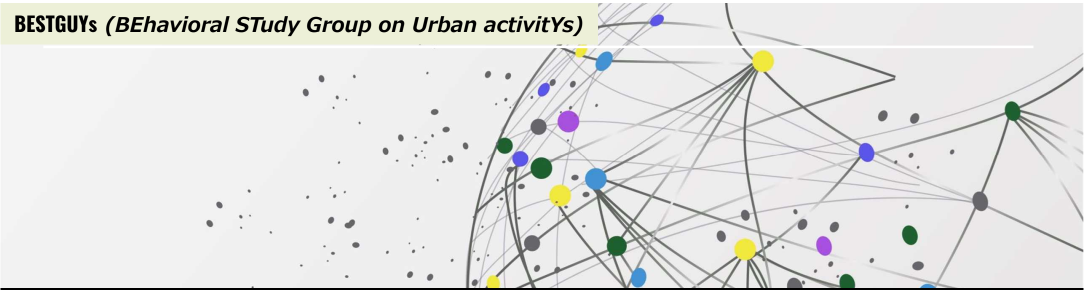
BESTGUYs *(BEhavioral STudy Group on Urban activitYs)*



行動モデルの基礎
推定の方法

知恵のかりもの

佐々木邦明（早稲田大学）

多項ロジット（MNL）モデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

<u>ε～IIDガンベル分布</u>

$$P(car) = \frac{\exp(\mu V(car))}{\exp(\mu V(car)) + \exp(\mu V(bus)) + \exp(\mu V(rail))}$$

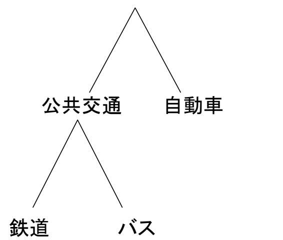
$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

<u>Cov(U)</u> $\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$ $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$

提供：倉内先生

ネスティッドロジットモデル

NLモデルの誤差構造



<u>Cov(U)</u>

$$\begin{array}{l} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2_{transit} & 0 \\ \sigma^2_{transit} & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

等分散

無相関

提供：倉内先生

ミックストロジット（MXL）モデル

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

ロジットモデルの操作性

IIDガンベル分布

$$L(car|\eta) = \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}}}$$

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

提供：倉内先生

最尤推定

死にゲー

行動モデルの推定と最尤推定

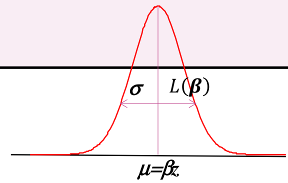
有限個のパラメータで記述される確率密度関数の推定

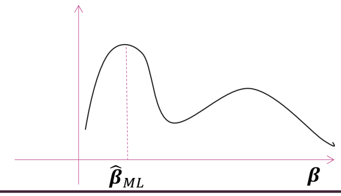
パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$，モデル f による標本の生起確率を尤度とする

- $L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{\beta})$

(対数)尤度関数が最大になる$\boldsymbol{\beta}$を最尤推定値とする

- $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmax}} \log L(\boldsymbol{\beta})$





最尤推定法

点推定量を求める一般的な方法

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\beta}|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\beta})$$

上の式をβの関数とみなしたものが尤度関数

平均値の推定を例にするとデータ(**x : 3,5,4**)が得られたとき，平均をいくつとするのがよいか？

そうだ．逆に考えるんだ！

平均がいくつの分布だったらデータ(**x : 3,5,4**)がもっとも得られやすいか？

ロジットモデルの最尤推定

$$L(\mu\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{y}_i|\mu\boldsymbol{\beta})$$

βは未知数
x は観測値

$$f(\boldsymbol{y}_i|\mu\boldsymbol{\beta}) = \prod_{j=1}^{J} \left\{ \frac{exp(\mu\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_{ij})}{\sum_{j=1}^{J} exp(\mu\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_{ij})} \right\}^{y_{ij}}$$

$$V_{ij} = \mu\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}_{ij}$$
$$= \mu\beta_1 + \mu\beta_1 x_{1i} + \mu\beta_2 x_{2i} \cdots + \mu\beta_K x_{Ki}$$

選択結果(y_i ： y_1=車，y_2=車，y_3=鉄道，y_4=鉄道，y_5=鉄道，y_6=車，・・)が得られたとき，

$\mu\boldsymbol{\beta}$がいくつだとデータへの適合がよいか？

データ(**y**)が得られやすいμ$\boldsymbol{\beta}$は？

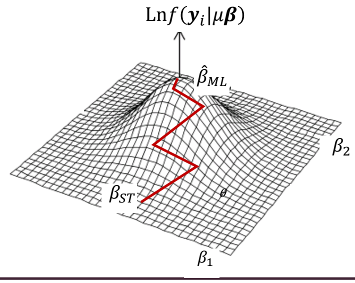
一番**L**が大きくなるμ$\boldsymbol{\beta}$を探す

最大化アルゴリズムの考え方

周りがあまり見えない中で，近傍の情報から頂点を目指す

対数尤度関数の段階的な最大化

- 初期値を与える
- 初期値周りで勾配(1次微分）等を用いて次の推定値の方向を決める
- 初期値付近で１次微分，２次微分を用いて適切に次の点を決めて推定値を得る
- 収束基準(一次微分ベクトル)で判定し，収束していない場合は，現在の値から次の推定値に移る



代表的な繰り返し計算法

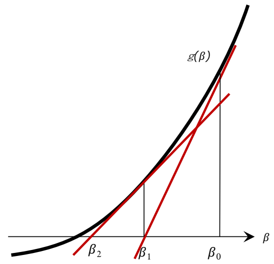
尤度関数を最大化　尤度関数の一階微分＝０を解く

Newton-Raphson法

- テイラー展開の１次近似を利用して進める

準Newton法（BFGS，L-BFGS法）

- ヘッセ行列を，パラメータの差分と一階微分の差分を用いて逐次近似する．
- L-BFGSはヘッセ行列の更新式を展開して，初期値と差分の関数和で表す．



$$\beta_{n+1} = \beta_n - H^{-1}\beta_{\mathrm{n}-1}$$

H:尤度関数の二階微分　ヘッセ行列
g：尤度関数の一階微分

パラメータ推定がうまくいかない

収束するとはβn+1とβnが同じになる

- g’が0になる

収束しない

- 無限に繰り返す
- βが計算不能

局所最適解

- 見かけ上の最大化

H^-1ヘッセ行列の逆行列が早々に死亡

変数が完全相関

変数が効用関数に影響しないモデル

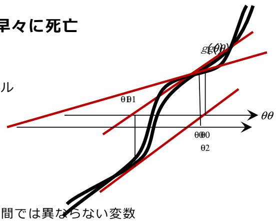
関数の近似状況

初期値の問題

モデルに問題あり

意思決定者間で異なるが，選択肢間では異ならない変数

選択肢間では異なるが，意思決定者間で異ならない変数



モデル選択

高難易度

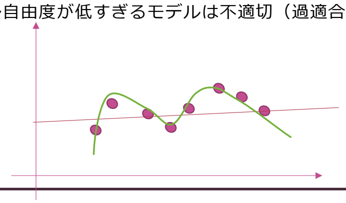
最尤推定法におけるモデル選択

真の確率密度関数を近似するものが含まれる必要がある

⇒フレキシブルなモデルを選ぶ

最尤推定は自由度の高さ前提

⇒自由度が低すぎるモデルは不適切（過適合）



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AIC} = -\sum_{i=1}^{n} \log f\left(x_i, \hat{\theta}_{ML}\right) + t$$

平均対数尤度の比較（KL情報量）

- 例：共分散行列を考える

  (非)制約モデル（A対称行列，B対角行列，C対角行列で分散同一）を考えるとCはBに含まれ，BはAに含まれるので，平均対数尤度L*は必ず

  L*(A)≧L*(B)≧L*(C)になる．

パラメータ推定と過学習

機械学習における学習

- 判断の根拠となるための統計的なモデルを作る過程

機械学習の主な目的は「予測」

- ある移動手段がどの程度選ばれそうか
- ある個人が車を購入しそうか

仮説に基づく制約をモデルとして導入せず，予測精度が上がるようにモデルを自由に作る

政策分析の方法

ストーリー性

行動モデルを用いた政策分析

行動モデルを推定し，そのパラメータを用いて，変数の変化による選択の変化を見る．

政策：変数の変化

- 例えば：**所要時間**を短縮，**駐車場の料金**を割り引く等，政策に対応した変数が必要

政策評価

- 数え上げ法：個人の選択確率を予測して，積み上げる　$S(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(j)$

  最大効用の選択肢をカウント

  確率の平均値を求める

シミュレーションによる政策分析

行動モデルを推定し，そのパラメータを用いて，変数の変化による選択の変化を見る．

回遊行動の分析

- マイクロシミュレーションを用いることで，複雑なモデルの組み合わせを政策評価可能
- シミュレーションなので，複数回実施して平均的な評価を行う

Step 1

サンプルのデータ，個人属性や発ゾーン，LOSデータなどを各段階のモデルに個人nの個人属性やLOS，各種ダミー等といった説明変数データを代入し，全ての選択肢ごとの選択確率P_{in}を求める．求めた選択確率から確率分布F_{in}を作成する．

Step 2

[0,1]の一様乱数γ_nを発生させ，γ_nの値が，$F_{(i-1)n} \leq \gamma_n < F_{in}$を満たす選択肢$i$を選択するものとする．