線形関数の線形化

先ほど定式化した最適化問題はリンク旅行時間関数と, リンク総旅行時間関数が非線形であるから, 非線形計画問題である. また, $\chi_a x_a$ は双線形である.

従って関数の非線形性を取り除くため線形化を行う.

今, $\bar{t}_a = x_a t_a,\ a \in \mathbf{A}$, $\varphi_a = \chi_a x_a,\ a \in \mathbf{A_3}$ とおくと問題(1)～(9)は次のように書きなおせる.

$$\boxed{\min_{x\in\Omega, y, \chi} Z_{MNDP-2} = \sum_{a\in\mathbf{A}} \bar{t}_a} \quad \textbf{(10-1)}$$

$$\sum_{a\in\mathbf{A_2}} g_a(y_a) + \sum_{a\in\mathbf{A_3}} d_a \chi_a \le budget \quad \textbf{(10-2)} \quad \rightarrow \sum_{a\in\mathbf{A_2}} g_a(y_a) = c_a y_a$$

$$\bar{t}_a = x_a t_a(x_a),\ \forall a \in \mathbf{A_1} \quad \textbf{(10-3)}$$

$$\bar{t}_a = x_a t_a(x_a, y_a),\ \forall a \in \mathbf{A_2} \quad \textbf{(10-4)}$$

$$\bar{t}_a = x_a t_a(x_a, y'_a),\ \forall a \in \mathbf{A_3} \quad \textbf{(10-5)}$$

$$\varphi = \chi_a x_a \quad \textbf{(10-6)}$$

非線形関数の線形化

続き

$$x_a \le \chi_a \bar{x}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}_3 \qquad \textbf{(10-7)}$$

$$y_a \le y_a \le \bar{y}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}_2 \qquad \textbf{(10-8)}$$

$$\chi_a = \{0,1\} \qquad \textbf{(10-9)}$$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid x_a = \sum_{o \in \mathbf{O}} \sum_{d \in \mathbf{D}} v_a^{od}, \Lambda \cdot \mathbf{v}^{od} = \mathbf{q}^{od}, v_a^{od} \ge 0, \forall a \in \mathbf{A}, o \in \mathbf{o}, d \in \mathbf{D} \right\} \textbf{(10-10)}$$

$$\sum_{a \in \mathbf{A}_1} \left[\bar{t}_a - x_a^s t_a(x_a) \right] + \sum_{a \in \mathbf{A}_2} \left[t_a - x_a^s t_a(x_a, y_a) \right] + \sum_{a \in \mathbf{A}_3} \left\{ \bar{t}_a + (x_a - \varphi_a) U - x_a^s \left[t_a(x_a, y'_a) + (1 - \chi_a) U \right] \right\} \le 0, \quad \forall s \in \mathbf{S}$$

(10-11)

非線形関数の線形化

まずは旅行時間, 総旅行時間の関数の線形化を行う.

〇拡張しないリンクについて $a \in \mathbf{A_1}$

$$t_a(x_a) = t_a^0 + b_a \left(\frac{x_a}{y_a^0} \right)^{n_a} \qquad \bar{t}_a(x_a) = t_a^0 x_a + b_a{}^{n_0} \frac{(x_a)^{n_a+1}}{(y_a^0)^{n_a}} \qquad \textbf{(11)}$$

〇拡張するリンクについて $a \in \mathbf{A_2}$

$$t_a(x_a, y_a) = t_a^0 + b_a \left(\frac{x_a}{y_a^0 + y_a} \right)^{n_a} \qquad \bar{t}_a(x_a, y_a) = t_a^0 x_a + b_a \frac{(x_a)^{n_a+1}}{(y_a^0 + y_a)^{n_a}} \qquad \textbf{(12)}$$

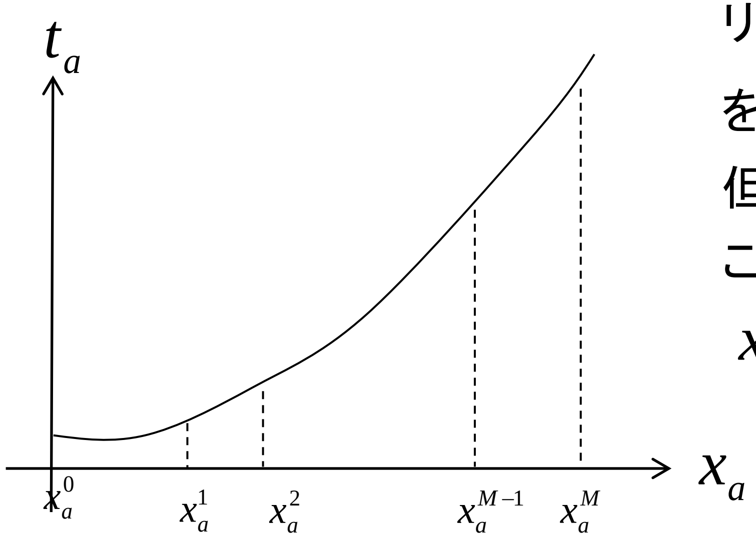
〇新設候補リンクについて $a \in \mathbf{A}_3$

$$t_a(x_a) = t_a^0 + b_a \left(\frac{x_a}{y_a'} \right)^{n_a} \qquad \bar{t}_a(x_a) = t_a^0 x_a + b_a \frac{(x_a)^{n_a+1}}{(y_a')^{n_a}} \qquad \textbf{(13)}$$

t_a^0 は自由流旅行時間. b_a, n_a はパラメータ.

非線形関数の線形化

リンク $a \in \mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_3}$ の旅行時間の関数は x_a について非線形



リンク交通量を $\left[x_a^0, x_a^M\right]$ の範囲に限定し, この範囲を M 個の小さな区間 $\left[x_a^{m-1}, x_a^m\right]$ に分ける.

但し, $m = 1,\ldots, M$

この区間は等間隔である必要はない.

$x_a^0 = 0$, x_a^M は想定される交通量より十分大きな値なので, ネットワーク上の全交通量に設定する.

$t_a^m = t\left(x_a^m\right)$ $\bar{t}_a^m = \bar{t}_a\left(x_a^m\right)$

κ_a^m : $x_a \geq x_a^{m-1}$ ならば1, そうでなければ0の0-1変数とする.

λ_a^m : x_a と x_a^{m-1} の距離をあらわす連続変数. $x_a \geq x_a^m$ ならば $\lambda_a^m = x_a^m - x_a^{m-1}$

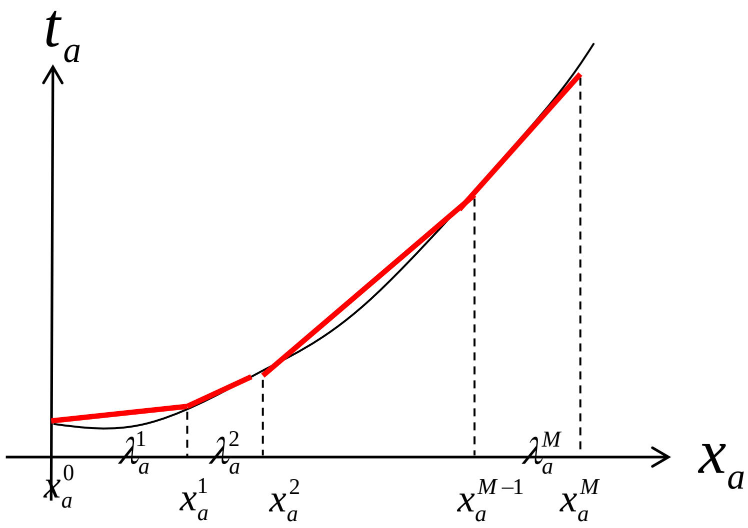
そうでなければ $\lambda_a^m = x_a - x_a^{m-1}$

以上の定義をもとに目的関数を**区分線形化**する.

非線形関数の線形化

$$t_a = t_a^0 + \sum_{m=1}^{M} \frac{t_a^m - t_a^{m-1}}{x_a^m - x_a^{m-1}} \lambda_a^m \qquad \bar{t}_a = \bar{t}_a^0 + \sum_{m=1}^{M} \frac{\bar{t}_a^m - \bar{t}_a^{m-1}}{x_a^m - x_a^{m-1}} \lambda_a^m \qquad x_a = x_a^0 + \sum_{m=1}^{M} \lambda_a^m$$

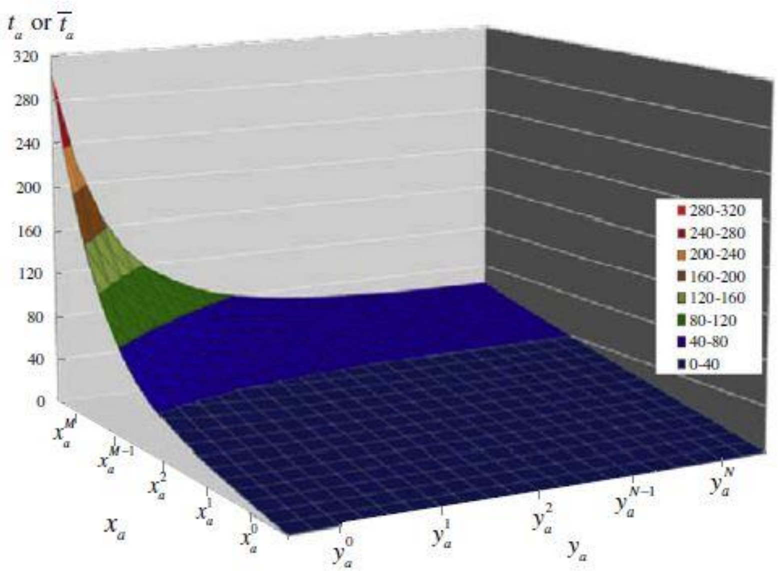
x_a がある区間までは各区間ごとの長さが$x_a^m - x_a^{m-1}$ になり, x_a があるところまでくると $x_a - x_a^{m-1}$ が長さとなり, そのときの傾きの分だけ足しこまれることになる.



非線形関数の線形化

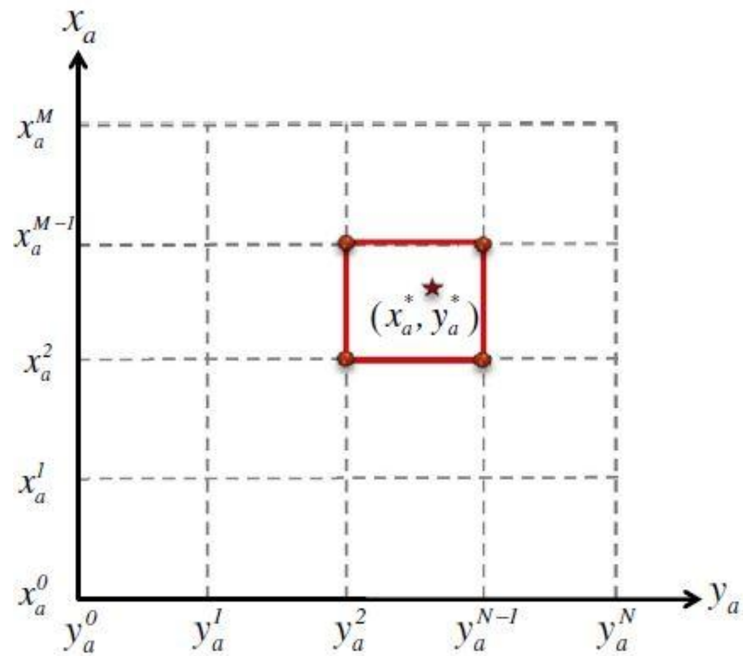
リンク $a \in \mathbf{A}_2$ の旅行時間の関数はx_a, y_a について非線形

$$t_a(x_a, y_a) = t_a^0 + b_a\left(\frac{x_a}{y_a^0 + y_a}\right)^{n_a}$$



$M \times N$ のグリッドに分ける

格子の4点の内分点という形で
近似する.



非線形関数の線形化

ここで, 多くても一つが正で, それ以外は0の特別な変数(special order set of variables) SOS1を定義する.

x_a, y_a それぞれについて $\mu_a^m \in [0,1],\ \forall m = 1,\dots,M$, $\nu_a^m \in [0,1],\ \forall n = 1,\dots,N$ とする.

この近似では四角形の頂点4つの点の $t_a^{m,n}$ の凸結合で表される.

$\gamma_a^{m,n}$ を点 $\left(x_a^m, y_a^n\right)$ の凸結合の際の係数とするとこれは以下の式(14),(15)で定義される

$$\sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{0,n} \le \mu_a^1$$

$$\sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} \le \mu_a^m + \mu_a^{m+1},\ \forall m = 1,\dots,M-1 \quad \textbf{(14)}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{M,n} \le \mu_a^M$$

$$\sum_{m=0}^{M} \gamma_a^{m,0} \le \nu_a^1$$

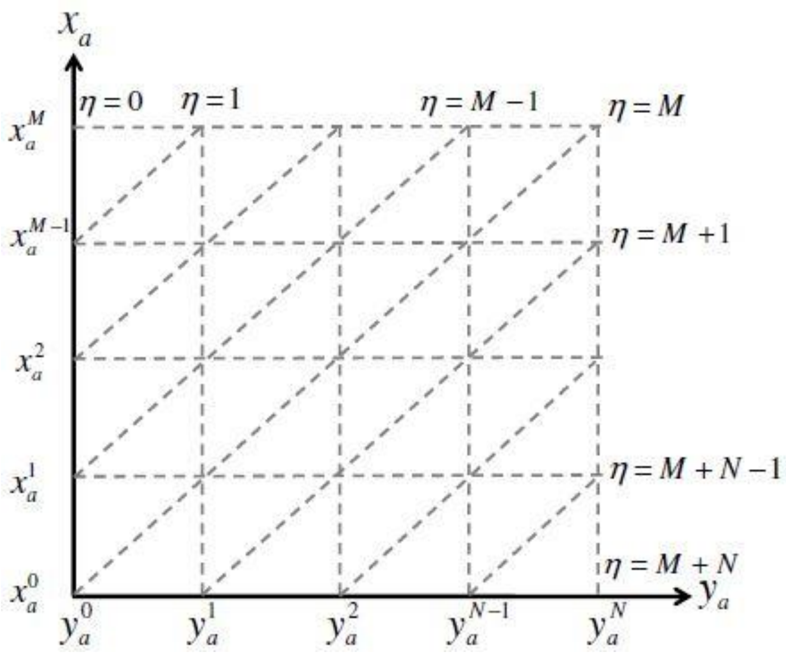
$$\sum_{m=0}^{M} \gamma_a^{m,n} \le \nu_a^m + \nu_a^{m+1},\ \forall m = 1,\dots,N-1 \quad \textbf{(15)}$$

$$\sum_{m=0}^{M} \gamma_a^{m,N} \le \nu_a^N$$

$\mu_a^m > 0$ のとき $\sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} \le \mu_a^m$, $\sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m-1,n} \le \mu_a^m$ でそれ以外の $\gamma_a^{m,n}$ は必ず0になる

ただ,これだと係数が一意に決まらない.

非線形関数の線形化



対角線を $\eta(\eta=0,\ldots,M+N)$ とする. このときある点 (x_a^m, y_a^n) は $(x_a^m, y_a^{m-M+\eta})$ と表される. ここで, 多くても二つが非負の場合は連続する変数特別な変数(SOS2)の集合を Γ_a^η とする.

$$\Gamma_a^\eta = \sum_{m=0}^{M} \gamma_a^{m,m-M+\eta},\ \ \forall \eta \in \{0,\ldots,M,M+1,\ldots,M+N\}$$

$$\sum_{\eta} \Gamma_a^\eta = 1$$

このように定義することで隣接する格子点の内分点の形で近似することができる.

非線形関数の線形化

リンク $a \in \mathbf{A_2}$ の旅行時間の関数は以下の式(16)のように近似される

$$t_a = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} \cdot t_a^{m,n}\left(x_a^{m,n}, y_a^n\right),\ \bar{t}_a = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} \cdot \bar{t}_a^{m,n}\left(x_a^{m,n}, y_a^n\right) \qquad \textbf{(16)}$$

$$x_a = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} x_a^m,\ \ y_a = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} y_a^n$$

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \gamma_a^{m,n} = 1,\ \ \gamma_a^{m,n} \in [0,1],\ \ \forall m = 0,\dots,M,\ \ n = 0,\dots,N$$

非線形関数の線形化

次に $\varphi_a = \chi_a x_a,\ a \in \mathbf{A_3}$ を線形に緩和する.

$x_a^L \le x_a \le x_a^U,\ \chi_a^L \le \chi_a \le \chi_a^U$ とすると

φ_a の凸包(集合の境界線)は以下のように定義できる.

$$\varphi_a \ge x_a \chi_a^L + x_a^L \chi_a - x_a^L \chi_a^L \qquad \varphi_a \ge x_a \chi_a^L + x_a^L \chi_a - x_a^L \chi_a^L$$

$x_a^0 \le x_a \le x_a^M,\ \chi_a \in \{0,1\}$ なので, 線形緩和したときのφ_aの範囲は以下のように書ける.

$$\varphi_a \ge x_a^0 \chi_a$$

$$\varphi_a \ge x_a + x_a^M (\chi_a - 1)$$

$\varphi_a \le x_a$ 　　変分不等式の中のUが生きるための制約.

まとめ

〇利用者均衡条件をリンクフローの実行可能領域の有限の端点の凸結合の形で再定式化し, 関数形を線形に緩和したことでリンクベース のアプローチが可能となり, パスフローの計算, や蓄積が不要となり,既存のアルゴリズムによる近似解法が可能となった. 数値計算の結果, 原問題の上界としてそれなりの精度であることが確認できました.

〇リンクの種類ごとに定式化したので, CNDP, DNDP, MNDPの全てに適用可能である.