2024年9月11日

第23回 行動モデル夏の学校

# 行動モデルの応用：推定の高度化

東京理科大学　創域理工学部　社会基盤工学科

柳沼 秀樹

yaginuma@rs.tus.ac.jp

# 行動モデル構築の流れ

# 離散選択モデル構築の流れ

1. **コンセプトの設定**
   - 対象の明確化：どのような現象を記述・予測したいのか？
     なにを明らかにしたいのか？
   - 施策の明確化：どのような施策を検討したいのか？

**超大事！**

2. **モデルの設定**
   - 選択肢：どのような選択肢があるのか？離散/連続なのか？
   - 選択肢集合：選択可能性(choice availability)は考慮しているか？
   - モデル選択：適切なモデルは何か？

**腕の見せ所！**
**楽しみ所！**

3. **効用関数の特定化（specification）**
   - 「関数形状の選択」と「変数・係数の設定」は適切か？
4. **パラメータ推定と統計的有意性の確認（estimation）**
   - 適切なパラメータ推定方法を使っているか？
   - モデルの当てはまりや変数の統計的な性質を確認しているか？
5. **現況再現・予測（verification/validation V&V）**
   - Verification: 想定どおりのモデルか?
   - Validation: 予測に使えるモデルか?

**丁寧に！慎重に！**
**Gian先生資料見ろ！**

**粘り強く試行錯誤を繰り返してブラッシュアップ！**

# 効用関数の形状

## 線形効用関数

線形加法和で表現（最も一般的な定式化）

$$V_{in} = \sum_{k=1}^{K} \theta_k x_{ink}$$

$x_{ink}$: 個人$n$の選択肢$i$の$k$番目の特性（変数）
$\theta_k$：$k$番目の特性（変数）の未知パラメータ

## 対数線形効用関数

線形加法和の特殊例でコブ・ダグラス型と呼ばれる

$$V_{in} = \sum_{k=1}^{K} \theta_k \ln(x_{ink})$$

$\ln(x_{ink}) = x_{ink}$とすれば線形関数と同じ
→ これらはコードの変更なく推定可能

## CES型効用関数

未知パラメータ$\gamma$の値によって関数の形状が変化する一般的な関数

$$V_{in} = -\frac{1}{\gamma} \ln\left(\sum_{k=1}^{K} \theta_k x_{ink}^{-\gamma}\right)$$

$\gamma = -1$：線形
$\gamma = 0$　：対数線形
$\gamma = \infty$　：L字型

**線形が基本だが現象や基礎集計結果に合わせて選択**

# 変数とパラメータの設定



## 変数の選択

- **サービスレベル変数(LOS)**：選択肢毎に定義される変数
  選択肢間で値が変化する（ex 料金，所要時間）
- **社会経済変数(SE)**：選択肢に依存しない変数
  選択肢間で値が変化しない（ex 性別，年齢，免許の有無）
- **定数項**：説明変数では表現しきれない選択肢固有の効用値.
  選択肢固有ダミーのパタメータと解釈できる

※理論的・経験的に重要な変数や政策変数は効用関数に導入する

## パラメータの設定

- **選択肢共通係数(generic coefficients)**：
  選択肢間で共通のパラメータを設定
  （例：鉄道と自動車で費用の係数は同じ）
- **選択肢固有係数(specific coefficients)**：
  選択肢で固有のパラメータを設定
  （例：鉄道と自動車で費用の係数は違う）

**変数選択とパラメータ設定が特定化のキモ！**

# 変数とパラメータの設定（補足）



例：交通機関の選択（自動車・鉄道・バスの3項選択）

**効用関数の特定化**

所要時間　費用　免許保有ダミー　女性ダミー

$$
\begin{aligned}
V_{車n} &= \beta_1 + \beta_3 t_{車n} + \beta_4 c_{車n} + \beta_5 l_n \\
V_{鉄道n} &= \beta_2 + \beta_3 t_{鉄道n} + \beta_4 c_{鉄道n} \\
V_{バスn} &= \beta_3 t_{バスn} + \beta_4 c_{バスn} + \beta_6 f_n
\end{aligned}
$$

**Specification Table**

| | 定数項(固有) | | 共通係数 | | 固有係数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_6$ |
| 車 | 1 | 0 | $t_{車}$ | $c_{車}$ | $l$ | 0 |
| 鉄道 | 0 | 1 | $t_{鉄道}$ | $c_{鉄道}$ | 0 | 0 |
| バス | 0 | 0 | $t_{バス}$ | $c_{バス}$ | 0 | $f$ |
| | ダミー変数 | | サービスレベル変数 | | 社会経済変数 | |

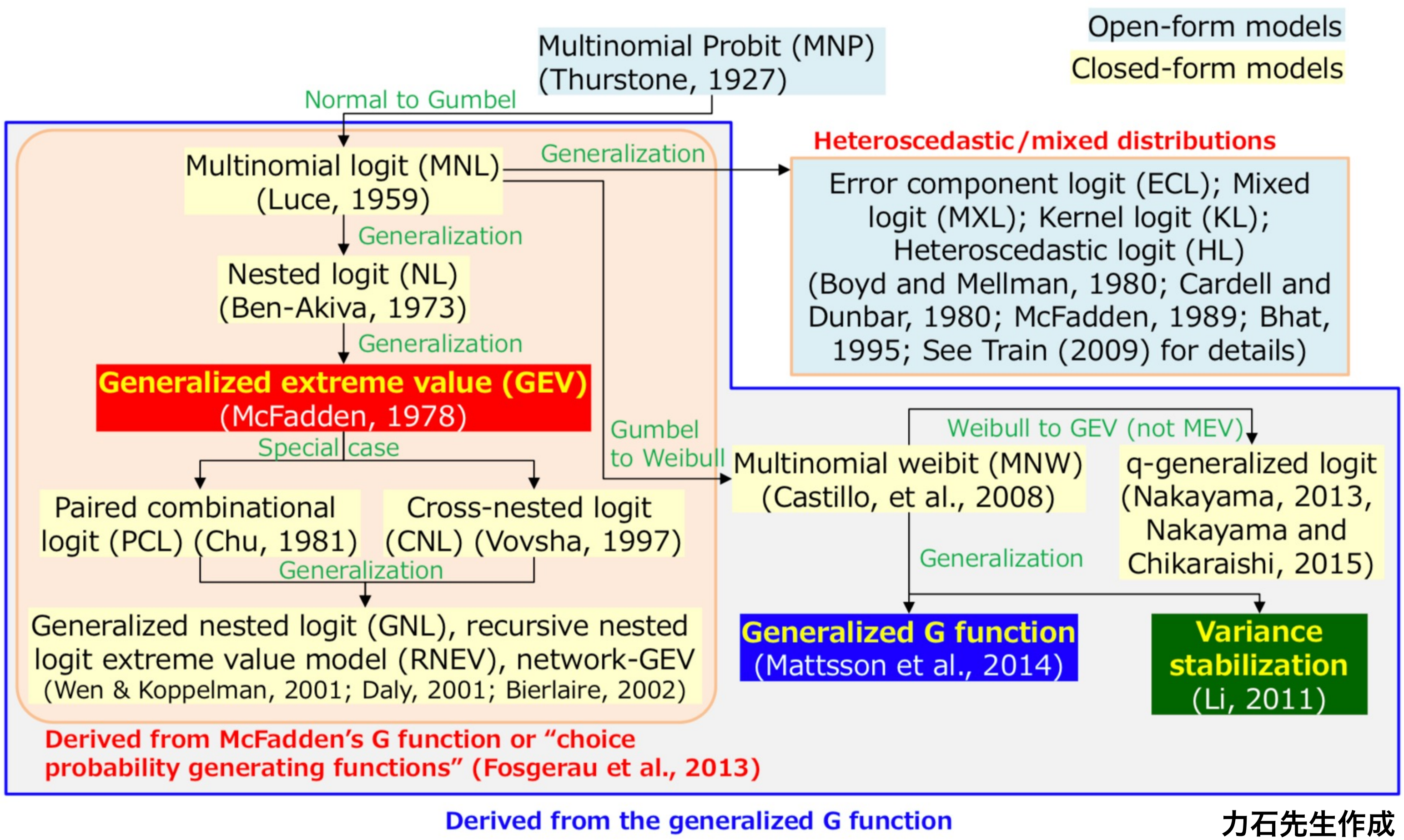
**なぜ全ての選択肢に定数項を入れないのか？（考えてみよう）**

# 発展的な行動モデルと推定手法

# 離散選択モデルのバリエーション



## 離散選択モデルの系譜＋最近の発展的なモデル




力石先生作成

＋

**動的選択：**動的離散選択モデル，Recursive Logit → 時間軸を考慮
**相互作用：**ゲーム論的行動モデル　→ 他者の影響を考慮
**機械学習：**次元圧縮，ニューラルネットワーク　→ 非線形な影響を考慮

# パラメータ推定手法のバリエーション

**Closed-form モデル**

**Open-form モデル**

積分計算に対応

## 最尤推定法 (MLE)

## EMアルゴリズム

多様な確率分布に対応

潜在クラスセグメントに対応

## ベイズ推定

動的＋相互作用に対応

## 構造推定（structural estimation)

- ✓ Heckman's 2-step
- ✓ Pseudo Maximum Likelihood
- ✓ Nested Fixed Point (NFXP)
- ✓ Nested Pseudo Likelihood
- ✓ MPEC

## 数値解析

- ✓ ニュートン・コーツ法
- ✓ シンプソン法（台形式）

## 解析的近似

- ✓ 級数近似
- ✓ クラーク近似
- ✓ MACML[1)]

## 確率的近似

- ✓ Maximum Simulated Likelihood（モンテカルロ積分，GHK …）
- ✓ MCMC[2)]（Gibbs, MH, HM …）

1) maximum approximate composite marginal likelihood
2) Markov chain Monte Carlo

**動的・相互作用モデル**

＋

## 機械学習（Machine Learning)

- ・バックプロパゲーション → NN型モデルの推定
- ・スパース推定（L1, L2など） → 変数選択
- ・変分近似 → 複雑な確率分布を近似
- ・転移学習 → モデル移転
- ・逆強化学習＋敵対的学習 → 多体な相互作用

# 小川さんの研究（現時点でかなり最先端な推定手法）

## 多様な交通手段間の相互作用＋安定的マルチモーダル学習

- ✓ 経路選択を**マルコフゲーム**（Recursive Logit; RLや敵対的逆強化学習: AIRLと関係）に基づいてゲーム論的均衡モデルとして定式化
- ✓ 都市内における“**歩行者経路選択**” vs “**自動車経路選択**” の相互関係を **Multi-Agent ALRL**（AIRL）として定式化
  → 相関均衡（LSBRE）を満たす報酬関数と方策関数を導入
- ✓ 高次元データ（画像など）から**多様な集約度**で特徴量を抽出
  → 特徴量生成を内生化したモデルと学習を一気通貫で可能

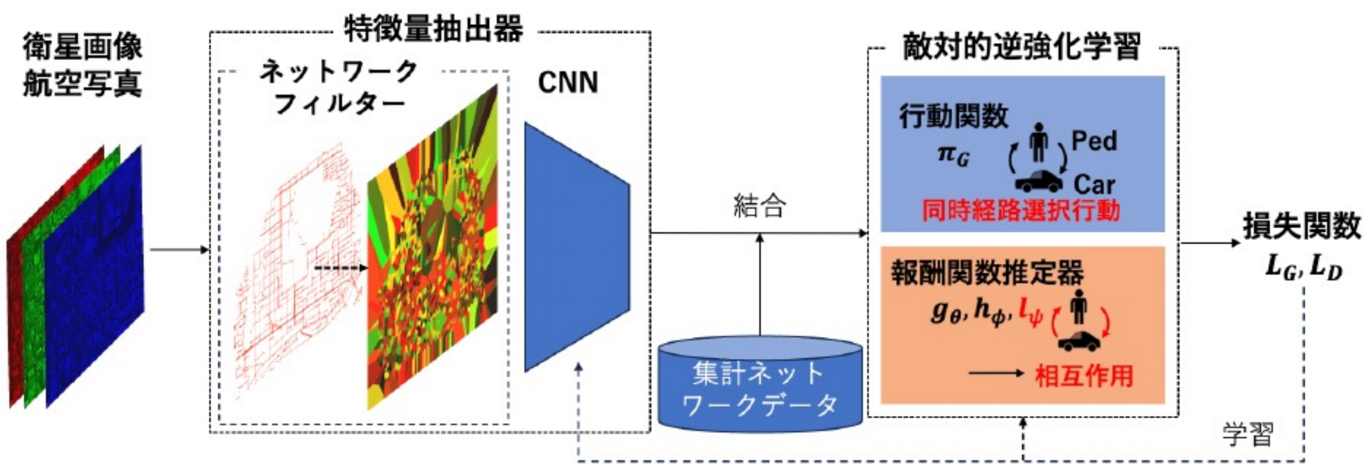



図-2 経路選択モデルに基づく画像データ特徴量抽出モデル

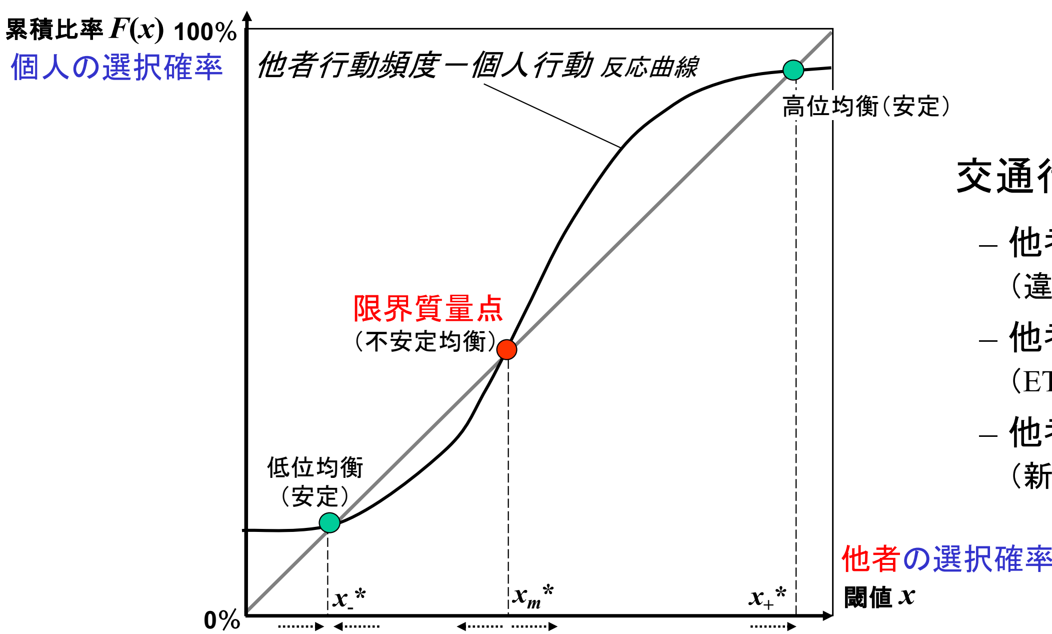
# ゲーム的行動モデルと構造推定

# 構造推定とは？

## 内生性を持つモデルのパラメータ推定

- ✓ 自身の選択が他者の選択に依存する状況（違法駐輪，混雑など）はゲーム論的（戦略的行動選択）な状況と考えられる
- ✓ 内生性によって選択モデルのパラメータを通常の最尤推定法などでは適切に推定できない

## 福田先生の社会的相互作用に関する研究（2004）




交通行動には相互作用が有意に働く

- 他者の行動への心理的同調圧力
  （違法駐輪・駐車，自動車利用・購入の自粛，政策受容…）
- 他者の行動が個人の経済的便益に影響
  （ETC車載器の購入，テレコミュニケーション…）
- 他者の行動を通じた社会的学習と規範・慣習の形成
  （新しい交通環境への適応…）

# ゲーム論的選択行動モデル



## 混雑を内生化した出発時刻選択モデル

✓ 出発時刻選択では，混雑を避ける選択が見られるが，そもそも混雑は自分を含む通勤者全体の選択行動の結果となっている
**→通勤者間の戦略的行動（ゲーム）として定式化**

### ➢<u>効用関数</u>

$$u_i^a = \beta X_i^a + \theta h_i(n_i) + \epsilon_i^a$$

1項は個人効用項 $X_i^a$ : 個人属性，$\beta$ : パラメータ

2項は相互作用項 $n_i$ : 利用者数，$\theta$ : パラメータ

3項はタイプ（誤差項）

➡ <u>私的情報</u>: 個人のみが知る情報
⇒ 分析者＋他プレイヤーはunknown

期待利用者数を<u>選択確率の総和</u>として定義

$$h_i(E_{\epsilon^{-a}}[n_i^{-a}]) = h_i\left(\sum_{-a \in N} p_i^{-a}\right)$$

### ➢<u>期待効用</u>

$$E_{\epsilon^{-a}}[u_i^a] = \beta X_i^a + \boxed{\theta h_i(E_{\epsilon^{-a}}[n_i^{-a}])} + \epsilon_i^a$$

他者のタイプベクトル $\varepsilon^{-a} = \{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^{a-1}, \varepsilon^{a+1}, \cdots \varepsilon^N\}$ に依存

# ゲーム論的選択行動モデル



## 混雑を内生化した出発時刻選択モデル

✓ ベイジアンナッシュ均衡としてLogit型の選択モデルとなり，さらに誤差項を分解すればMixed Logitとしても導出できる
→**Logit型の選択モデルとして導出可能**

➢ **Bayesian Nash Equilibrium**

$$s^a(\epsilon^a)^* \in \underset{s^a}{\operatorname{argmax}}\ E_{\epsilon^{-a}}[u_i^a]$$

期待利得が最大となる戦略を選択する

$$\Rightarrow\quad p_i^a = \mathrm{Prob}(E_{\epsilon^{-a}}[u_i^a] \geq E_{\epsilon^{-a}}[u_j^a])\ \forall j \neq i$$

➢ **選択確率**

Logit型選択モデル（Model 1）⇒全個人が従う

$$p_i^a = \frac{\exp(\beta X_i^a + \theta h_i(E_{\epsilon^{-a}}[n_i]))}{\sum_{j\in T}\exp(\beta X_j^a + \theta h_j(E_{\epsilon^{-a}}[n_j]))}$$

# 構造推定：NPL



## Nested Pseudo Likelihood

✓ 構造モデルから誘導モデルを導くことが困難，モデル内に選択確率が入れ子構造（内生性）となっている，識別問題などの理由でモデルから直接パラメータを推定できない
→**他者の選択確率を適切に生成して「擬似尤度」を最大化**

Step0:尤度関数

$$LL(\Theta, P^0) = \sum_{a\in N}\sum_{i\in T} \ln(p_i^a)\cdot \delta_i^a$$

- 繰り返しがない場合はPMLと呼ばれる構造推定
- 縮小写像による発散が生じる
→ Kasahara&Shimotsu参照

Step1:初期値設定

観測値等のノンパラな頻度分布を $\hat{P}^0$ とする

Step2: 疑似尤度の最大化

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\ LL(\Theta, \hat{P}^0)$$

Step3: $\hat{P}^0$ の更新

選択確率を算出して $\hat{P}^0$ を更新

Step4: 繰り返し計算

収束するまで初期値（確率）の更新と最大化を実行

# まとめ：より良い推定に向けて



**Closed-formなら最尤推定法の枠組みで十分に戦える**

- 多項ロジット（MNL）の最尤推定では，推定量として望ましい性質や解の収束性がある程度保証されている（NLなどは一部保証されていない）
- 変数の工夫（対数・指数，次元圧縮），セグメンテーション，潜在クラスの導入，データ統合（SP/RP融合）など色々な方法論が存在

**Open-formはベイズ推定が必須だが表現力が豊か**

- ミックスドロジット（MXL）は誤差要素モデル（EC）やランダム係数モデル（RC）により柔軟なモデリングが可能【付録参照】

**動学や相互作用を考慮したモデルは応用的な推定手法が必須**

- 内生性を有するモデルには構造推定が有効であり，大山先生のgRLや浦田先生の避難モデルなどに適用されている
- 機械学習における新たな手法（敵対的学習や強化学習）の行動モデルへの適用可能性は高く，研究を深掘りしたい

**パラメータ推定手法の理解は実装が一番！**

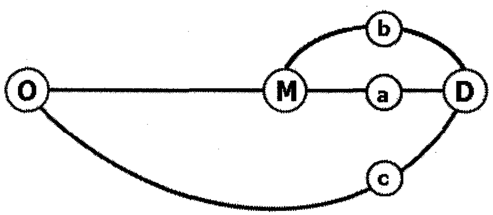
- スクラッチで全部実装すれば一皮剥けます（1度でいいのでやろう！）
- 過去の夏の学校の講義資料や発表資料は参考にしよう

# おまけ

# 相関構造を考慮した選択モデル



選択肢間の相関構造を如何に表現するかがポイントとなる（交通機関の類似性、経路の重複構造）




MNLベース

相関構造を表現する変数を導入して効用を修正

⇒C-Logit, Path-Size Logit

GEVベース (Closed form)

柔軟な確率分布を導入して誤差項を構造化（ネスト表現）

⇒NL, PCL, CNL, n-GEV

非GEVベース (Open form)

確率変数を導入して誤差の構造化と変数の異質性を考慮

すべてのGEVを近似可能だが、数値積分が必要

⇒Mixed Logit（Error Component, Random Coefficient）

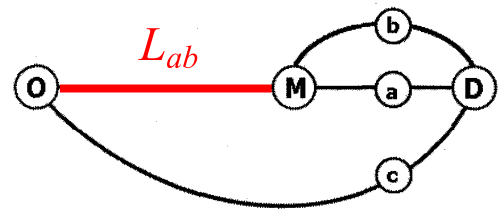
# MNLベース(1)

MNLの操作性を担保しつつ，相関構造を変数で表現している（経路選択モデルで発展）

## C-Logit

CF変数（Commonality Factor）
あるODペア間に存在する経路間の類似度を表す変数を導入

$$p_j = \frac{\exp\left[\alpha\left(V_{ij} - \beta_0 \ln \boxed{CF_j}\right)\right]}{\sum_k \exp\left[\alpha\left(V_{ik} - \beta_0 \ln CF_k\right)\right]}$$




$$\boxed{CF_j} = \sum_{h \in I_{od}} \left(\frac{L_{jh}}{L_j^{1/2} L_h^{1/2}}\right)^{\gamma}$$

$L_j$, $L_h$ : OD間の経路$j$と$h$の経路長（時間）
$L_{jh}$ :経路$j$と$h$の共通リンク長（時間）
$\gamma$ : パラメータ

# MNLベース(2)



MNLの操作性を担保しつつ，相関構造を変数で表現している（経路選択モデルで発展）

## Path-Size Logit

類似性を表現するPath-Size変数を導入

$$p_i = \frac{\exp\left(V_i - \frac{1}{\mu}\ln \boxed{PS_i}\right)}{\sum_k \exp\left(V_k - \frac{1}{\mu}\ln PS_j\right)}$$

リンクが経路に占める割合

$$\boxed{PS_j} = \sum_{a\in\Gamma_i} \frac{l_a}{L_i} \frac{1}{\sum_{j\in C_n} \delta_{aj}}$$

リンクを共有している経路の数

$\Gamma_i$ : 経路$i$に含まれるリンク集合
$l_a$ : リンク$a$の長さ
$C_n$ : 選択肢集合
$\delta_{aj}$ : リンク$a$が経路$j$に含まれるとき1，それ以外は0
$\mu$ : スケールパラメータ

# GEVベース(1)



様々なGEV(Generalized Extreme Value)関数を適用することでIIDを緩和した柔軟な誤差構造を表現している

**Nested Loigt**

$$G(y) = \sum_m \alpha_m \left( \sum_k y_k^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

**Cross Nested Loigt**

$$G(y) = \sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk} y_k)^{1/\mu} \right)^{\mu}$$

**Ordered GEV**

$$G(y) = \sum_m \left( \sum_k \alpha_{mk} y_k^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

**Generalized Nested Loigt**

$$G(y) = \sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk} y_k)^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

**Ordered GEV**

$$G(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} (y_k^{1/\mu_{kj}} + y_j^{1/\mu_{kj}})^{\mu_{kj}}$$

# GEVベース(2)



## Nested Logit

選択肢をネスティングすることでネスト間の相関のみを考慮
最初にグループ$g$を選択し, 次にグループ内の選択肢$m$から選択

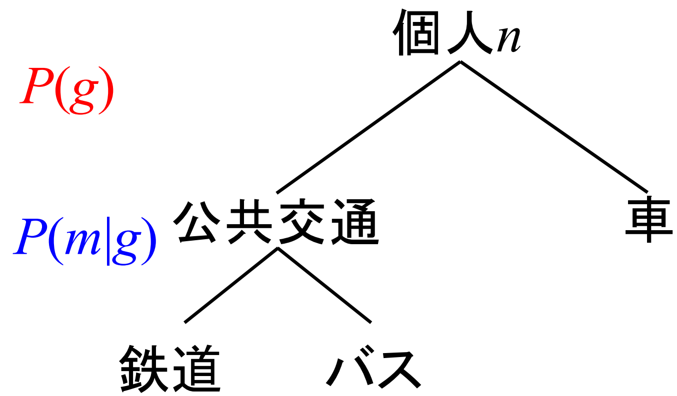
$$P(g, m) = P(m|g)P(g)$$

$$P(m \mid g) = \frac{\exp(V_m)}{\sum_{m' \in \{鉄道,バス\}} \exp(V_{m'})}$$

$$P(g) = \frac{\exp(\Lambda_g)}{\sum_{g' \in \{公共交通,車\}} \exp(\Lambda_{g'})}$$

$$\Lambda_g = \frac{1}{\mu_g} \log\left( \sum_{m \in \{鉄道,バス\}} \exp(\mu_g V_m) \right)$$

ログサム変数：グループ$g$に含まれる交通手段から得られる効用の最大値の期待値




$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 鉄道 & バス & 自動車 \end{array} \\ \begin{array}{c} 鉄道 \\ バス \\ 自動車 \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2_{公共交通} & 0 \\ \sigma^2_{公共交通} & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

# non-GEV

## Mixed Loigt

Logitモデルの操作性とProbitモデルの柔軟性を備えたモデル
あらゆるGEVモデルに近似可能

$$
\begin{aligned}
U_{鉄道} &= \beta X_{鉄道} + \boxed{\eta_{鉄道}} + \boxed{\nu_{鉄道}} \\
U_{バス} &= \beta X_{バス} + \boxed{\eta_{バス}} + \boxed{\nu_{バス}} \\
U_{車} &= \beta X_{車} + \boxed{\eta_{車}} + \boxed{\nu_{車}}
\end{aligned}
$$

誤差項を正規分布（Probit)とガンベル分布(Logit)の両方に従うと仮定

$$
P(i) = \iiint_{\eta} \frac{e^{\beta X_i + \eta_i}}{\sum_{i'}^{J} e^{\beta X_{i'} + \eta_{i'}}} f(\eta)\, d\eta
$$

Open-form（積分を含む形式）なのでシミュレーション法を用いたパラメータ推定法を適用

NL近似における分散共分散構造

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 鉄道 & バス & 自動車 & & 鉄道\ \ バス\ \ 自動車 & \\
Cov(U) = & \begin{array}{c} 鉄道 \\ バス \\ 自動車 \end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2_{公共交通} & 0 \\ \sigma^2_{公共交通} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} & + & \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} & \\
\varepsilon = & & & \eta & & + & \nu &
\end{array}
$$

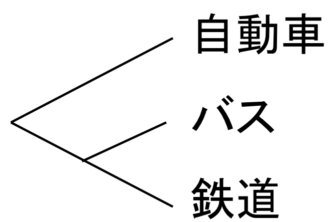
# Mixed logit: EC(1)

## NLへの近似

誤差成分$\eta$を適切に配置する事であらゆる誤差構造を近似

MXLの誤差要素モデル（Error Component）として適用

$$U_{car} = \beta X_{car} + \boxed{\nu_{car}}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \boxed{\sigma_{transit}\eta_{transit}} + \boxed{\nu_{bus}}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \boxed{\sigma_{transit}\eta_{transit}} + \boxed{\nu_{rail}}$$




標準正規乱数

$$\eta_{transit} \approx N(0,1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{transit} + \sigma^2 & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} + \sigma^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

ECとNLの誤差構造は厳密には一致しない

⇒対角成分が$\sigma^2 t_{ransit}$分だけ大きくなる！

あくまでも近似であることに注意

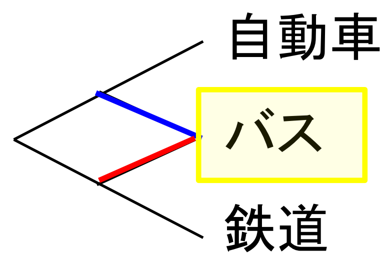
# Mixed logit: EC(2)

## CNLへの近似

選択肢がネスト間で重複することを許容

⇒バスは公共交通であり車両でもある（バスは2つのネットに帰属）

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} & & + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} & + \sigma_{transit}\eta_{transit} & + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} & + \sigma_{transit}\eta_{transit} & + \nu_{rail}
\end{aligned}
$$




$$
\overset{\boldsymbol{\eta}}{\begin{pmatrix} \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \boxed{\sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road}} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{pmatrix}} + \overset{\boldsymbol{\nu}}{\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}}
$$

標準正規乱数

$$\eta_{transit}, \eta_{road} \approx N(0,1)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma^2_{road} + \sigma^2 & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} + \sigma^2_{transit} + \sigma^2 & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} + \sigma^2 \end{pmatrix}
$$

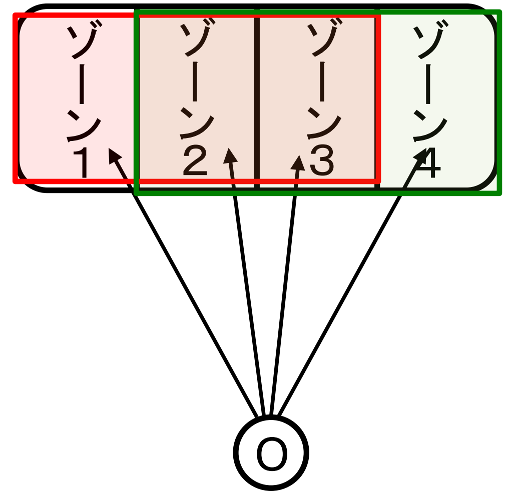
# Mixed logit: EC(3)



## 空間的相関への近似

当該ゾーンと隣接するゾーンとの近接性を相関として表現

$$
\begin{aligned}
U_{zone1} &= \beta X_{zone1} + \sigma_0\eta_1 + \nu_{zone1} \\
U_{zone2} &= \beta X_{zone2} + \boxed{\sigma_0\eta_1 + \sigma_0\eta_2} + \nu_{zone2} \\
U_{zone3} &= \beta X_{zone3} + \boxed{\sigma_0\eta_2 + \sigma_0\eta_3} + \nu_{zone3} \\
U_{zone4} &= \beta X_{zone4} + \sigma_0\eta_3 + \nu_{zone4}
\end{aligned}
$$




$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \approx N(0,1)$$

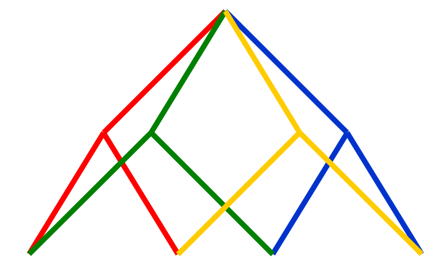
$$
\overset{\boldsymbol{\eta}}{\begin{pmatrix}
\sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\
\sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 \\
0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\
0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2
\end{pmatrix}}
+
\overset{\boldsymbol{\nu}}{\begin{pmatrix}
\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2
\end{pmatrix}}
=
\overset{\boldsymbol{\varepsilon}}{\begin{pmatrix}
\sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\
\sigma_0^2 & 2\sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 \\
0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 \\
0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2+\sigma^2
\end{pmatrix}}
$$

# Mixed logit: EC(4)

## 複合選択への近似

交通機関（自動車/バス）と時間帯（Peak/Off-Peak）の複合選択

$$
\begin{aligned}
U_{car,p} &= \beta X_{car,p} + \sigma_{car}\eta_{car} + \sigma_p \eta_p + \nu_{car,p} \\
U_{car,op} &= \beta X_{car,op} + \sigma_{car}\eta_{car} + \sigma_{op}\eta_{op} + \nu_{car,op} \\
U_{bus,p} &= \beta X_{bus,p} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \sigma_p \eta_p + \nu_{bus,p} \\
U_{bus,op} &= \beta X_{bus,op} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \sigma_{op}\eta_{op} + \nu_{bus,op}
\end{aligned}
$$




$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_p, \eta_{op} \approx N(0,1)$$

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\eta} & & \boldsymbol{\nu} \\
\begin{pmatrix}
\sigma_{car}^2 + \sigma_p^2 & \sigma_{car}^2 & \sigma_p^2 & 0 \\
\sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2 + \sigma_{op}^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\
\sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_p^2 & \sigma_{bus}^2 \\
0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_{op}^2
\end{pmatrix}
& + &
\begin{pmatrix}
\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}
\sigma_{car}^2 + \sigma_p^2 + \sigma^2 & \sigma_{car}^2 & \sigma_p^2 & 0 \\
\sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2 + \sigma_{op}^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\
\sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_p^2 + \sigma^2 & \sigma_{bus}^2 \\
0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_{op}^2 + \sigma^2
\end{pmatrix}
$$

# Mixed logit: EC(5)



## 誤差項の異分散への近似

IIDの下では同一分散⇒選択肢別に異なる分散を推定

※１つは0に固定しないとIdentification問題が発生

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{car}\eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{rail}\eta_{rail} + \nu_{rail}$$

$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_{rail} \approx N(0,1)$$

交通機関毎に誤差分散が異なると仮定

・自動車：所要時間信頼性が低い
　⇒誤差分散が大きくなる

・鉄道　：所要時間信頼性が高い
　⇒誤差分散が小さくなる

つまり、以下ような関係が期待される

自動車＞バス＞鉄道

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\eta} & & \boldsymbol{\nu} & & \boldsymbol{\varepsilon} \\ \begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 + \sigma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

※異分散のみを考慮（IIDは緩和していない）

# Mixed logit: RC(1)



## ランダム係数モデル(1)

パラメータは母集団で同質であるが実際には嗜好の異質性が存在

MXLのランダム係数モデル（Random Coefficient）として適用

$$U_{car,n} = \beta T_{car,n} + \varepsilon_{car,n} \longrightarrow U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

## <u>観測異質性</u>

・男女別定数項： $U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$

女性の定数項：$\alpha_0$　男性の定数項：$\alpha_0 + \alpha_1$

・男女別パラメータ：$U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n}$

女性のパラメータ：$\beta_2$　男性のパラメータ：$\beta_1$

## <u>非観測異質性</u>

・アプリオリ・マーケットセグメンテーション：

$$U_{car,n}^{Group1} = \alpha_0^{Group1} + \beta_1^{Group1} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group1}$$

Group1のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group1}, \beta_1^{Group1})$

$$U_{car,n}^{Group2} = \alpha_0^{Group2} + \beta_1^{Group2} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group2}$$

Group2のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group2}, \beta_1^{Group2})$

# Mixed logit: RC(2)



## ランダム係数モデル(2)

パラメータが確率分布に従うと仮定して異質性を考慮

⇒パラメータが正規分布に従って分布すると仮定した場合、分布の母数である平均値と分散(標準偏差)そのものを推定

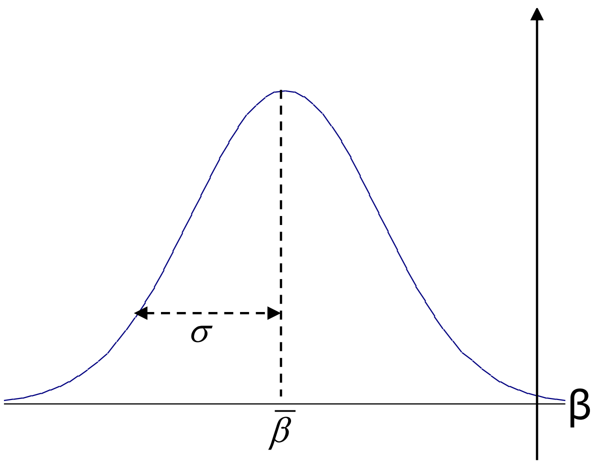
$$U_{car,n} = \boxed{\beta_n} T_{car,n} + \nu_{car,n}$$

$$\beta_n \approx N\left(\bar{\beta}, \sigma^2\right)$$

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \sigma \eta_n T_{car,n}$$

$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \sigma \eta_n T_{bus,n}$$

$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \sigma \eta_n T_{rail,n}$$




$\eta_n \approx N(0,1)$ $\bar{\beta}, \sigma : unknown\ parameter$

母数βを構造化することにより、観測異質性と非観測異質性を同時に考慮可能

$\bar{\beta}_n = \gamma_0 + \gamma_1 income_n$ βが観測可能な所得に依存

# Mixed logit: RC(3)



## ECとRCの両者を利用

両者を統合したモデル（CNLモデルに異質性を考慮etc）が可能
⇒考えられる構造を試すことができる！！

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \eta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$
$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \eta_n T_{bus,n} + \nu_{bus,n}$$
$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \eta_n T_{rail,n} + \nu_{rail,n}$$

$\eta$の分布形状：正規分布以外の確率分布でも利用できる

⇒正規分布では非現実的な値を取るケースでは，様々な確率分布（三角分布，切断正規分布，対数正規分布，レーリー分布等）を仮定できる。

$\nu$の分布形状：任意のGEV関数を適用できる

・IIDガンベル：Logit Kernel ⇒ MNL
・各種GEV　：GEV Kernel ⇒ NL, PCL, CNL, GNL…

# 構造化プロビットモデル（1）



Multinomial Probit with Structured Covariance for Route Choice Behavior, Transportation Research Part B, Vol.31, No.3, pp195-207, 1997.

森地茂 先生

屋井鉄雄 先生

岩倉成志 先生

首都圏鉄道での経路重複問題への適用を前提にプロビットモデルの誤差項を構造化．基本的アイディアは1993年の和文論文から見られる．

※当時，世界中で類似研究が盛んに行われており，
最もアツイ研究テーマ
Ex: C-Logit (1997), CNL (1997), MXL (2000)

Pergamon

*Transpn Res.-B*, Vol. 31, No. 3, pp. 195–207, 1997

0191-2615/97 $17.00 + 0.00

PII: S0191-2615(96)00025-2

MULTINOMIAL PROBIT WITH STRUCTURED COVARIANCE FOR ROUTE CHOICE BEHAVIOR

TETSUO YAI
Department of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

SEIJI IWAKURA
Japan Transport Economics Research Center, 3-18-19 Toranomon, Minato-ku, Tokyo, Japan

and

SHIGERU MORICHI
Department of Civil Engineering, University of Tokyo, Hongo,Bunkyo-ku, Tokyo 112, Japan

*(Received 8 September 1994; in revised form 19 June 1996)*

**Abstract**—We propose another version of the multinomial probit model with a structured covariance matrix to represent any overlapped relation between route alternatives. The fundamental ideas of the model were presented in Yai *et al.* (1993) and Yai and Iwakura (1994). The assumptions introduced in the model may be more realistic for route choice behaviors on a dense network than the strict assumption of the independent alternative property of the multinomial logit model. As the nested logit model assumes an identical dispersion parameter between two modeling levels for all trip makers, the model has difficulty in expressing individual choice-tree structures. To improve the applicability of the multinomial probit model to route choice behaviors, we introduce a function which represents an overlapped relation between pairs of alternatives and propose a multinomial probit model in which the structured covariance matrix uses the function in order to consider the individual choice-tree structures in the matrix and the estimatability of the new alternative's covariances. After examining the applicability of the multinomial probit model using empirical route choice data in a Tokyo metropolitan region, we also propose a method for evaluating consumer benefits on complicated networks based on the multinomial probit model. © 1997 Elsevier Science Ltd

1. INTRODUCTION

The applications of the multinomial probit model have not been adequately successful in spite of its advantages in flexibility of the model form. Certainly, the complexity of the computational process has deterred its use, compared to the wide applications of the multinomial logit models. Early advances in the estimation method of the multinomial probit model were achieved before the early 80s, by Daganzo (1977), Lerman and Manski (1981), Daganzo and Sheffi (1982) and Sheffi *et al.* (1982). Their work discussed alternative methods for estimating the covariance matrix simultaneously with utility function parameters. No accurate method was found during these earlier advances and thus the multinomial probit model was not widely applied (Horowitz *et al.*, 1982; Horowitz, 1991). In the 1980s, most discrete choice models were calibrated by the multinomial logit model or expansion forms of the multinomial logit such as the nested logit model. Although most results were satisfactory in representing travel behaviors of modal choices, several behaviors which do not satisfy the assumptions of the multinomial logit model exist. Most probably, the cause of such behaviors is the interdependency of choice alternatives.

Recently, there have been advances in multinomial probit estimation (McFadden, 1989; Pakes and Pollard, 1989; Bunch, 1991; Bolduc and Ben-Akiva, 1991; Bolduc, 1992; Geweke *et al.*, 1994). The method of simulated moments proposed by McFadden seems to encourage multinomial probit applications because of its computational efficiency in seeking model parameters. Bolduc focused on the estimation of the multinomial probit model with a large choice set using auto-regressive errors with distance related functions among alternatives for simplifying its covariance matrix. Bunch simplified the multinomial probit model's covariance matrix with his transformation method which lessens the estimation problem. Geweke *et al.* compared several

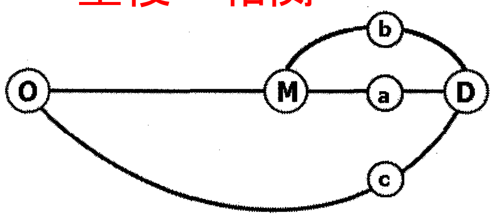
195

# 構造化プロビットモデル（2）



首都圏鉄道では経路重複が存在するため，IIAを仮定したロジットでは便益計測時に誤差が発生
⇒プロビットが有効

重複＝相関




## 課題

- OD毎に経路選択集合が異なるため，共分散が設定できない
  ⇒経路長に依存する誤差と経路固有の誤差に分解
- 計算コストが非常に高い（選択肢数-1の多重積分）
  ⇒シミュレーション法(GHK)による高速化

$$U_i = V_i + \varepsilon_i$$

経路長に依存する誤差

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{Length} + \varepsilon_i^{Route}$$

経路固有の誤差

考え方はMXLと同じ！

$$U_{in} = V_{in} + \left[\eta_{in} + \varepsilon_{in}\right]$$

# 構造化プロビットモデル（3）



誤差項とその共分散

経路長に依存する誤差

経路固有の誤差

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{\,1} + \varepsilon_r^{\,0}$$

$$\Sigma = \Sigma^1 + \Sigma^0$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} L_1 & L_{12} & \cdots & L_{1R} \\ L_{12} & L_2 & \cdots & L_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1R} & L_{2R} & \cdots & L_R \end{pmatrix} + \sigma_0^2 I$$

分散比で表現

$$\Sigma = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \eta L_1 + 1 & \eta L_{12} & \cdots & \eta L_{1R} \\ \eta L_{12} & \eta L_2 + 1 & \cdots & \eta L_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta L_{1R} & \eta L_{2R} & \cdots & \eta L_R + 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$$

分散比のみを推定するだけで良い！

## 経路長に依存する誤差

・経路長が長いほど効用の分散は大

$$Var(\varepsilon_r^{\,1}) = L_r \sigma^2$$

・重複区間が長いほど2経路間の共分散は大
⇒共分散は重複距離の分散に等しい

$$Cov(\varepsilon_r^{\,1}, \varepsilon_q^{\,1}) = L_{rq} \sigma^2$$

## 経路固有の誤差

・経路毎に独立に発生（共分散＝0）

$$Cov(\varepsilon_r^{\,0}, \varepsilon_q^{\,0}) = \sigma_0^{\,2}, \quad q = r$$
$$= 0, \quad q \neq r$$

$L_r$ :経路$r$の経路長
$L_{rq}$ :経路$r$と$q$の重複経路長
$\sigma^2$ :単位距離あたりの分散