ランダム効用最大化に基づく離散選択モデルのフレームワークとロジットモデル

愛媛大学
倉内慎也
kurauchi@cee.ehime-u.ac.jp

プレゼンテーションの構成

- 多項ロジットモデル
- 離散選択モデルのフレームワーク
  - 誤差構造
  - 効用関数
  - 選択肢集合
  - 意思決定ルール
  - その他
- おわりに

離散選択と連続選択

- 連続量の選択
  例）活動時間（施設での滞在時間），一週間のトリップ頻度

- 離散選択
  例）ブランドの選択，携帯電話会社

交通分野での選択肢は離散選択が多い

いつ？	出発時刻選択
どこへ？	目的地選択
どの交通手段で？	交通手段選択
どの経路で？	経路選択
どれぐらいの頻度で？	トリップ頻度の選択

合理的選択と効用最大化

合理的選択

完備性：*{車，鉄道}→（車≧鉄道）*and/or*（鉄道≧車）*

推移性：*（車＞バス）&（バス＞鉄道）⇔（車＞鉄道）*

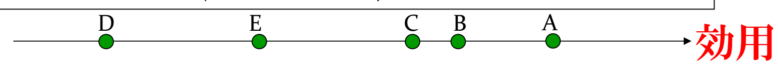
複数の選択肢を選好（望ましさ）の順に並べることができる

例）{A,B,C,D,E}

(A>B), (B>C), (C>D), (D<E), (C>E) 完備性

↓

(A>B>C>E>D) 推移性



効用最大化：「人は最大の効用を与える選択肢を選ぶ」

Aさん：車を選択⇔U（車）＞U（バス），U（鉄道）

ランダム効用(1)

効用を構成する要因 (例)交通手段選択

- **代替案の属性**:料金,所要時間,乗換え回数etc.
- **個人属性**:性別,年齢,免許の有無etc.
- **トリップ属性**:トリップ目的,時間帯etc.

$$
\begin{aligned}
U(car) &= \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * \cos t_{car} + \beta_5 * carown + \varepsilon_{car}\\
U(bus) &= \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * \cos t_{bus} + \beta_6 * age60 + \varepsilon_{bus}\\
U(rail) &= \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} + \varepsilon_{rail}
\end{aligned}
$$

確定項(V)　　誤差項

分析者にとって意思決定者のもつ真の効用は不明

→ランダム(誤差)項を用いて効用を確率的に表す

ランダム効用(2)

誤差項に含まれるもの

- **非観測属性**:快適性,移動の自由度etc.
- **測定誤差**:駅までのアクセス時間etc.
- **情報の不完全性**:認知所要時間と実際の所要時間のずれetc.
- **Instrumental (proxy) variables**:「快適性」の代わりに「座席数」を代理変数として用いたときの差異etc.
- **異質性**:所要時間や費用の重み(効用パラメータ)の個人差etc.
- **効用最大化以外の意思決定ルールによる影響**:所要時間や費用の重み(効用パラメータ)の個人差etc.

誤差項の分布とモデル(1)

$$
\begin{aligned}
U(car) &= V_{car} + \varepsilon_{car}\\
U(rail) &= V_{rail} + \varepsilon_{rail}
\end{aligned}
$$

誤差項は確率的に変動

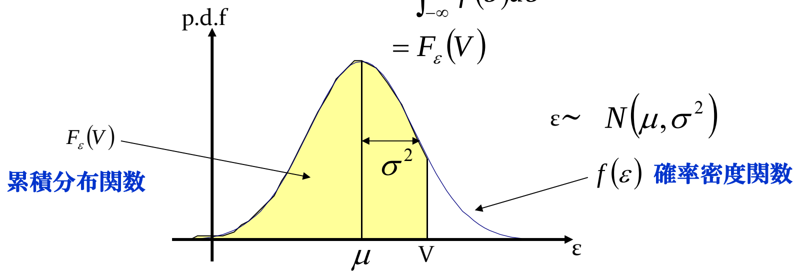
→分析者から見て効用が最大となる選択肢は確率的

→分析者から見た意思決定者の選択行動は確率的

$$
\begin{aligned}
choice = car &\Leftrightarrow U(car) > U(rail)\\
&\Leftrightarrow V_{car} + \varepsilon_{car} > V_{rail} + \varepsilon_{rail}\\
&\Leftrightarrow \varepsilon_{rail} - \varepsilon_{car} < V_{car} - V_{rail}\\
&\Leftrightarrow \varepsilon < V
\end{aligned}
$$

誤差項の分布とモデル(2)

$$
\begin{aligned}
\Pr ob(choice = car) &= \Pr ob(\varepsilon < V)\\
&= \int_{-\infty}^{V} f(\varepsilon)\, d\varepsilon\\
&= F_{\varepsilon}(V)
\end{aligned}
$$



選択確率はεとVに依存

多項プロビットモデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Sigma^{-1}\varepsilon'\right)$$

多項ロジットモデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～IIDガンベル
独立で(Independently)
同一(Identically)の分散を持つ
分布(Distributed)

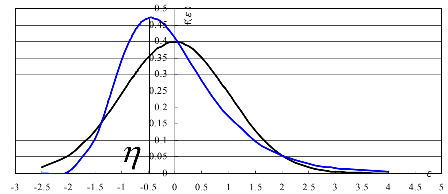


図2.1　正規分布とガンベル分布の確率密度関数

$$V(\varepsilon) = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

$$f(\varepsilon) = \mu \exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\} \cdot \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\}]$$
$$\mathrm{F}(\varepsilon) = \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\}]$$

多項ロジットモデルと多項プロビットモデル

$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = V_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

多項ロジットモデル

- closed-formであるため計算が容易
- 便益計算が簡便

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j\in C} \exp(\mu V_j)}$$

多項プロビットモデル

- 中心極限定理より誤差項の仮定は尤もらしい
- open-formであるため計算負荷が大きい(J-1重積分)

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Sigma^{-1}\varepsilon'\right)$$

プレゼンテーションの構成

- 多項ロジットモデル
- 離散選択モデルのフレームワーク
  - 誤差構造
  - 効用関数
  - 選択肢集合
  - 意思決定ルール
  - その他
- おわりに

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in} = V_{in}\left(X_{in};\beta_n\right) + \varepsilon_{in}\left(\theta_n\right) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n\left(U_{in}\right)$$

意思決定タイミング
外生的に与える

確定項の関数型
線形効用関数

説明変数
客観的確定変数

嗜好
母集団で同一

誤差構造
IIDガンベル分布

選択肢集合
所与

意思決定ルール
効用最大化

効用の時間的変化
不変

社会的相互作用
なし

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in} = V_{in}\left(X_{in};\beta_n\right) + \varepsilon_{in}\left(\theta_n\right) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n\left(U_{in}\right)$$

誤差構造
IIDガンベル分布

ロジットモデルとIIA特性

- 無関係な選択肢からの選択確率の独立 （Independence from Irrelevant Alternatives）

$$\underbrace{\boxed{car, bus, rail}_{C}, walk, bike}_{A}$$

$$P(car|C) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail})}$$

$$P(car|A) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail}) + \exp(V_{walk}) + \exp(V_{bike})}$$

$$\frac{P(car|C)}{P(rail|C)} = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{rail})} = \frac{P(car|A)}{P(rail|A)}$$

選択確率の比は無関係な選択肢（*walk,bike*）に影響を受けない

IIA特性の問題点（1）

Before

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$

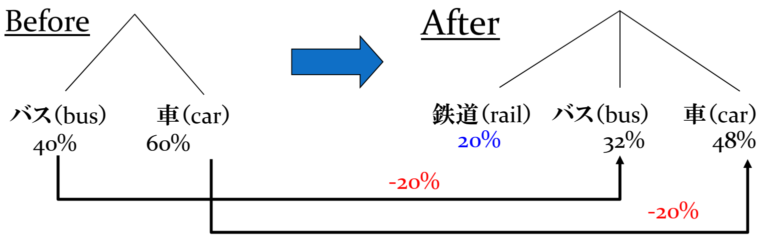
赤バス（RB）	車（car）
1/2	1/2

After

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$

	赤バス（RB）	青バス（BB）	車（car）
	1/4	1/4	1/2
ロジットモデル	1/3	1/3	1/3

IIA特性の問題点（2）



交差弾性値が等しい

IIA特性の問題を避けるには（1）

- **効用関数の確定項をうまく特定する**

$$U(car)=V_{car}+\varepsilon_{car}$$
$$U(bus)=V_{bus}+\varepsilon_{bus}$$
$$U(rail)=V_{rail}+\varepsilon_{bus}$$

ε～IIDガンベル
独立で(Independently)
同一(Identically)の分散を持つ
分布(Distributed)

- **個人間の異質性を考慮**
  - **個人属性をたくさん入れる／セグメンテーションを行う**

$$U_{car,n}=\alpha_0+\alpha_1*male_n+\beta_1 T_{car,n}+\varepsilon_{car,n}$$

女性の定数項：α_0　男性の定数項：$\alpha_0+\alpha_1$

$$U_{car,n}=\alpha_0+\beta_1*male_n*T_{car,n}+\beta_2*(1-male_n)*T_{car,n}+\varepsilon_{car,n}$$

女性のﾊﾟﾗﾒｰﾀ：β_2　男性のﾊﾟﾗﾒｰﾀ：β_1

$$U^{Group1}_{car,n}=\alpha_0^{Group1}+\beta_1^{Group1}T_{car,n}+\varepsilon^{Group1}_{car,n}$$ Group1のﾊﾟﾗﾒｰﾀﾍﾞｸﾄﾙ：$(\alpha_0^{Group1},\beta_1^{Group1})$

$$U^{Group2}_{car,n}=\alpha_0^{Group2}+\beta_1^{Group2}T_{car,n}+\varepsilon^{Group2}_{car,n}$$ Group2のﾊﾟﾗﾒｰﾀﾍﾞｸﾄﾙ：$(\alpha_0^{Group2},\beta_1^{Group2})$

IIA特性の問題を避けるには（2）

効用関数の説明変数として個人属性をできるだけたくさん入れたり，個人属性を用いてセグメンテーションを行いましょう
→より高精度の予測
→行動理解も促進

	人数	バス	車
男性	500人	20%	80%
女性	500人	60%	40%
合計	1,000人	40%	60%

	人数	鉄道	バス	車
男性	500人	10%	18%	72%
女性	500人	30%	42%	28%
合計	1,000人	20%	30%	50%

-25%
-17%

マーケットシェアの変化率は異なる

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in}=V_{in}(X_{in};\beta_n)+\varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i\in C_n$$

$$Choice_n=D_n(U_{in})$$

嗜好
母集団で同一

嗜好の異質性：ランダム係数モデル(1)

$$U_{car,n} = \beta T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

βは母集団で同一⇔
嗜好は母集団で同質と仮定

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

嗜好には異質性(個人差)が存在

観測異質性

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性の定数項：α_0　男性の定数項：$\alpha_0 + \alpha_1$

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n} + \varepsilon_{ca}$$

女性のﾊﾟﾗﾒｰﾀ：β_2　男性のﾊﾟﾗﾒｰﾀ：β_1

$$U^{Group1}_{car,n} = \alpha_0^{Group1} + \beta_1^{Group1} T_{car,n} + \varepsilon^{Group1}_{car,n}$$ Group1のﾊﾟﾗﾒｰﾀﾍﾞｸﾄﾙ：$(\alpha_0^{Group1}, \beta_1^{Group1})$

$$U^{Group2}_{car,n} = \alpha_0^{Group2} + \beta_1^{Group2} T_{car,n} + \varepsilon^{Group2}_{car,n}$$ Group2のﾊﾟﾗﾒｰﾀﾍﾞｸﾄﾙ：$(\alpha_0^{Group2}, \beta_1^{Group2})$

非観測異質性

アプリオリ・マーケット
セグメンテーション

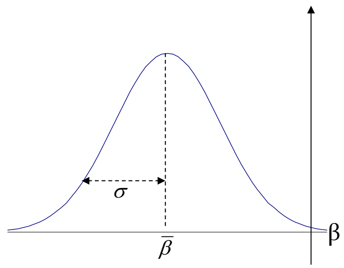
21

嗜好の異質性：ランダム係数モデル(2)

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$

$$\beta_n \sim N(\bar{\beta}, \sigma^2)$$

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \sigma \eta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$
$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \sigma \eta_n T_{bus,n} + \nu_{bus,n}$$
$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \sigma \eta_n T_{rail,n} + \nu_{rail,n}$$



IIDガンベル分布を仮定すればMXLモデル

$\eta_n \sim N(0,1)$　　$\bar{\beta}, \sigma$: unknown parameter

$\bar{\beta}_n = \gamma_0 + \gamma_1 income_n$ としても良い

観測異質性と非観測異質性の両方を考慮

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in} = V_{in}(X_{in}; \beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n(U_{in})$$

確定項の関数型
　線形効用関数

説明変数
　客観的確定変数

線形効用関数の利点

◆**操作性が高い(需要予測，便益計測)**

$$U(car) = \beta_1 \qquad + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * cost_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \qquad \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * cost_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \qquad \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * cost_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

◆**行動理解の例：時間価値の計測**(Value of Travel Time Savings)

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial time} \Delta time + \frac{\partial U}{\partial cost} \Delta cost = 0$$

$$VTTS = \frac{\Delta cost}{\Delta time} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial time}}{\dfrac{\partial U}{\partial cost}} = -\frac{\beta_3}{\beta_4}$$

- モデルの外面的妥当性の検証
- 様々な要因の価値(乗り換え時間価値)を貨幣換算

効用関数の確定項の関数型

◆**通勤交通手段の選択問題**（Train and McFadden (1978)）

$$G_i = Y + w \times W - c_i$$
$$L_i = T - W - t_i$$
$$\max U_i = U(G_i, L_i)$$
$$P_i = \frac{\exp(V_i)}{\sum_j \exp(V_j)}$$

- i: 通勤交通手段
- c: 交通料金
- t: 所要時間
- G: 財の購入に費やすお金
- Y: 非労働収入（所与）
- w: 賃金率
- W: 労働時間
- L: 余暇時間
- T: 総時間（所与）

◆Cobb-Douglas型効用関数を仮定

$$\max U_i = AG_i^{1-\beta} L_i^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

◆導出される効用関数の確定項

$$V_i = -k\left(w^{-\beta} c + w^{1-\beta} t\right), \quad 0.7 < \beta < 1$$

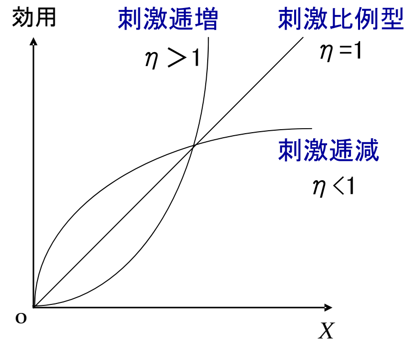
個々の説明変数の関数型

◆**標準的なモデル**

$$U = \beta X + \varepsilon, \quad \beta > 0$$
$$U' = \beta > 0, \quad U'' = 0$$

◆**限界効用逓減型**

$$U = \beta \ln X + \varepsilon$$
$$U' = \beta / X > 0, \quad U'' = -\beta / X^2 < 0$$



◆**より一般的な形**

$$U = \beta X^{\eta} + \varepsilon, \quad \eta > 0 \text{（未知パラメータ）}$$

$$U' = \beta\eta X^{\eta-1} > 0, \quad U'' = \beta\eta(\eta-1)X^{\eta-2} \begin{cases} < 0, & if\ \eta < 1 \\ = 0, & if\ \eta = 1 \\ > 0, & if\ \eta > 1 \end{cases}$$

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in} = V_{in}(X_{in}; \beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n(U_{in})$$

選択肢集合
所与

選択肢集合の問題

- 誤った選択肢集合の特定化はパラメータ推定値にバイアスをもたらす（Swait and Ben-Akiva, 1986）

交通手段	所要時間（分）	費用（円）
A	100	8,000
B	60	10,000
C	90	5,000

- nさん：所要時間を重視（所要時間のパラメータの影響が大），ただし，交通手段Bが利用不可能→交通手段Cを選択
- 分析者：universal choice setを用いて分析
- コンピュータ：nさんは費用が一番安いからCを選んだ→費用のパラメータを大きく負に推定（バイアス）

確率的選択肢集合モデル

◆Probabilistic Choice Setモデル（Manski, 1977）

例）鉄道（R） v.s. 自動車（C）

$$
\begin{aligned}
P_n(R) &= P_n(R|\{R,C\}) \times Q_n(\{R,C\}) \\
&+ P_n(R|\{R\}) \times Q_n(\{R\}) \\
&+ P_n(R|\{C\}) \times Q_n(\{C\})^{\gamma_0} \\
&+ P_n(R|\{\phi\}) \times Q_n(\{\phi\})
\end{aligned}
$$

◆Independent Availabilityモデル（Swait and Ben-Akiva, 1987）

代替案が利用可能性は代替案間で独立であると仮定

$$Q_n(\{R\}) = q_n(R) \times (1 - q_n(C))$$

$$q_n(R) = \frac{1}{1 + \exp(-Y_n(R))}, \quad Y_n(R) = \gamma_0 + \gamma_1 z_{1n} + \gamma_2 z_{2n} + \cdots + \varsigma_{nR}$$

ロジットモデルによる利用可能性の考慮

◆選択肢集合Aと選択結果の同時確率

$$P(i, A) = P(A|i) \times P(i) = P(i|A) \times P(A)$$

◆ベイズの定理

$$P(i|A) = \frac{P(A|i) \times P(i)}{\sum_{j \in A} P(A|j) \times P(j)} = \frac{\exp[\mu V_i + \ln P(A|i)]}{\sum_{j \in A} \exp[\mu V_j + \ln P(A|j)]}$$

◆Independent Availabilityを仮定

$$P(A) = \prod_{j \in A} q_j \times \prod_{j \notin A} (1 - q_j) \Rightarrow P(A|i) = \prod_{j \in A, j \neq i} q_j \times \prod_{j \notin A} (1 - q_j) = \frac{P(A)}{q_i}$$

◆利用可能性を考慮したロジットモデル

$$P(i|A) = \frac{\exp[\mu V_i - \ln q_i]}{\sum_{j \in A} \exp[\mu V_j - \ln q_j]}$$

ただし，Vとqに含まれるパラメータを選択結果のみから推定するのは困難．．．

標準的ロジットモデルのフレームワーク

$$U_{in} = V_{in}(X_{in}; \beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = \boxed{D_n(U_{in})}$$

意思決定ルール

効用最大化

意思決定ルール

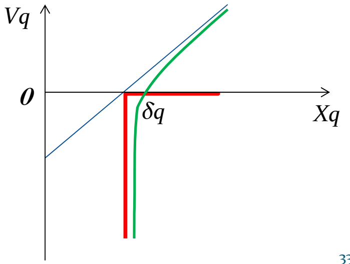
◆代表的な意思決定ルール（Payne et al., 1993）

- ◆荷重加算型（線形効用関数）
- ◆勝率最大化
- ◆連結型
- ◆分離型
- ◆辞書編纂型
- ◆EBA(Elimination by Aspects)

ロジットモデルによる意思決定ルールの近似

- 連結型意思決定ルールを考慮したモデル（Elrod et al., 2004）
  - 各属性の閾値を満足した選択肢を選ぶ
  - 選択肢が複数残った場合は効用が大きいものを選ぶ
- GNH(General Nonrectangular Hyperbola)

$$V_{iq} = \begin{cases} \dfrac{-\gamma_q}{X_{iq}-\delta_q} + \beta_q X_{iq}, & if\ \ X_{iq} \geq \delta_q \\ -\infty, & if\ \ X_{iq} < \delta_q \end{cases}$$



標準的ロジットモデルのフレームワーク

<u>意思決定タイミング</u>

外生的に与える

$$U_{in} = V_{in}(X_{in};\beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n(U_{in})$$

<u>効用の時間的変化</u>

不変

<u>社会的相互作用</u>

なし

その他

- 意思決定タイミングのモデル化
  - 三輪ら(2005)：ノードごとに意思決定するか否かと，意思決定をした場合の経路選択を，潜在クラスモデルの枠組みでモデル化
- 社会的相互作用
  - 福田先生博士論文
  - 張先生のグループの一連の研究：世帯効用
- 効用の時間的変化
  - ？？？
- その他の行動理論
  - 張先生の講義参照？

プレゼンテーションの構成

- 多項ロジットモデル
- 離散選択モデルのフレームワーク
  - 誤差構造
  - 効用関数
  - 選択肢集合
  - 意思決定ルール
  - その他
- おわりに

おわりに

- 標準的な多項ロジットモデルは操作性が高く便利だが，非常に多くの仮定をおいている
- 適用対象に対して仮定が妥当かどうかを吟味する必要がある
- ただし，標準的なロジットモデルでも工夫により問題点を緩和できる
- 演習で色々と試しましょう