行動モデルの基礎 ～MMNLモデル～

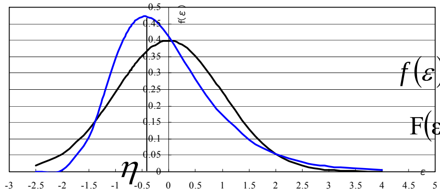
愛媛大学
倉内慎也
kurauchi@cee.ehime-u.ac.jp

多項ロジットモデル

$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = V_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～IIDガンベル
独立で(Independently)
同一(Identically)の分散を持つ
分布(Distributed)

$$\begin{array}{c} Cov(U) \\ \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$



$$f(\varepsilon) = \mu \exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\} \cdot \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\}]$$
$$F(\varepsilon) = \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon-\eta)\}]$$

多項ロジットモデル

- closed-formであるため計算が容易
- 便益計算が簡便

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

ロジットモデルとIIA特性

- 無関係な選択肢からの選択確率の独立 (Independence from Irrelevant Alternatives)

$$\underbrace{\underbrace{car, bus, rail,}_{C} walk, bike}_{A}$$

$$P(car|C) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail})}$$
$$P(car|A) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail}) + \exp(V_{walk}) + \exp(V_{bike})}$$

$$\frac{P(car|C)}{P(rail|C)} = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{rail})} = \frac{P(car|A)}{P(rail|A)}$$

選択確率の比は無関係な選択肢(*walk,bike*)に影響を受けない

IIA特性の問題点(1)

Before

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$

赤バス(RB) 1/2　車(car) 1/2

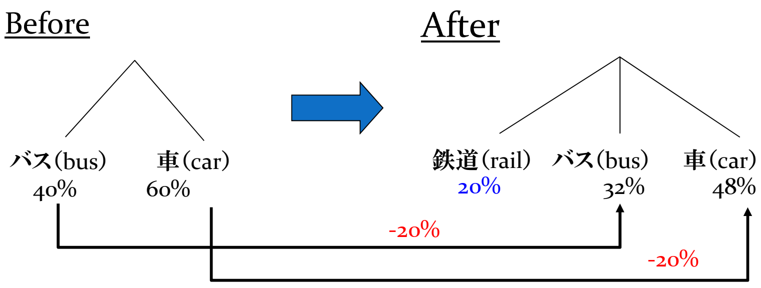
After

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$

赤バス(RB) 1/4　青バス(BB) 1/4　車(car) 1/2

ロジットモデル　1/3　1/3　1/3

IIA特性の問題点(2)



交差弾性値が等しい

IIA特性の問題を避けるには

- 誤差項間に相関が生じないようにする
  - 調査等で影響要因を観測
  - 確定項の関数型等の工夫

$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = V_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

誤差項には確定項で説明できない要因が含まれる

- 誤差相関を明示的に考慮したモデルの適用

効用関数の特定化の工夫(1)

- 個人間の異質性を考慮
  - 個人属性をたくさん入れる/セグメンテーションを行う

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性の定数項:α_0　男性の定数項:$\alpha_0 + \alpha_1$

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

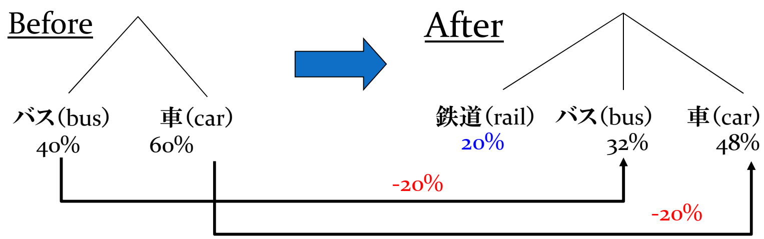
女性のパラメータ:β_2　男性のパラメータ:β_1

$$U^{Group1}_{car,n} = \alpha^{Group1}_0 + \beta^{Group1}_1 T_{car,n} + \varepsilon^{Group1}_{car,n}$$
$$U^{Group2}_{car,n} = \alpha^{Group2}_0 + \beta^{Group2}_1 T_{car,n} + \varepsilon^{Group2}_{car,n}$$

Group1のパラメータベクトル:$(\alpha^{Group1}_0, \beta^{Group1}_1)$

Group2のパラメータベクトル:$(\alpha^{Group2}_0, \beta^{Group2}_1)$

効用関数の特定化の工夫(2)



	人数	バス	車
男性	500人	20%	80%
女性	500人	60%	40%
合計	1,000人	40%	60%

	人数	鉄道	バス	車
男性	500人	10%	18%	72%
女性	500人	30%	42%	28%
合計	1,000人	20%	30%	50%

マーケットシェアの変化率は異なる

多項プロビットモデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rail}^2 & \sigma_{bus,rail} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{bus,rail} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{car,bus} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car}^2 \end{bmatrix}$$

多項プロビットモデル

- 中心極限定理より誤差項の仮定は尤もらしい
- open-formであるため計算負荷が大きい(J-1重積分)

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon \Sigma^{-1} \varepsilon'\right)$$

ネスティッドロジット(NL)モデル(1)

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$

$$Cov(U) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

多項ロジットモデルの仮定：ε～IIDガンベル分布

矛盾

ε_{RB}とε_{BB}は共通の非観測属性を含んでいる

・料金
・快適性
・利便性など

$$U(car) = \beta T \boxed{+ \alpha \cos t_{car} + \varepsilon'_{car}} \quad \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T \boxed{+ \alpha \cos t_{bus} + \varepsilon'_{RB}} \quad \varepsilon_{RB}$$

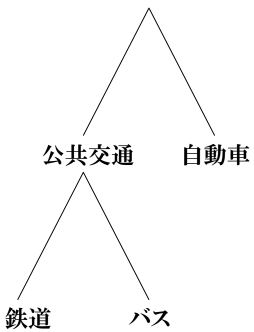
共通要因

$$U(BB) = \beta T \boxed{+ \alpha \cos t_{bus} + \varepsilon'_{BB}} \quad \varepsilon_{BB}$$

相関

ネスティッドロジット(NL)モデル(2)

NLモデルの誤差構造



$$\begin{array}{c|c} & Cov(U) \\ \begin{array}{c} 鉄道 \\ バス \\ 自動車 \end{array} & \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{transit}^2 & 0 \\ \sigma_{transit}^2 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

等分散

無相関

一般的な誤差構造(MNPモデル)

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 鉄道 \\ バス \\ 自動車 \end{array} & \begin{bmatrix} \sigma_{rail}^2 & \sigma_{rail,bus} & \sigma_{rail,car} \\ \sigma_{rail,bus} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus,car} \\ \sigma_{rail,car} & \sigma_{bus,car} & \sigma_{car}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ミックストロジット(MMNL)モデル(1)

プロビットモデルの柔軟な誤差構造

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

ε

ロジットモデルの操作性

プロビットタイプのフレキシブルな誤差項

IIDガンベル分布

$$\varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{car}^2 & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma_{rail}^2 \end{bmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}_{\nu}$$

ミックストロジット(MMNL)モデル(2)

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

ロジットモデルの操作性

IIDガンベル分布

$$\Lambda(car|\eta) = \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}}}$$

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

ηは*unknown*

ミックストロジット(MMNL)モデル(3)

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

open-form→どうやって推定？

シミュレーション法

$$\hat{P}(car) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^{D} \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^d}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^d} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}^d} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}^d}}$$

Step1: 分布f(η)に従う乱数ηを発生
Step2: それを用いて選択確率を計算
Step3: これをD回繰り返し選択確率の平均値を計算
Step4: それを尤度として最尤推定法により未知パラメータを推定

ミックストロジット(MMNL)モデル(4)

Nested

$$U_{car} = \beta X_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail}$$
$$\eta_{transit} \sim N(0,1)$$

自動車
バス
鉄道

$$\overset{\eta}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}} + \overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}} = \overset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}}$$

NLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MMNL)モデル(5)

Cross-Nested

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail}$$
$$\eta_{transit}, \eta_{road} \sim N(0,1)$$

自動車
バス
鉄道

$$\overset{\eta}{\begin{bmatrix} \sigma_{road}^2 & \sigma_{road}^2 & 0 \\ \sigma_{road}^2 & \sigma_{transit}^2 + \sigma_{road}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}} + \overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}} = \overset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_{road}^2 & \sigma_{road}^2 & 0 \\ \sigma_{road}^2 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 + \sigma_{road}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}}$$

CNLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MMNL)モデル(6)

異分散

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{car}\eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{rail}\eta_{rail} + \nu_{rail}$$
$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_{rail} \sim N(0,1)$$

Identificationの問題で，一つのσは0に固定する必要あり

$$\underset{\eta}{\begin{bmatrix} \sigma_{car}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 \end{bmatrix}} + \underset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}} = \underset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma_{car}^2+\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2+\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2+\sigma^2 \end{bmatrix}}$$

嗜好の異質性：ランダム係数モデル(1)

$$U_{car,n} = \beta T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

βは母集団で同一⇔嗜好は母集団で同質と仮定

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

嗜好には異質性(個人差)が存在

観測異質性

非観測異質性

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性の定数項：α_0　男性の定数項：$\alpha_0 + \alpha_1$

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性のパラメータ：β_2　男性のパラメータ：β_1

アプリオリ・マーケットセグメンテーション

$$U_{car,n}^{Group1} = \alpha_0^{Group1} + \beta_1^{Group1} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group1}$$ Group1のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group1}, \beta_1^{Group1})$

$$U_{car,n}^{Group2} = \alpha_0^{Group2} + \beta_1^{Group2} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group2}$$ Group2のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group2}, \beta_1^{Group2})$

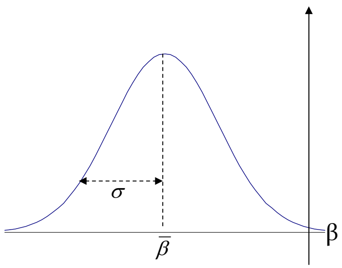
嗜好の異質性：ランダム係数モデル(2)

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$
$$\beta_n \sim N(\bar{\beta}, \sigma^2)$$

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \sigma\eta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$
$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \sigma\eta_n T_{bus,n} + \nu_{bus,n}$$
$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \sigma\eta_n T_{rail,n} + \nu_{rail,n}$$

$\eta_n \sim N(0,1)$　　$\bar{\beta}, \sigma : unknown\ parameter$

IIDガンベル分布を仮定すればMXLモデル



でも，結局のところ．．．

- MMNLモデルもopen-formのモデル
  - プロビットモデルやGEVモデルでよいのでは？
  - 誤差相関を部分的かつ発見探索的に考える場合は有効
    - 対MNP：計算負荷が少ない(特に選択肢数が多い場合)
    - 対GEV：推定プログラムの変更が容易
  - ランダム係数モデルとしての意義
    - 個人パラメータの算定，再現性の向上

行動モデルの推定
～シミュレーションによる推定と identificationの問題～

山梨大学　佐々木邦明
愛媛大学　　倉内慎也
BESTGUY
BEhavior Study for Transportation Graduate school, Univ. of Yamanashi

モデル推定の意義

- 行動モデルにはパラメータが含まれることが多い

$$U_{in} = \beta_0 + \beta_t time_{in} + \beta_c \cos t_{in} + \cdots + \varepsilon_{in} = V_{in} + \varepsilon_{in}$$

$$P_n(i) = \frac{\exp(\mu V_{in})}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_{jn})}$$

  – どのような要因が，どのような影響を及ぼすのか不明
- 現実のデータにもっとも良く適合するようにパラメータ値を決める
- これを通じて，「どのような要因が，どのような影響を及ぼすのか」等についての仮説検定

モデル推定の手順

1. モデルの選定
   ✓ ネスティッドロジットモデル
2. 効用関数の特定化
   ✓ （誤差分布のパラメータ）
   ✓ 説明変数の選定
      • 所要時間，費用，性別，年齢，．．．
   ✓ 効用関数の関数型

$$V_{in} = \beta_0 + \beta_t time_{in} + \beta_c \cos t_{in} + \cdots$$

$$V'_{in} = \beta'_0 + \beta'_t \ln(time_{in}) + \beta'_c \cos t_{in} + \cdots$$

3. パラメータ推定
4. 結果の考察

最尤推定法

- 点推定量を求める最もポピュラーな方法

$$L_n(\theta \mid x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

- 右上の式をθの関数とみなしたものが尤度関数

データ(a, b)が得られたとき，全体の平均がいくつとするのがよいか
⇔平均がいくつだったら(a, b)が得られやすいか？

- 尤度関数を最大化するθの値を最尤推定量とするのが最尤推定法

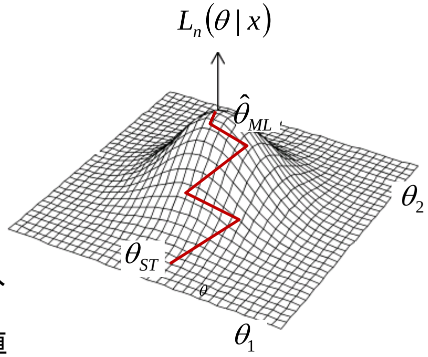
選択モデルの場合，f が選択確率

個人の選択確率を全員で掛け合わせる

$$MaxLikelihood = \max_{\theta \in \Theta} \prod_i P_i(x_i \mid \theta)$$

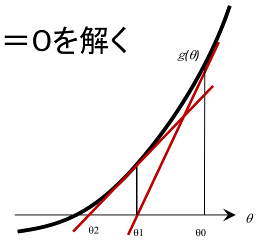
最大化アルゴリズムの考え方

- 対数尤度関数の段階的な最大化
  1. 初期値を与える
  2. 初期値周りで勾配(1次微分）等を用いて次の推定値の方向を決める
  3. 初期値付近のステップサイズを１次微分，２次微分を用いて適切に決めて次の推定値を決める
  4. 収束基準(尤度関数の一時微分ベクトル)を判定し，収束していない場合は，現在の値を初期値として2に進む



代表的な繰り返し計算法

尤度関数を最大化:尤度関数の一階微分＝0を解く



- Newton-Raphson法
  - テイラー展開の1次近似を利用して進める
  - 解の収束が早い(ステップ数が少ない)
- 準Newton法（BFGS法）
  - ヘッセ行列を逐次近似する.

$$\theta_{n+1} = \theta_n - H^{-1} g_1$$

H:尤度関数の二階微分
ヘッセ行列
g: 尤度関数の一階微分

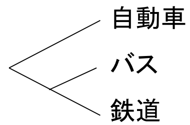
BEstGUY
BEhavior Study for Transportation
Graduate school, University of Yamanashi

シミュレーションによる推定

ミックストロジットモデル

Nested

$$U_{car} = \beta X_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{transit} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{transit} + \nu_{rail}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{bmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}_{\nu} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$P(car) = \int \Lambda\left(car \middle| \eta_{transit}\right) f\left(\eta_{transit}\right) d\eta_{transit}$$

$$\Lambda\left(car \middle| \eta_{transit}\right) = \frac{e^{\beta X_{car}}}{e^{\beta X_{car}} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{transit}} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{transit}}}$$

シミュレーションによる尤度計算

$$P(car) = \int \Lambda(car|\eta_{transit}) f(\eta_{transit}) d\eta_{transit}$$

$$\Lambda(car|\eta_{transit}) = \frac{e^{\beta X_{car}}}{e^{\beta X_{car}} + e^{\beta X_{bus}+\eta_{transit}} + e^{\beta X_{rail}+\eta_{transit}}}$$

Step1: 分布f(η)に従う(準)乱数ηを発生
Step2: それを用いて選択確率を計算
Step3: これをD回繰り返し選択確率の平均値を計算
Step4: それを尤度として最尤推定法により未知パラメータを推定

$$\hat{P}(car) = \frac{1}{D}\sum_{d=1}^{D} \frac{e^{\beta X_{car}+\eta^d_{car}}}{e^{\beta X_{car}+\eta^d_{car}} + e^{\beta X_{bus}+\eta^d_{bus}} + e^{\beta X_{rail}+\eta^d_{rail}}}$$

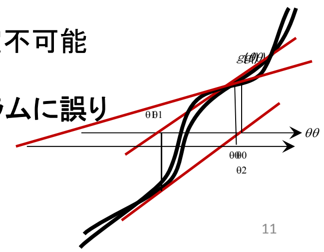
BESTGUY
BEhavior Study for Transportation
Graduate school, University of Yamanashi

モデルの特定化とIDENTIFICATIONの問題

パラメータ推定がうまくいかない

- 収束するとはϑ_{n+1}とϑ_nが同じになる
  - g_1が0になる
- 収束しない
  - 無限に繰り返す
  - ϑ_2が計算不能
- 局所最適解
  - 見かけ上の最大化

- H^{-1}が存在しない(計算できない)
  - 変数が完全相関
  - 変数が効用関数に影響していない
- 関数の近似状況
  - 2次関数近似
  - 初期値の問題
- そもそも推定不可能
- **推定プログラムに誤り**



変数が完全相関

$$V_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \alpha_2 * female_n + \beta_t T_{car,n}$$

$$female_n = 1 - male_n$$

$$V_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \alpha_2 * (1 - male_n) + \beta_t T_{car,n}$$
$$= (\alpha_0 + \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) * male_n + \beta_t T_{car,n}$$

- 推定可能なパラメータは3つ⇔未知パラメータは4つ
- 極めて相関が高い場合には推定できない場合も

そもそも推定不能

- 最大値において唯一解が求まらない可能性がある（最大値となるパラメータベクトルが無数にある）

例

$$V_{rail} = \beta_1 + \beta_3 t_{rail} + \beta_4 c_{rail}$$
$$V_{car} = \beta_2 + \beta_3 t_{car} + \beta_4 c_{car}$$

定数項 *1つは「0」に固定する*

これを満たす組み合わせは無限に存在

$$\begin{aligned} P(R) &= \Pr[U(R) > U(C)] \\ &= \Pr[\alpha_R + V(R) + \varepsilon_R > \alpha_C + V(C) + \varepsilon_C] \\ &= \Pr[\varepsilon_C - \varepsilon_R < \boxed{\alpha_R - \alpha_C} + V(R) - V(C)] \end{aligned}$$

- 同様に個人属性も1つは0に固定

そもそも推定不能

- 1人も選択していない

例）誰も鉄道を選択していない

$$V_{rail} = \beta_1 + \beta_3 t_{rail} + \beta_4 c_{rail}$$
$$V_{car} = \qquad \beta_3 t_{car} + \beta_4 c_{car}$$

- β1→-∞とすれば完璧なモデル（- ∞ とは？）
- 同様に，ある代替案を選択した人が極めて少ない場合も危険

ベイズ推定

$$P(\theta \mid D) = \frac{\boxed{P(D \mid \theta)}\boxed{P(\theta)}}{P(D)}$$

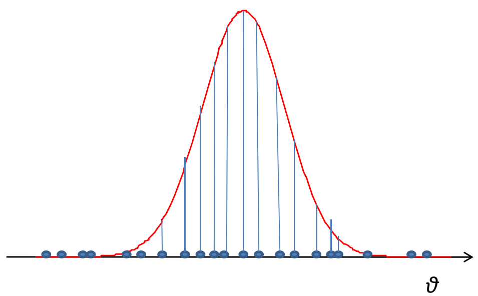
事前確率

尤度

事後分布

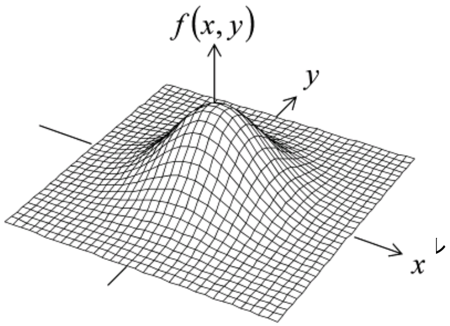
乱数による最大値計算

- ある変数に対して乱数を発生させ，その時の関数の値を調べる
  - 単純な乱数だと効率が悪い
  - 尤度関数の値の大きさで，次のパラメータにあたりをつける
  - 尤度分布に基づく乱数を発生できれば，その頻度がパラメータの分布になる



MCMC法による推定

- Gibbs Sampling
  - 一つを除いて残りのパラメータを固
    布を考える
  - あるパラメータの事後分布を求め,
    パラメータをサンプリングする
  - 同様に事後分布から順々にサンプ
- Metropolis-Hastings Sampling
  - あるパラメータに対する尤度を計算
  - パラメータをある方向(ランダムに)
    - 基本的には
      - 尤度が大きくなるようならその方向
      - 尤度が小さくなるようなら、逆方向に
    - 実際は一様乱数との大小で採択を決



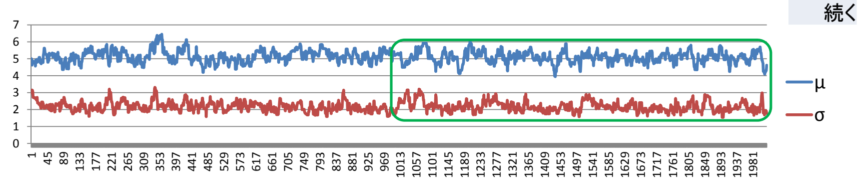
- 前の状態に基づいて(Markov Chain)新しいパラメータをランダムにサンプリング(Monte Carlo)する

平均値も計算可能

- 例
  - 平日一日の平均トリップ数が右の表のように与えられる
  - 分散の事前分布を逆ガンマ，平均値の事前分布を正規分布とする

6.0
8.1
7.2
3.9
4.5
2.5
6.6
4.1
2.0
5.5
続く

メトロポリス法のMCMCで平均値と分散の分布を計算してみる



- この時μとσの平均値は単純に平均で計算可能で5.01と2.17(※1000まで廃棄)

ロジット・プロビットモデルのMCMC推定プログラム(兵藤2009)

```
library(MCMCpack)
###データファイルの読み込み
Dat<-read.csv("H:/2014/data.csv",header=TRUE)
hh<-nrow(Dat) ##データ数:Data の行数を数える
  rtime <- Dat[, 6]/100; btime <- Dat[, 9]/100; ctime <- Dat[,12]/100
  rcost <- Dat[, 7]/100; bcost <- Dat[,10]/100; ccost <- Dat[,13]/100
  raged <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); baged <- 1*(Dat[,3]>=6); caged <- raged
  rcar  <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); bcar <- rcar; ccar <- 1*(Dat[,4]>=2)
##選択結果
  ch <- matrix(0,nrow=hh,ncol=3)
  colnames(ch) <- c("1", "2", "3")
  for (i in 1:hh){
    if (Dat[i, 5]==0) ch[i,1] <- -999
    if (Dat[i, 2]==1) ch[i,1] <- 1
    if (Dat[i, 8]==0) ch[i,2] <- -999
    if (Dat[i, 2]==2) ch[i,2] <- 1
    if (Dat[i,11]==0) ch[i,3] <- -999
    if (Dat[i, 2]==3) ch[i,3] <- 1
  }
post <- MCMCmnl(ch ~
  choicevar(rtime, "time", "1") +
 choicevar(btime, "time", "2") +
 choicevar(ctime, "time", "3") +
  choicevar(rcost, "cost", "1") +
  choicevar(bcost, "cost", "2") +
  choicevar(ccost, "cost", "3") +
  choicevar(raged, "aged", "1") +
  choicevar(baged, "aged", "2") +
  choicevar(caged, "aged", "3") +
  choicevar(rcar , "car" , "1") +
  choicevar(bcar , "car" , "2") +
  choicevar(ccar , "car" , "3") ,
  baseline="3", burnin=1000,
  mcmc.method="RWM",
  b0=0, B0=0, seed=2348,
  verbose=1000, mcmc=10000, B=0.001)
plot(post)
summary(post)
```

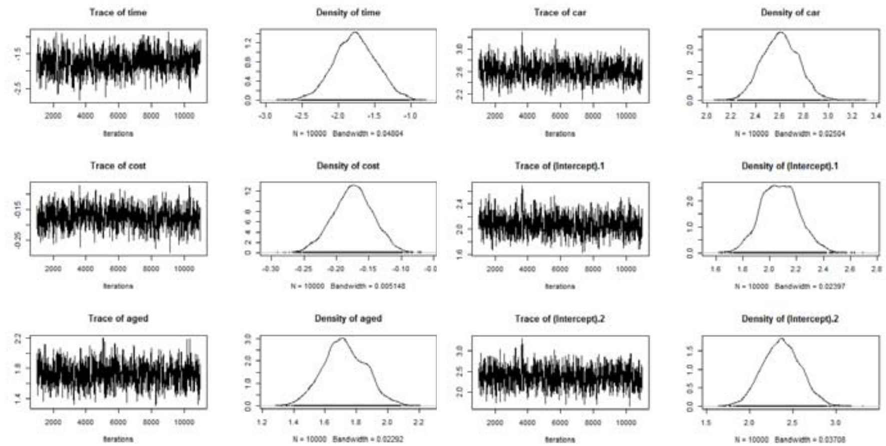
ロジット

```
library(bayesm)
###データファイルの読み込み

Dat<-read.csv("h:/2014/data.csv",header=TRUE)
hh<-nrow(Dat) ##データ数:Data の行数を数える
alt <- 3
  rtime <- Dat[, 6]/100; btime <- Dat[, 9]/100; ctime <- Dat[,12]/100
  rcost <- Dat[, 7]/100; bcost <- Dat[,10]/100; ccost <- Dat[,13]/100
  raged <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); baged <- 1*(Dat[,3]>=6); caged <- raged
  rcar  <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); bcar <- rcar; ccar <- 1*(Dat[,4]>=2)
  cres <- Dat[,2]
na <- 4
Xa <- cbind(rtime,btime,ctime,rcost,bcost,ccost,raged,baged,caged,rcar,bcar,ccar)
nd <- 0
X <- createX(alt, na=na, nd=nd, Xa=Xa, Xd=NULL, DIFF=TRUE, base=3)
dat1 <- list(p=alt, y=cres, X=X)
mcmc1 <- list(R=5000,k=1)
res1 <- rmnpGibbs(Data=dat1, Mcmc=mcmc1)
 plot(res1$betadraw)
 plot(res1$sigmadraw)
```

プロビット

推定例(MHアルゴリズムでロジット)



兵藤　2009を用いた

ベイズ推定のメリットデメリット

- メリット
  - 解析的にはパラメータが求まらない複雑なモデルもパラメータ分布が求まる
    - 例：パネルデータの個人モデルを考慮した階層モデル
  - パラメータの分布がわかる
    - 多峰性の分布になったならばモデル構造を考え直す
- デメリット
  - 時間がかかる
    - MNLの推定　MCMC：15秒　最尤推定：7秒
  - パラメータの分布が収束しない場合もある

参考文献等

- 入門ベイズ統計学　松原望
- ベイズモデリングによるマーケティング分析　照井伸彦
- R による離散選択モデルの推定方法メモ　兵藤哲朗