効用最大化理論と確率的意思決定モデル

愛媛大学
倉内慎也

はじめに

- 行動は選択の帰結
- 行動のモデル化≒選択のモデル化
- 選択の種類
  - ✓ 連続量の選択　例）ある場所での滞在時間
  - ✓ 離散量の選択　例）交通手段，目的地，経路
- 離散量の選択を表すモデルとして，ランダム効用最大化に基づく非集計離散選択モデル，を説明する
  - ✓ ロジットモデル，プロビットモデル，ネスティッドロジットモデル

合理的選択と効用最大化

合理的選択

完備性：*{車，鉄道}→（車≧鉄道）and/or（鉄道≧車）*

推移性：*（車＞バス）&（バス＞鉄道）⇔（車＞鉄道）*

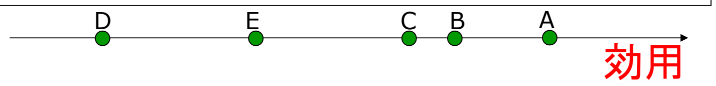
複数の選択肢を選好（望ましさ）の順に並べることができる

例）{A,B,C,D,E}

(A>B), (B>C), (C>D), (D<E), (C>E)

↓

(A>B>C>E>D)



効用最大化：「人は最大の効用を与える選択肢を選ぶ」

Aさん：車を選択⇔U（車）＞U（バス），U（鉄道）

ランダム効用（1）

効用を構成する要因　(例)交通手段選択

- 代替案の属性：料金，所要時間，乗換え回数etc.
- 個人属性：性別，年齢，免許の有無etc.
- トリップ属性：トリップ目的，時間帯etc.

$$
\begin{aligned}
U(car) &= \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * \cos t_{car} + \beta_5 * carown &+\varepsilon_{car}\\
U(bus) &= \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * \cos t_{bus} + \beta_6 * age60 &+\varepsilon_{bus}\\
U(rail) &= \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} &+\varepsilon_{rail}
\end{aligned}
$$

確定項（V）　誤差項

分析者にとって意思決定者のもつ真の効用は不明

→ランダム（誤差）項を用いて効用を確率的に表す

ランダム効用(2)

<u>誤差項に含まれるもの</u>

- 非観測属性：快適性，移動の自由度etc.
- 測定誤差：駅までのアクセス時間etc.
- 情報の不完全性：認知所要時間と実際の所要時間のずれetc.
- Instrumental (proxy) variables:

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} + \beta_5 * conf_{rail}$$

$$conf_{rail} = \beta_5' * \underline{seat_{rail}} + \nu$$

confの代理変数

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} + \beta_5'' * seat_{rail} \underbrace{+ \beta_5 * \nu}_{\varepsilon}$$

ランダム効用(3)

<u>誤差項に含まれるもの</u>

- 非観測異質性：快適性，移動の自由度etc.

$$U(rail) = \beta_n * time_{rail}$$

$$\beta_n = \bar{\beta} + \underline{v_n}$$

観測不可能な嗜好の異質性

$$U(rail) = \bar{\beta} * time_{rail} \underbrace{+ v_n * time_{rail}}_{\varepsilon}$$

$$U(rail) = \beta_n * time_{rail}$$

$$\beta_n = \underline{\alpha * income_n} + v_n$$

観測可能な嗜好の異質性

$$U(rail) = (\alpha * income_n) * time_{rail} \underbrace{+ v_n * time_{rail}}_{\varepsilon}$$

- 効用最大化以外の意思決定ルールによる影響:

$$U(car) = \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * \cos t_{car} + \beta_5 * carown + \varepsilon_{car}$$

$$U(bus) = \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * \cos t_{bus} + \beta_6 * age60 + \varepsilon_{bus}$$

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

誤差項の分布とモデル(1)

$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$

$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

誤差項は確率的に変動
→分析者から見て効用が最大となる選択肢は確率的
→分析者から見た意思決定者の選択行動は確率的

$$choice = car \Leftrightarrow U(car) > U(rail)$$

$$\Leftrightarrow V_{car} + \varepsilon_{car} > V_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

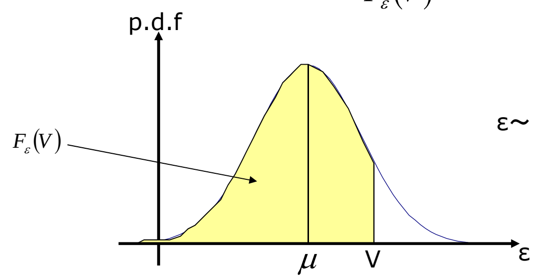
$$\Leftrightarrow \varepsilon_{rail} - \varepsilon_{car} < V_{car} - V_{rail}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < V$$

誤差項の分布とモデル(2)

$$\Pr ob(choice = car) = \Pr ob(\varepsilon < V)$$

$$= F_\varepsilon(V)$$



$\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$

選択確率はεとVに依存

誤差項の分布とモデル(3)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

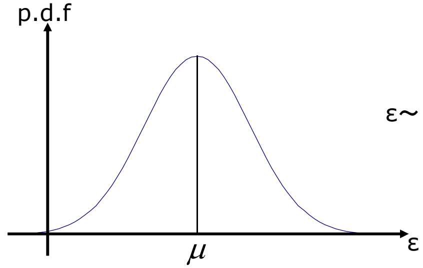
εの分布形は？

ε～IIDガンベル分布	→	多項ロジットモデル
ε～一般化極値(GEV)分布	→	GEVモデル (NL,PCL,CNL,GNL等)
ε～多変量正規分布	→	多項プロビットモデル
ε～ GEVと正規分布などの合成分布	→	ミックストロジットモデル

多項プロビット(MNP)モデル(1)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布



ε～ $N(\mu, \sigma^2)$

εが非常に多くの要因を含む
→中心極限定理より分布の正規性は意味あり

多項プロビット(MNP)モデル(2)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$U(car) = \beta X_{car} + \theta_{car}\varepsilon_{delay} + \varepsilon_{car,other}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \theta_{bus}\varepsilon_{delay} + \omega_{bus}\varepsilon_{access} + \varepsilon_{bus,other}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \omega_{rail}\varepsilon_{access} + \varepsilon_{rail,other}$$

Cov(U)

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{car} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma^2_{rail} \end{bmatrix}$$

εは互いに分散が異なり相関も持つ
→多変量正規分布は最も一般的

多項プロビット(MNP)モデル(3)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Sigma^{-1}\varepsilon'\right)$$

- Open-formのため計算コストが高い
- Identificationの問題から推定可能なパラメータは限られており解釈が困難

多項ロジット(MNL)モデル(1)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε~IIDガンベル分布

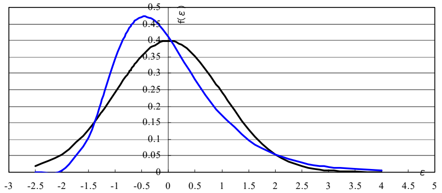


図2.1　正規分布とガンベル分布の確率密度関数

正規分布に似ている
→特に2項ロジットモデルは2項プロビットモデルとほとんど同じ

多項ロジット(MNL)モデル(2)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε~IIDガンベル分布

$$\boxed{P(car) = \frac{\exp(\mu V(car))}{\exp(\mu V(car)) + \exp(\mu V(bus)) + \exp(\mu V(rail))}}$$

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

Cov(U)

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

- シェア型モデルであるため直感的にわかりやすい
- closed-formのため計算コストが安い

ロジットモデルとIIA特性

- 無関係な選択肢からの選択確率の独立
（Independence from Irrelevant Alternatives）

$$P(i|C) = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(V_j)}$$

$$\frac{P(i|C)}{P(j|C)} = \frac{\exp(V_i)}{\exp(V_j)} = \frac{P(i|A)}{P(j|A)} \qquad i, j \in A \subseteq C$$

$$P(car):P(bus) = 2:1, P(bus):P(rail) = 1:1$$
$$\Updownarrow$$
$$P(car) = \frac{1}{2}, P(bus) = \frac{1}{4}, P(rail) = \frac{1}{4}$$

IIA特性の利点

- 選択肢の全集合を考える必要がないため調査設計が楽(一対比較を考えればよい)

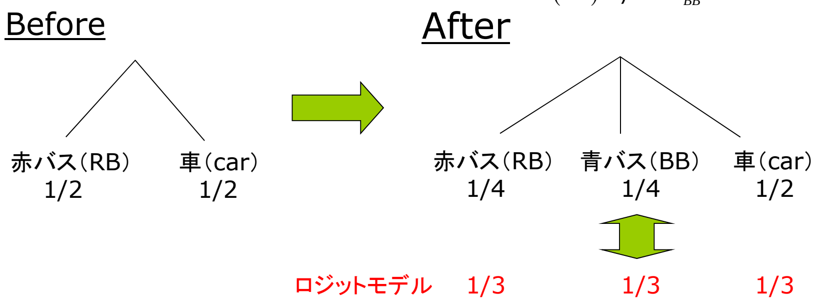
- 選択肢の部分集合を用いて推定してもパラメータ推定値にバイアスが生じない
 →推定計算が楽(選択肢集合が大きい/不確定な場合)
 例)ゾーン数400の目的地選択
 実際に選択した目的地＋残り399の中から9個をランダムサンプリングして推定

- 代替案の追加や削除が容易
 →新規代替案の影響評価などが簡単

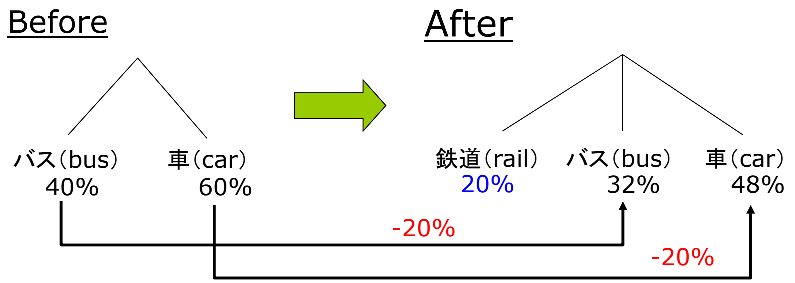
IIA特性の問題点(1) ～赤バス/青バス問題～

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$



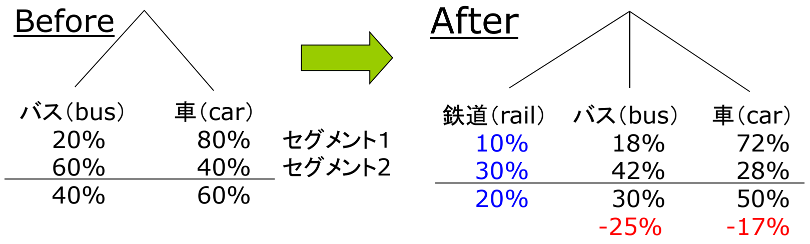
IIA特性の問題点(2)



交差弾性値が等しい

IIA特性を避けるには？

●効用関数の確定項をより良く特定化する
・説明変数を加える
・異質性を考慮



●IIAテストを実行する
●誤差項の相関構造を考慮したモデルを適用する

ネスティッドロジットモデル(1)

- 目的地・交通手段選択の例
  - 目的地選択の選択肢d: d={C:中心部, S:郊外}
  - 手段選択の選択肢m: m={A:自動車, R:鉄道}
- 同時選択の選択肢dmの効用関数

$$U_{dm} = V_d + V_m + V_{dm} + \varepsilon_d + \varepsilon_m + \varepsilon_{dm}$$

  - V_d : 目的地選択肢dに固有な効用の確定項　例)店舗密度
  - V_m : 手段選択肢mに固有な効用の確定項　例)自動車保有D
  - V_{dm} : 目的地選択肢dと手段選択肢mの組み合わせで決まる効用の確定項　例)所要時間

ネスティッドロジットモデル(2)

- 同時選択の選択肢*dm*の効用関数

$$U_{dm} = V_d + V_m + V_{dm} + \varepsilon_d + \varepsilon_m + \varepsilon_{dm}$$

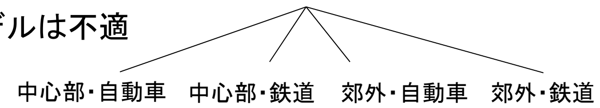
  - ε_d :目的地選択肢*d*に固有な効用の誤差項
  - ε_m :手段選択肢*m*に固有な効用の誤差項
  - ε_{dm} :目的地選択肢dと手段選択肢mの組み合わせで決まる効用の誤差項
- 誤差項に関する仮定
  - ε_m : $Var(\varepsilon_m) = 0$
  - ε_d : $\max_{m \in \{A,R\}} U_{dm}$ がスケールパラメータ μ^d をもつガンベル分布
  - ε_{dm} :スケールパラメータ μ^mをもつIIDガンベル分布

ネスティッドロジットモデル(3)

- 同時選択の選択肢*dm*の効用関数

$$U_{dm} = V_d + V_m + V_{dm} + \varepsilon_d + \varepsilon_{dm}$$

- 選択肢間の相関
  - 中心部(*C*)に自動車(*A*): $U_{CA} = V_C + V_A + V_{CA} + \varepsilon_C + \varepsilon_{CA}$
  - 中心部(*C*)に鉄道(*R*): $U_{CR} = V_C + V_R + V_{CR} + \varepsilon_C + \varepsilon_{CR}$
  - 郊外(*C*)に自動車(*A*): $U_{SA} = V_S + V_A + V_{SA} + \varepsilon_S + \varepsilon_{SA}$
  - 郊外(*C*)に鉄道(*R*): $U_{SR} = V_S + V_R + V_{SR} + \varepsilon_S + \varepsilon_{SR}$
  - Joint Logitモデルは不適



ネスティッドロジットモデル(4)

- 同時選択の選択肢*dm*の効用関数

$$U_{dm} = V_d + V_m + V_{dm} + \varepsilon_d + \varepsilon_m + \varepsilon_{dm}$$

- 乗法定理

$$P(d,m) = P(m|d)P(d)$$

- 周辺確率 $P(d)$

$$P(d) = \Pr\left[\max_{m \in \{A,R\}} U_{dm} \geq \max_{m \in \{A,R\}} U_{d'm}, d \neq d'\right]$$

$$= \Pr\left[\begin{array}{l} V_d + \varepsilon_d + \max_{m \in \{A,R\}}(V_m + V_{dm} + \varepsilon_{dm}) \\ \qquad \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + \max_{m \in \{A,R\}}(V_m + V_{d'm} + \varepsilon_{d'm}), d \neq d' \end{array}\right]$$

ネスティッドロジットモデル(5)

- 周辺確率

$$P(d) = \Pr\left[\begin{array}{l} V_d + \varepsilon_d + \max_{m \in \{A,R\}}(V_m + V_{dm} + \varepsilon_{dm}) \\ \qquad \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + \max_{m \in \{A,R\}}(V_m + V_{d'm} + \varepsilon_{d'm}), d \neq d' \end{array}\right]$$

- 誤差項に関する仮定
  - ε_{dm} :スケールパラメータ μ^mをもつIIDガンベル分布
- $\max_{m \in \{A,R\}}(V_m + V_{dm} + \varepsilon_{dm})$ はガンベル分布に従う
  - スケールパラメータ: μ^m
  - ロケーションパラメータ: $V'_d = \frac{1}{\mu^m} \ln \sum_{m \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}$

ネスティッドロジットモデル(6)

- 周辺確率

$$P(d) = \Pr\left[V_d + \varepsilon_d + V'_d + \varepsilon'_d \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + V'_{d'} + \varepsilon'_{d'}, d \neq d'\right]$$

$$\varepsilon'_d \equiv \max_{m \in \{A,R\}} \left(V_m + V_{dm} + \varepsilon_{dm}\right) - V'_d$$

- 誤差項に関する仮定
  - ε_d : $\max_{m \in \{A,R\}} U_{dm}$ がスケールパラメータ μ^d をもつガンベル分布
  - $\varepsilon_d + \varepsilon'_d$ はスケールパラメータ μ^d をもつガンベル分布
- 周辺確率

$$P(d) = \frac{\exp\{\mu^d (V_d + V'_d)\}}{\sum_{d' \in \{C,S\}} \exp\{\mu^d (V_{d'} + V'_{d'})\}} \quad V'_d = \frac{1}{\mu^m} \ln \sum_{m \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}$$

ネスティッドロジットモデル(7)

- 同時選択の選択肢*dm*の効用関数

$$U_{dm} = V_d + V_m + V_{dm} + \varepsilon_d + \varepsilon_m + \varepsilon_{dm}$$

- 乗法定理

$$P(d,m) = P(m|d)P(d)$$

- 条件付き確率 $P(m|d)$

$$P(m|d) = \Pr\left[U_{dm} \geq U_{dm'}, m \in \{A,R\}, m \neq m' | d\right]$$
$$= \Pr\left[V_m + V_{dm} + \varepsilon_{dm} \geq V_{m'} + V_{dm'} + \varepsilon_{dm'} m \neq m' | d\right]$$

- 誤差項に関する仮定
  - ε_{dm} :スケールパラメータ μ^m をもつIIDガンベル分布

ネスティッドロジットモデル(8)

- 条件付き確率 $P(m|d)$

$$P(m|d) = \frac{\exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}}{\sum_{m' \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_{m'} + V_{dm'})\}}$$

- 同時確率

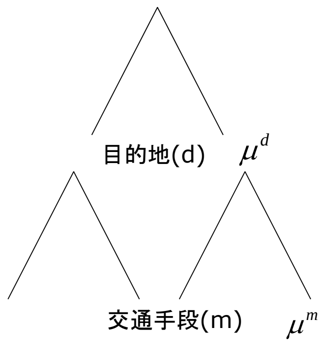
$$P(d,m) = P(m|d)P(d)$$
$$= \frac{\exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}}{\sum_{m' \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_{m'} + V_{dm'})\}} \frac{\exp\{\mu^d (V_d + V'_d)\}}{\sum_{d' \in \{C,S\}} \exp\{\mu^d (V_{d'} + V'_{d'})\}}$$

$$V'_d = \frac{1}{\mu^m} \ln \sum_{m \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}$$

ネスティッドロジットモデル(9)

誤差項の相関構造

$$P(d,m) = P(m|d)P(d)$$
$$= \frac{\exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}}{\sum_{m' \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_{m'} + V_{dm'})\}} \frac{\exp\{\mu^d (V_d + V'_d)\}}{\sum_{d' \in \{C,S\}} \exp\{\mu^d (V_{d'} + V'_{d'})\}}$$



$$V'_d = \frac{1}{\mu^m} \ln \sum_{m \in \{A,R\}} \exp\{\mu^m (V_m + V_{dm})\}$$

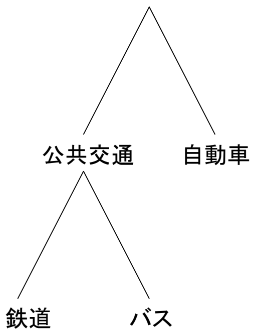
ログサム変数

目的地dのグループに含まれる交通手段から得られる効用の最大値の期待値

$$Var(\varepsilon_d + \varepsilon'_d) > Var(\varepsilon_{dm}) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\mu^d}{\mu^m} \leq 1$$

ネスティッドロジットモデル(10)

NLモデルの誤差構造



Cov(U)

$$\begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2_{transit} & 0 \\ \sigma^2_{transit} & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

等分散

無相関

一般的な誤差構造(MNPモデル)

$$\begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma^2_{rail} & \sigma_{rail,bus} & \sigma_{rail,car} \\ \sigma_{rail,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,car} \\ \sigma_{rail,car} & \sigma_{bus,car} & \sigma^2_{car} \end{bmatrix}$$

ミックストロジット(MXL)モデル(1)

プロビットモデルの柔軟な誤差構造

$$\begin{aligned} U_{car} &= \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car} \\ U_{bus} &= \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus} \\ U_{rail} &= \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail} \end{aligned} \quad \varepsilon$$

ロジットモデルの操作性

プロビットタイプのフレキシブルな誤差項

IIDガンベル分布

η　　ν

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma^2_{car} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma^2_{rail} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

ミックストロジット(MXL)モデル(2)

$$\begin{aligned} U_{car} &= \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car} \\ U_{bus} &= \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus} \\ U_{rail} &= \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail} \end{aligned}$$

ロジットモデルの操作性

IIDガンベル分布

$$\Lambda(car|\eta) = \frac{e^{\beta X_{car}+\eta_{car}}}{e^{\beta X_{car}+\eta_{car}} + e^{\beta X_{bus}+\eta_{bus}} + e^{\beta X_{rail}+\eta_{rail}}}$$

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

ηは*unknown*

ミックストロジット(MXL)モデル(3)

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

open-form→どうやって推定？

シミュレーション法

$$\hat{P}(car) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^{D} \frac{e^{\beta X_{car}+\eta^d_{car}}}{e^{\beta X_{car}+\eta^d_{car}} + e^{\beta X_{bus}+\eta^d_{bus}} + e^{\beta X_{rail}+\eta^d_{rail}}}$$

Step1: 分布f(η)に従う乱数ηを発生
Step2: それを用いて選択確率を計算
Step3: これをD回繰り返し選択確率の平均値を計算
Step4: それを尤度として最尤推定法により未知パラメータを推定