Kahneman, D. and Tversky, A.:
Prospect theory: an analysis of decision under risk
Econometrica, Vol.47, pp.263-291, 1979.

2013.05.24
論文ゼミ #5
M1 若林由弥

0 論文の構成

1.Introduction

2.Critique

-Certainty, Probability, and Possibility
-The Reflection Effect
-Probabilistic Insurance
-The Isolation Effect

3.Theory

-The Value Function
-The Weighting Function

4.Discussion

-Risk Attitudes
-Shifts of Reference
-Extensions

1 期待効用理論

期待効用理論

・von NeumannとMorgensternにより基礎づけされた理論
・リスクの下での意思決定を記述する際に広く用いられている
・合理的な個人は効用の期待値(期待効用)を最大にするよう行動する

結果x_nが確率p_nで見込まれるときの組み合わせ

$$(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$$ ←これを「プロスペクト」と呼ぶ

$$where \ \ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

例1.コインを投げたときの表の出方

$$\left(\text{表}, \frac{1}{2}; \text{裏}, \frac{1}{2}\right)$$

例2.サイコロの目の出方

$$\left(1, \frac{1}{6}; 2, \frac{1}{6}; 3, \frac{1}{6}; 4, \frac{1}{6}; 5, \frac{1}{6}; 6, \frac{1}{6}\right)$$

2 期待効用理論

期待効用理論の3つの公理

1)Expectation

期待効用

$$\boxed{U(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)} = p_1 u(x_1) + \cdots + p_n(x_n)$$

$u(x_i)$:結果x_iで得られる効用

2)Asset Integration

下式が成り立つとき，状態wにおいて
プロスペクト$(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$は望ましい

$$\boxed{U(w + x_1, p_1; w + x_2, p_2; \ldots; w + x_n, p_n)} > u(w)$$

操作を行った後の期待効用

※$u(w) + U(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$ではない

||

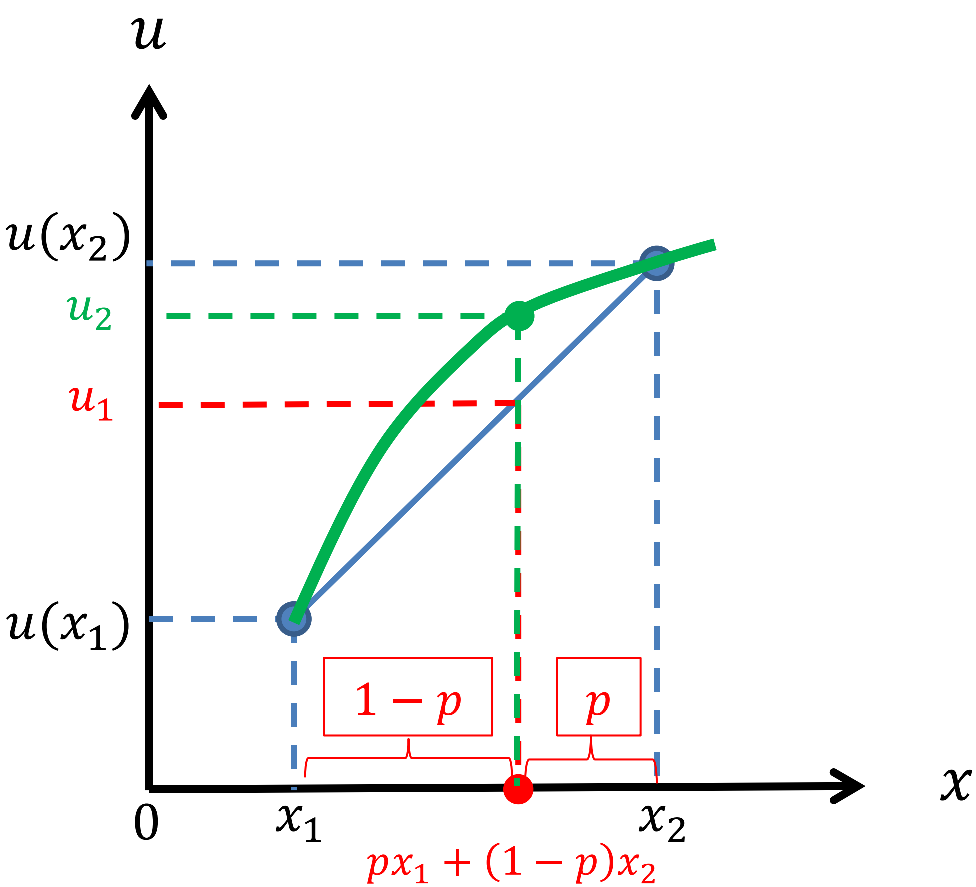
「変化」の効用を考えるのではなく，「変化後」の効用を評価する

3 期待効用理論

期待効用理論の3つの公理

3)Risk Aversion

合理的な人間はリスクを回避し，その効用関数$u(x)$は
プロスペクトxについて上に凸な関数である



プロスペクト$(x_1, p; x_2, 1-p)$
について考える．この時，

確実な効用u_2

$$u\{px_1+(1-p)x_2\}$$
$$\vee$$
$$pu(x_1)+(1-p)u(x_2)$$

期待効用u_1

3 Allaisのパラドクス

	パターンA		パターンB
問題1	33%の確率で2500円 66%の確率で2400円 1%の確率で0円	VS	100%の確率で2400円
	18%		82%
問題2	33%の確率で2500円 67%の確率で0円	VS	34%の確率で2400円 66%の確率で0円
	83%		17%

問題1 $$u(2400) > 0.33u(2500) + 0.66u(2400)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0.34u(2400) > 0.33u(2500)}$$

問題2 $$\boxed{0.33u(2500) > 0.34u(2400)}$$

明らかに現象を説明できていない

4 Certainty, Probability, and Possibility

	パターンA	パターンB
問題3	(4000,0.8) 20%	(3000) 80%
問題4	(4000,0.2) 65%	(3000,0.25) 35%
問題7	(6000,0.45) 14%	(3000,0.9) 86%
問題8	(6000,0.01) 73%	(3000,0.02) 27%

確率 $\frac{1}{4}$ 倍

確率 $\frac{1}{45}$ 倍

問題3と問題4を比べてみると・・・

問題3: $0.8u(4000) < u(3000)$

問題4: $0.2u(4000) > 0.25u(3000)$

全体的に利益を得られる確率が低くなると，リスクへの評価が下がる

5 反射効果

問題3~7の利得が損失である場合を考える

	パターンA		パターンB
(3)	(4000,0.8) 20%	<	(3000) 80%
(4)	(4000,0.2) 65%	>	(3000,0.25) 35%
(7)	(6000,0.45) 14%	<	(3000,0.9) 86%
(8)	(6000,0.01) 73%	>	(3000,0.02) 27%

パターンA		パターンB
(−4000,0.8) 92%	>	(−3000) 8%
(−4000,0.2) 42%	<	(−3000,0.25) 58%
(−6000,0.45) 92%	>	(−3000,0.9) 8%
(−6000,0.01) 30%	<	(−3000,0.02) 70%

・損失に対する選好は，利得に対する選好と逆の結果になっている

・損失を受ける場合は，逆にリスクを選好する傾向がある

＝「反射効果」

6 Probabilistic Insurance

問題9

今，自転車の盗難に関する保険に入ろうかどうか悩んでいる
(保険料を払わない場合と払う場合の見積もりが同じ状態)
この時，以下のような保険を受けるか否か

・予め通常料金(y)の半分を払っておく
・事故が起きたのが偶数の日(50%)
　　→残り半分の料金を払って補償を受ける
・事故が起きるのが奇数の日(50%)
　　→払ったお金が払い戻されて補償は受けられない

加入する20%　　加入しない:80%

保険未加入	$(w-x,p;w,1-p)$
確定的保険	$(w-y)$
確率的保険	$(w-x,\frac{p}{2};w-y,\frac{p}{2};w-\frac{y}{2},1-p)$

w:現在の資産
x:盗難による損失
y:保険の通常料金
p:事故が起こる確率

7 Probabilistic Insurance

期待効用理論だと…

w:現在の資産
x:盗難による損失
y:保険の通常料金
p:事故が起こる確率
r:保険が発生する確率

保険未加入時の効用　確定的保険の効用

$$\boxed{pu(w-x)+(1-p)u(w)} = \boxed{u(w-y)} \quad (1)$$

implies

$$\boxed{(1-r)pu(w-x)+rpu(w-y)+(1-p)u(w-ry)} > \boxed{u(w-y)} \quad (2)$$

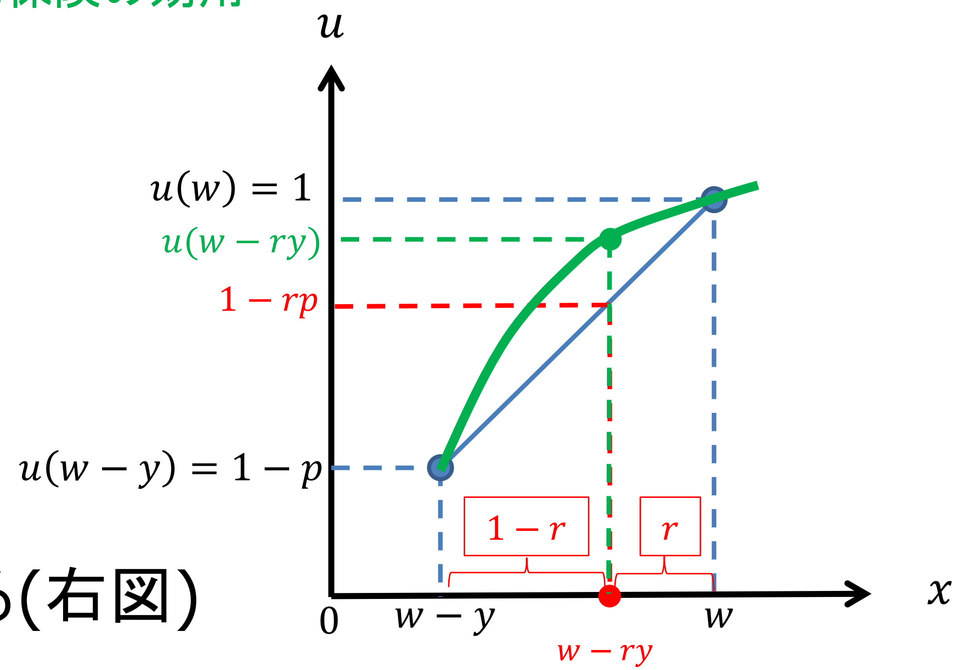
確率的保険の効用

[証明]

$u(w-x)=0,\ u(w)=1$とおける.
このとき，(1)より$u(w-y)=1-p$

$$rp(1-p)+(1-p)u(w-ry)>1-p$$

$$\leftrightarrow u(w-ry)>1-rp$$



uは上に凸なので上式は成立する(右図)

8 The Isolation Effect

The isolation effect

・2者択一の選択において，選択肢間で共通の要素は排除し，異なる要素を重視することがある

・要素の分解の仕方によっては異なる選好を生む場合がある

=isolation effect(孤立効果)

問題10

以下のような2段階のゲームを考える

ステップ1:
75%の割合でゲーム終了，25%の割合でステップ2に進む
ステップ2:
(4000,0.8)か(3000)のどちらかを選択する

合理的に考えれば，
(4000,0.2)or(3000,0.25)
の選択問題に思えるが…

	(4000,0.2)		(3000,0.25)
問題4	65%	>	35%
問題10	22%	<	78%

9 The Isolation Effect

decision treeを描いて考えてみる

□ Decision node
○ Chance node

Figure1

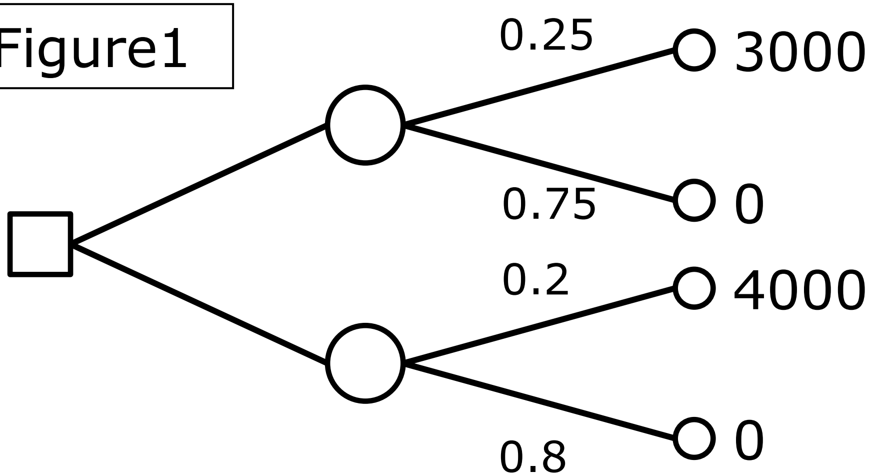
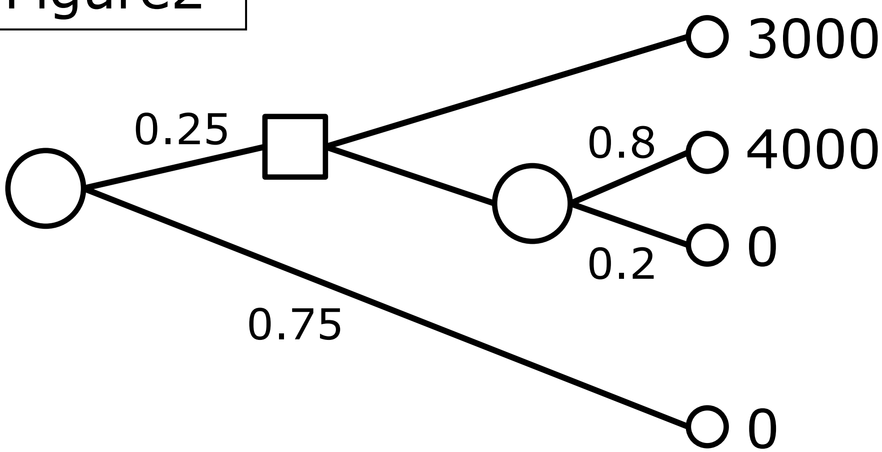


Figure2



合理的にはFigure1のように考えるはずが，実際はFigure2のように考えてしまっている

⇒表現の仕方によって選好は変わりうる

(3)	(4000,0.8) 20%	(3000) 80%
(4)	(4000,0.2) 65%	(3000,0.25) 35%
(10)	22%	78%

10 The Isolation Effect

以下のような問題を考えると分かりやすい

問題11：初めに1000円のボーナスを与えた後に

$A(1000, 0.5)$ or $B(500)$

16%　　　64%

問題12：初めに2000円のボーナスを与えた後に

$C(-1000, 0.5)$ or $D(-500)$

69%　　　31%

でも，最終的に得られる量を考えると，

$A = C = (2000, 0.5; 1000, 0.5)$

$B = D = (1500)$

だから選好は同じはず…

人の意思決定において，効用に影響を与えているのは，最終的な資産の状態ではなく，財の変化量である

11 プロスペクト理論

期待効用理論では表せないような現象

・リスクに対する感度の違い
・損失に対するリスクの選好
・表現方法による感度の違い

⇒これらを説明できる理論
＝プロスペクト理論

プロスペクト理論は，以下の2つのPhaseで構成される

Phase1：editing phase
プロスペクトの評価が簡単になるように，与えられたプロスペクトを変形していく

Phase2：evaluation phase
Phase1で編集されたプロスペクトを用いて評価を行い，最も高い価値を持つプロスペクトが選択される

12 プロスペクトの編集

Coding:
利得・損失の評価をするための参照点を決める.

Combination:
同一の結果をまとめる
例)$(2000, 0.25; 2000, 0.25) \rightarrow (2000, 0.5)$

Segregation:
プロスペクトを確定項とリスク項に分ける
例)$(300, 0.8; 200, 0.2) \rightarrow (200) + (100, 0.8)$

Cancellation:
プロスペクト間で共通の部分を取り除く
例)$(200, 0.2; 100, 0.5; -50, 0.3)vs(200, 0.2; 150, 0.5; -100, 0.3)$
$\rightarrow (100, 0.5; -50, 0.3)vs(150, 0.5; -100, 0.3)$

これらの操作に加え，プロスペクトの近似や支配的な選択肢を取り除くことでプロスペクトを変形する

13 プロスペクトの評価

プロスペクト$(x, p; y, q)$の価値Vは一般的に以下の式で表される

If either $p + q < 1$, or $x \geq 0 \geq y$, or $x \leq 0 \leq y$

$$V(x, p; y, q) = \pi(p)v(x) + \pi(q)v(y) \qquad (1)$$

$\pi(\cdot)$:確率加重関数
$v(\cdot)$:価値関数

※期待効用の式

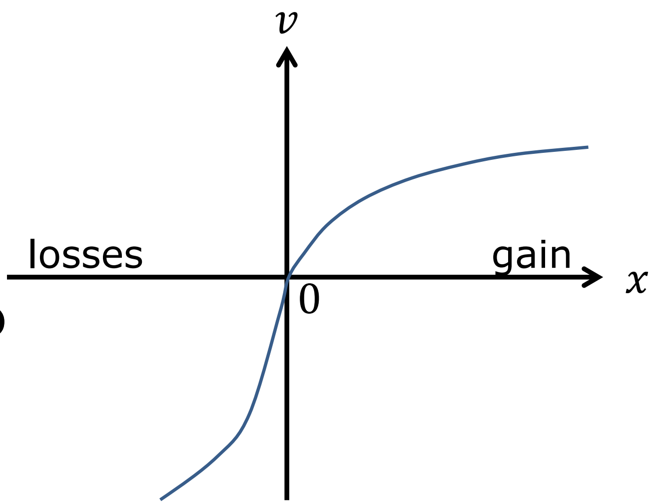
$$U(x, p; y, q) = pu(w + x) + qu(w + y)$$

If $p + q = 1$, and either $x > y > 0$, or $x < y < 0$

$$V(x, p; y, q) = \underbrace{v(y)}_{\text{確定部分}} + \underbrace{\pi(p)\{v(x) - v(y)\}}_{\text{リスク部分}} \qquad (2)$$

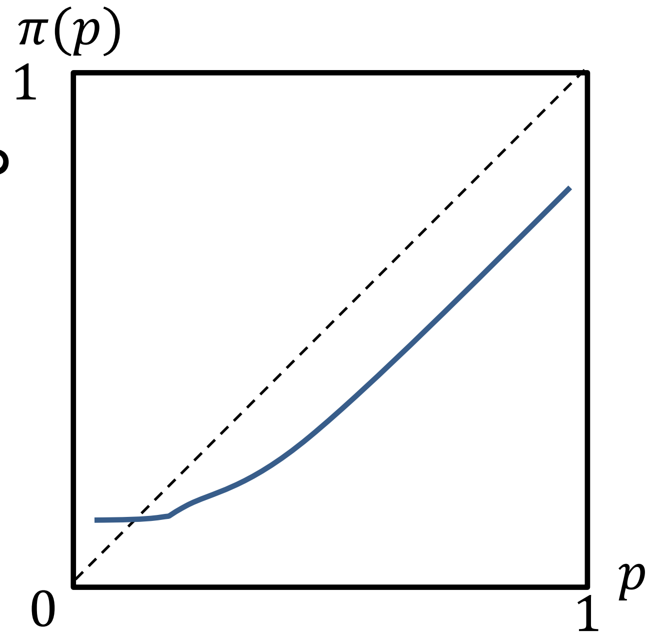
14 価値関数・確率加重関数

価値関数$v(x)$



・参照点からの偏差によって定義される
(効用関数は変化後の状態で定義されていた)
・$x > 0$では上に凸，$x < 0$では下に凸
・$x < 0$の方が$x > 0$の部分より傾きが急になる
(損失に対する感度が高い)

確率加重関数$\pi(p)$



・pが小さい範囲では，確率が大きく見られがち
・$p = 0$及び$p = 1$の地点で急激に変化する

このようなv, πを求めることで，期待効用で表せない現象を表現することができる

15 まとめと課題

まとめ

・期待効用理論は多くの経済理論の規範となっているが，期待効用理論の下では矛盾する現象が確認されている.
・これらの現象を説明できる理論としてプロスペクト理論を提案
・プロスペクト理論では，財の変化に注目し，価値関数と加重確率関数を置くことで，こうした現象を説明できる

課題

・財の変化を扱うための参照点の取り方によって結果が異なる
・価値関数や加重確率関数の形は意思決定者によって異なるため，正確な関数形を定義できない
→最近の研究では，プロスペクト理論を用いた分析もできるらしい…