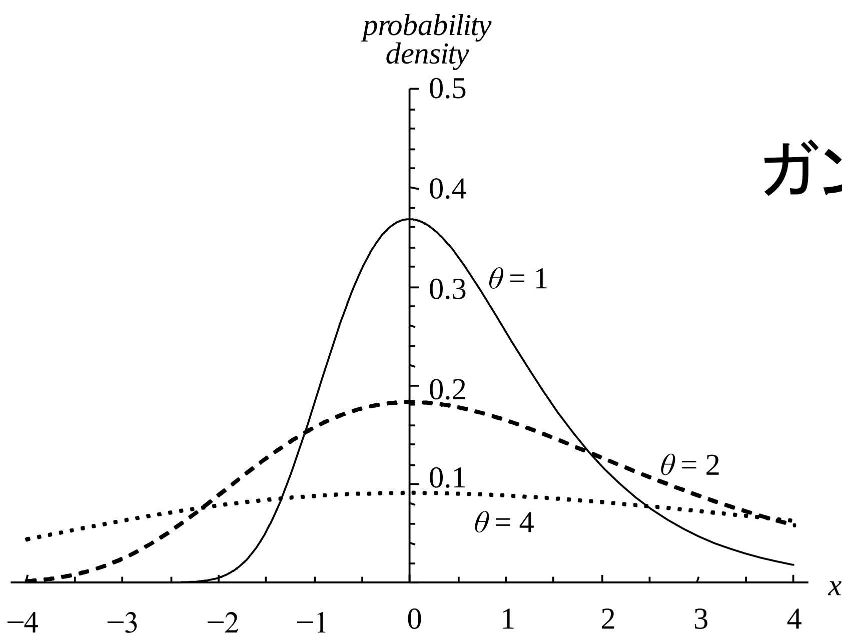
ロジットモデルの一般化とネットワーク分析

中山晶一朗
（金沢大学　環境デザイン学系）

誤差項のガンベル分布

形状が右裾が長いものに限られる
定義域が$-\infty$から$+\infty$（通常は非負の変数が多い）
定量的計算には形状の自由度が高いほうがよい

$U = -\alpha c + \varepsilon = -(\alpha c - \varepsilon)$では負側の裾が長くなる



ガンベル分布の累積分布関数:

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)\right]$$

ガンベル分布と極値分布

極値分布は3種類

- ガンベル型 → ガンベル分布
- フレシェ型
- ワイブル型

一般化極値分布
（GEV: generalized extreme value distribution）

紛らわしいが，ネスティィッドロジットなどが導出できるGEVとは別もの

一般化極値分布

一般化極値分布の累積分布関数 $\tilde{G}(x)=\exp\left\{-\left[1+\gamma\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}$

$\exp(x)=\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma x)^{\frac{1}{\gamma}}$ であるため，上式は

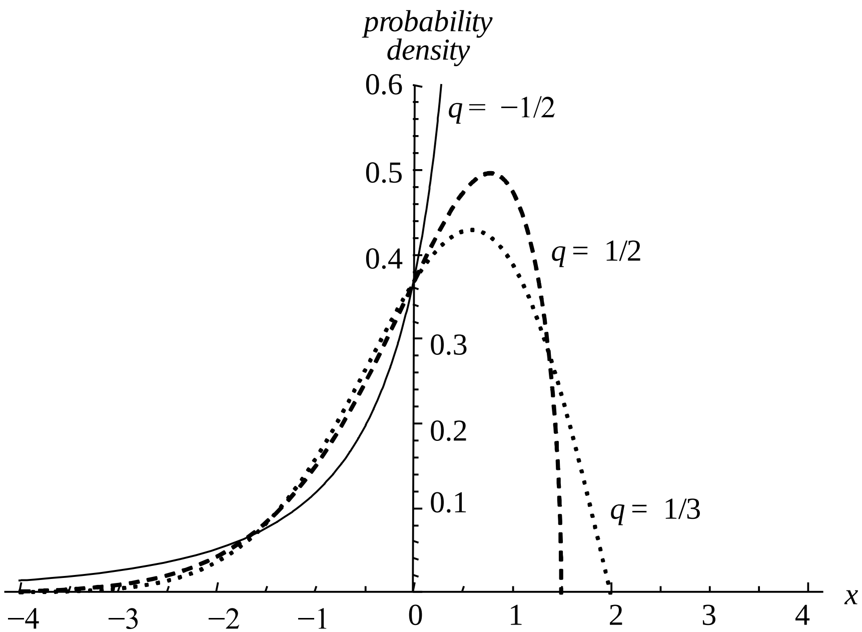
$\gamma\to 0$ の時，$\tilde{G}(x)=\exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)\right]\right\}$

$$\Downarrow$$

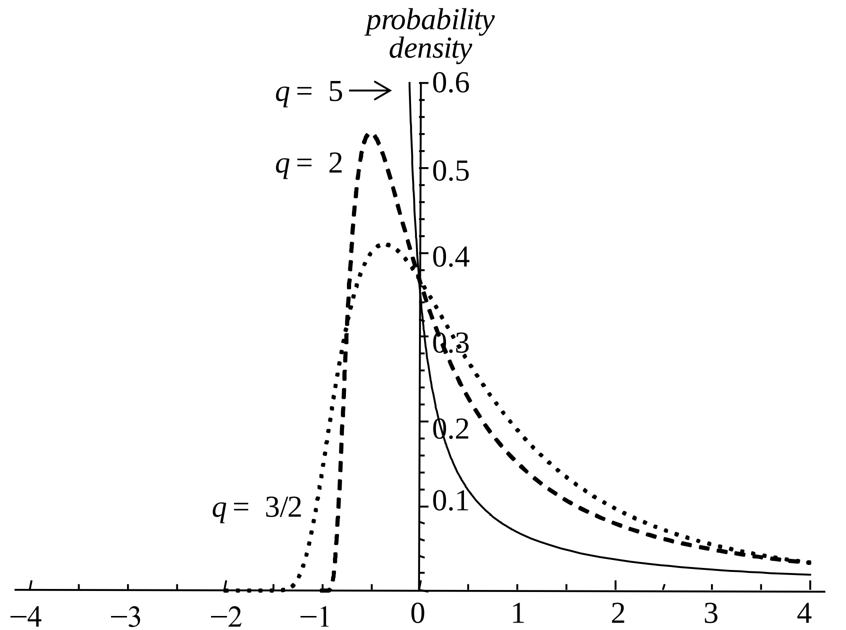
ガンベル分布（二重指数分布）

一般化極値分布の形状

$q<1$ の時



$q>1$ の時



一般化とq-関数

一般化:
通常の指数関数をq-指数関数に置き換える

q-指数関数:

$$\exp_q(x) := [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \xrightarrow{q \to 1} \exp_1(x) = \exp(x)$$

$$\because \quad \exp(x) = \lim_{\gamma \to 0} (1+\gamma x)^{\frac{1}{\gamma}}$$

q-対数関数:

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \xrightarrow{q \to 1} \ln_1(x) = \ln(x)$$

一般化極値分布の分布関数

$$\tilde{G}(x) = \exp\left\{ -\left[1 + \gamma\left(\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}$$

$\gamma = q - 1,\ \mu = v,\ \theta = s - (1-q)v$ とすると,

$$\boxed{G(x) = \exp\left[-\exp_q\left(-\frac{x-v}{s-(1-q)v} \right) \right]}$$

$$= \exp\left\{ -\left[1 + (1-q)\left(-\frac{x-v}{s-(1-q)v} \right) \right]^{\frac{1}{1-q}} \right\}$$

選択肢 *i* の効用の分布関数

$$G_i(x) = \exp\left[-\exp_q\left(-\frac{x - v_i}{s - (1-q)v_i}\right)\right]$$

$$\hat{v}_i := \frac{v_i}{s - (1-q)v_i}$$ とすると,

$$G_i(x) = \exp\left[-\exp_q(\hat{v}_i)\exp_q\left(-\frac{x}{s}\right)\right]$$ となる

一般化ロジットの導出

累積分布関数 $G_i(x)$ とそれを微分した確率密度関数 $g_i(x) = dG_i(x)/dx$ を用いると, 選択肢iが選択される確率は

$$p_i = \int_{x\in\Omega} G_1(x)\cdots G_{i-1}(x)\, g_i(x)\, G_{i+1}(x)\cdots G_I(x)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$p_i = \frac{\exp_q(\hat{v}_i)}{\sum_{i'=1}^{I} \exp_q(\hat{v}_{i'})}$$

導出準備

効用 : $U_i = v_i + \varepsilon_i$ (1)

U_i : 選択肢 i の効用
v_i : 選択肢 i の確定効用
ε_i : 確率項

選択肢1が選択されるのは，選択肢1の効用 U_1 が他の選択肢の効用 $U_2, U_3, \cdots$ よりも大きい場合（$U_1 > U_2, U_1 > U_3, \ldots$）
よって，選択肢1を選択する確率は

$$p_1 = \Pr[U_1 > U_2]\Pr[U_1 > U_3] \ldots \Pr[U_1 > U_I] \quad (2)$$

ε_i が従う確率分布の確率密度関数を $f_i(x_i)$，累積分布関数を $F_i(x_i$
とすると，

$$p_1 = \int_{x\in\Omega} g_1(x) G_2(x) \cdots G_I(x)\, dx \quad (3)$$

一般化ロジットの導出1

$G_i(x)$:一般化極値分布の累積分布関数
$g_i(x) = dG_i(x)/dx$:確率密度関数

後の置換積分のため, $z := \exp_q\left(-\frac{x}{s}\right)$ とすると,

$$g_1(x) = \frac{d}{dx}G_1(x) = -\exp_q(\hat{v}_1)\,G_1(x)\frac{dz}{dx}$$

$$\because G_i(x) = \exp\left[-\exp_q(\hat{v}_i)\exp_q\left(-\frac{x}{s}\right)\right]$$

これを式(3)に代入すると,

$$p_1 = -\exp_q(\hat{v}_1)\int_{z\in\hat{\Omega}} G_1(x)\,G_2(x)\cdots G_I(x)\,dz$$

一般化ロジットの導出2

$\sigma = \sum_{i=1}^{I} \exp_q(\hat{v}_i)$ とすると,

$\prod_{i=1}^{I} G_i(x) = \exp\left[-\sigma \exp_q\left(-\frac{x}{s} \right) \right] = \exp(-\sigma z)$ であるので,

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -\exp_q(\hat{v}_1) \int_{z \in \hat{\Omega}} \exp(-\sigma z)\, dz \\
&= \frac{\exp_q(\hat{v}_1)}{\sigma} \left[\exp(-\sigma z) \right]_{\infty}^{0} \\
&= \frac{\exp_q(\hat{v}_1)}{\sum_{i=1}^{I} \exp_q(\hat{v}_i)}
\end{aligned}
$$

ツァリス一般化ロジット

ツァリス一般化ロジット

$$\boxed{p_i = \frac{\exp_q(\hat{v}_i)}{\sum_{i'=1}^{I} \exp_q(\hat{v}_{i'})}}$$

$s = 1$

$q \to 1$

一般化

通常ロジット

$$p_i = \frac{\exp(v_i)}{\sum_{i'=1}^{I} \exp(v_{i'})}$$

ワイビット

誤差項がワイブル分布の離散選択モデル

Castillo, E. et al. (2008) Closed form expressions for choice probabilities in the Weibull case. Transportation Research, 42B, 373–80

$$p_i = \frac{{v_i}^{\alpha}}{\sum_{i'=1}^{I} {v_{i'}}^{\alpha}}$$

かつて，上式を用いた配分は時間比配分と呼ばれていた.

ワイビットの含有

$$\exp_q(\hat{v}) = [1 + (1-q)\hat{v}]^{\frac{1}{1-q}}$$

$$= \left[(1-q)\left(\hat{v} + \frac{1}{1-q} \right) \right]^{\frac{1}{1-q}}$$

$$= (1-q)^{\frac{1}{1-q}} \left(\hat{v} + \frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$p_i = \frac{\exp_q(\hat{v}_i)}{\sum_{i'=1}^{I} \exp_q(\hat{v}_{i'})} = \frac{\left(\hat{v}_i + \frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{i'=1}^{I} \left(\hat{v}_i + \frac{1}{1-q} \right)^{\frac{1}{1-q}}}$$

一般化ロジットモデルはワイビットも含んでいる

ツァリス・エントロピー

$$S_q(\mathbf{p}) = -\frac{1-\sum_{i=1}^{I} p_i{}^q}{1-q} = -\sum_{i=1}^{I} p_i{}^q \ln_q(p_i)$$

$$\Big\downarrow \; q \to 1$$

$$-\sum_{i=1}^{I} p_i \ln(p_i)$$

シャノンエントロピー

ツァリス一般化ロジット配分

$$f_{ij} = d_i \frac{\exp_q(-\theta c_{ij})}{\sum_{j'=1}^{J_i} \exp_q(-\theta c_{ij'})}$$

f_{ij}: ODペア i の経路 j の経路交通量
c_{ij}: ODペア i の経路 j の旅行時間
d_i: ODペア i の交通需要
θ: パラメータ

ツァリスー般化ロジット配分の最適化問題

旅行時間が固定（non-congested network）

$$\min_{\mathbf{p}} . \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} p_{ij}{}^{q} c_{ij} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{I} S_q(\mathbf{p}_i)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{I} p_i = 1$$

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{d_i}$$

渋滞ネットワーク場合は，上の問題を緩和問題とする緩和法で解くことが可能

ロジットモデルのツァリス的一般化

離散選択誤差項

ボルツマン統計

ガンベル
分布

ロジットモデル
ボルツマン分布
（カノニカル分布）

$$p_i = \frac{\exp(-\beta E_i)}{\sum_{i'=1}^{I} \exp(-\beta E_{i'})}$$

シャノン
エントロピー

一般化

一般化

一般化

一般化
極値分布

ツァリス一般化
ロジットモデル

ツァリス
エントロピー

ツァリス統計

まとめ

- ガンベル分布を一般化極値分布に一般化
- 一般化ロジットモデルの導出
- それはツァリス・エントロピーの最大化からも導出される
- 一般化ロジット配分の解法を提案