Stochastic Preplanned Household Activity Pattern Problem with Uncertain Activity Participation (SHAPP):

Transport Science, Vol.47(3), pp.439-454, 2013

Gan, L. P., Recker, W.

博士2年 大山雄己*

Stochastic activity generation

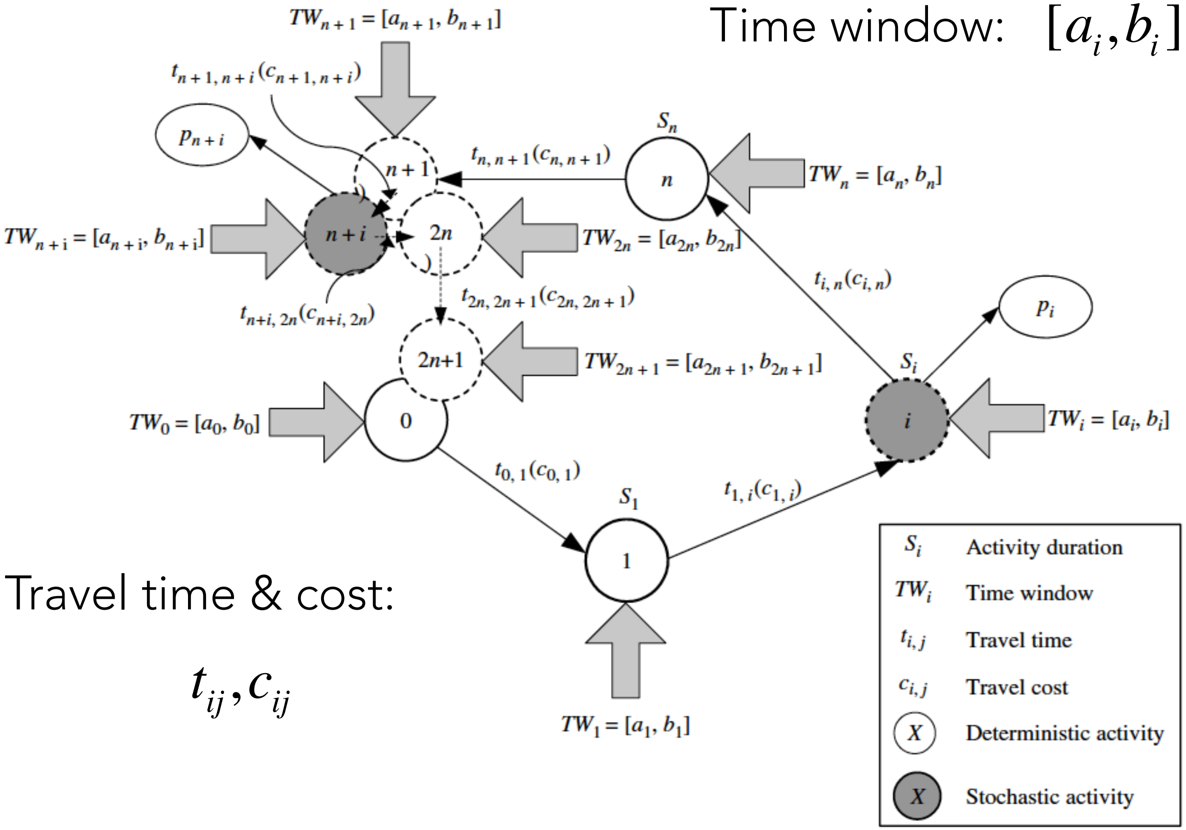
- 実際に観測される行動は，観測されない意思決定プロセスの結果.
- 個人は渋滞や急な呼び出しといった**不確実な状況**に直面したとき，スケジュールの変更を強いられる.
- しかし，不確実性を明示的に考慮することはモデルの複雑性と計算困難性につながり，多くのプレトリップ型モデルでは考慮されてこなかった.

できるだけ単純な不確実性として，活動の取りやめを考える.

→ **確率計画問題**（Stochastic Programming）で定式化

Network Representation

Time window: $[a_i, b_i]$



Travel time & cost:

$$t_{ij}, c_{ij}$$

Probability: p_i

$p_i = 1$

: Deterministic activity

$0 < p_i < 1$

: Stochastic activity

$p_0 \equiv p_{2n+1} \equiv 1$

活動候補: $A\{i = 1, \ldots, n\}$

活動場所: $P^+ = \{1, \ldots, n\}$

$P^- = \{n+1, \ldots, 2n\}$

Network: $G = (N, E)$

頂点(vertex): $N = P^+ \cup P^- \cup \{0\} \cup \{2n+1\}$

辺(edge): $E = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$

Model Formulation

Optimization

決定(スケジュール)変数：

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{uw}^{v}, \forall u, w \in N, v \in V \\ H_{uw}^{\alpha}, \forall u, w \in N, \alpha \in \eta \\ T_u, \forall u \in P \end{bmatrix}_i$$

: ノードuからwへ車両vが移動したら1，それ以外0

: ノードuからwへ個人αが移動したら1，それ以外0

: 活動uの開始時刻

最適化問題（**確率的**混合整数計画問題）：

$$\min E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) \qquad (1) \qquad \text{s.t.} \quad \ldots$$

where,

$\xi = (\xi_i)$: pi < 1 のとき1，それ以外0 **（確率変数）**

Model Formulation

Constraint set

(I) *Spatial Connectivity and Temporal Constraints on Vehicles*

$$\sum_{w\in\Omega_V^v}\sum_{u\in P} X_{uw}^v = 0, \quad \forall v \in V, \tag{17}$$

$$\sum_{v\in V}\sum_{w\in N} X_{uw}^v = 1, \quad \forall u \in P^+, \tag{18}$$

$$\sum_{w\in N} X_{uw}^v - \sum_{w\in N} X_{wu}^v = 0, \quad \forall u \in P,\ v \in V, \tag{19}$$

$$\sum_{w\in P^+} X_{0w}^v \le 1, \quad \forall v \in V, \tag{20}$$

$$\sum_{u\in P^-} X_{u,2n+1}^v \le 1, \quad \forall v \in V, \tag{21}$$

$$\sum_{w\in N} X_{wu}^v - \sum_{w\in N} X_{w,n+u}^v = 0, \quad \forall u \in P^+,\ v \in V, \tag{22}$$

$$X_{uw}^v = 0 \text{ or } 1, \quad \forall u, w \in N,\ v \in V, \tag{23}$$

$$X_{uw}^v + X_{wu}^v \le 1, \quad u, w \in N,\ v \in V, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
X_{uu}^v &= 0, \quad \forall u \in N,\ v \in V,\\
X_{0u}^v &= 0, \quad \forall u \in P^-,\ v \in V,\\
X_{u0}^v &= 0, \quad \forall u \in N,\ v \in V,\\
X_{u,2n+1}^v &= 0, \quad \forall u \in P^+,\ v \in V,\\
X_{2n+1,u}^v &= 0, \quad \forall u \in P^+,\ v \in V,\\
X_{n+u,u}^v &= 0, \quad \forall u \in P^+,\ v \in V,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$Y_u + d_w - Y_w \le \mathrm{M}(1 - X_{uw}^v), \quad \forall u \in P,\ w \in P^+,\ v \in V, \tag{26}$$

$$Y_u - d_{w-n} - Y_w \le \mathrm{M}(1 - X_{uw}^v), \quad \forall u \in P,\ w \in P^-,\ v \in V, \tag{27}$$

$$Y_0 + d_w - Y_w \le \mathrm{M}(1 - X_{0w}^v), \quad \forall w \in P^+,\ v \in V, \tag{28}$$

$$Y_0 = 0, \tag{29}$$

$$0 \le Y_u \le D^s, \quad \forall u \in P, \tag{30}$$

$$T_u + S_u + t_{uw}^v - T_w \le \mathrm{M}(1 - X_{uw}^v), \quad \forall u, w \in P,\ v \in V, \tag{31}$$

$$T_u + S_u + t_{uw}^v - T_w \ge -\mathrm{M}(1 - X_{uw}^v), \quad \forall u, w \in P,\ v \in V, \tag{32}$$

$$T_0^v + t_{0u}^v - T_u \le \mathrm{M}(1 - X_{0u}^v), \quad \forall u \in P^+,\ v \in V, \tag{33}$$

$$T_0^v + t_{0u}^v - T_u \ge -\mathrm{M}(1 - X_{0u}^v), \quad \forall u \in P^+,\ v \in V, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&T_u + S_u + t_{u,2n+1} - T_{2n+1}^v \le \mathrm{M}(1 - X_{u,2n+1}^v),\\
&\qquad \forall u \in P^-,\ v \in V,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$T_u + S_u + t_{u,n+u}^v \le T_{n+u}, \quad \forall u \in P^+,\ v \in V, \tag{36}$$

$$a_u \le T_u \le b_u, \quad \forall u \in P, \tag{37}$$

$$a_0 \le T_0^v \le b_0, \quad \forall v \in V, \tag{38}$$

$$a_{2n+1} \le T_{2n+1}^v \le b_{2n+1}, \quad \forall v \in V, \tag{39}$$

$$\sum_{v\in V}\sum_{u\in N}\sum_{w\in N} c_{uw}^v X_{uw}^v \le B_c, \tag{40}$$

$$\sum_{u\in N}\sum_{w\in N} t_{uw} X_{uw}^v \le B_t^v, \quad \forall v \in V, \tag{41}$$

where M is a large positive number.

Constraint set

(II) *Constraints on Household Members*

$$\sum_{w\in\Omega_H^\alpha}\sum_{u\in P} H_{uw}^\alpha = 0, \quad \forall \alpha\in\eta, \tag{42}$$

$$\sum_{u\in N}\sum_{w\in N} t_{uw}^v H_{uw}^\alpha \le B_t^\alpha, \quad \forall \alpha\in\eta, \tag{43}$$

$$\sum_{\alpha\in\eta}\sum_{w\in N} H_{uw}^\alpha = 1, \quad \forall u\in A, \tag{44}$$

$$\sum_{w\in N} H_{uw}^\alpha - \sum_{w\in N} H_{wu}^\alpha = 0, \quad \forall u\in P,\ \alpha\in\eta, \tag{45}$$

$$\sum_{w\in P^+} H_{0w}^\alpha \le 1, \quad \forall \alpha\in\eta, \tag{46}$$

$$\sum_{u\in P^-} H_{u,2n+1}^\alpha \le 1, \quad \forall \alpha\in\eta, \tag{47}$$

$$\sum_{w\in N} H_{wu}^\alpha - \sum_{w\in N} H_{w,n+u}^\alpha = 0, \quad \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta, \tag{48}$$

$$H_{uw}^\alpha = 0 \text{ or } 1, \quad \forall u,w\in N,\ \alpha\in\eta, \tag{49}$$

$$H_{uw}^\alpha + H_{wu}^\alpha \le 1, \quad u,w\in N,\ \alpha\in\eta, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} H_{uu}^\alpha &= 0, && \forall u\in N,\ \alpha\in\eta,\\ H_{0u}^\alpha &= 0, && \forall u\in P^-,\ \alpha\in\eta,\\ H_{u0}^\alpha &= 0, && \forall u\in N,\ \alpha\in\eta,\\ H_{u,2n+1}^\alpha &= 0, && \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta,\\ H_{2n+1,u}^\alpha &= 0, && \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta,\\ H_{n+u,u}^\alpha &= 0, && \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta, \end{aligned} \tag{51}$$

$$T_u + S_u + t_{uw}^v - T_w \le \mathrm{M}(1-H_{uw}^\alpha) \quad \forall u,w\in P,\ \alpha\in\eta,\ v\in V, \tag{52a}$$

$$T_u + S_u + t_{uw}^v - T_w \ge -\mathrm{M}(1-H_{uw}^\alpha) \quad \forall u,w\in P,\ \alpha\in\eta,\ v\in V, \tag{52b}$$

$$\bar{T}_0^\alpha + t_{0u}^v - T_u \le \mathrm{M}\left\{(1-H_{0u}^\alpha) + \left(1-\sum_{w\in P^-} X_{wu}^v\right) - X_{0u}^v\right\} \quad \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta,\ v\in V, \tag{53a}$$

$$\bar{T}_0^\alpha + t_{0u}^v - T_u \ge -\mathrm{M}\left\{(1-H_{0u}^\alpha) + \left(1-\sum_{w\in P^-} X_{wu}^v\right) - X_{0u}^v\right\} \quad \forall u\in P^+,\ \alpha\in\eta,\ v\in V, \tag{53b}$$

$$T_u + t_{u,2n+1}^v - \bar{T}_{2n+1}^\alpha \le \mathrm{M}\left\{(1-H_{u,2n+1}^\alpha) + \left(1-\sum_{w\in P} X_{wu}^v\right) - X_{u,2n+1}^v\right\} \quad \forall u\in P^-,\ \alpha\in\eta,\ v\in V, \tag{54}$$

$$\bar{a}_0^\alpha \le \bar{T}_0^\alpha \le \bar{b}_0^\alpha, \quad \alpha\in\eta, \tag{55}$$

$$\bar{a}_{2n+1}^\alpha \le \bar{T}_{2n+1}^\alpha \le \bar{b}_{2n+1}^\alpha, \quad \alpha\in\eta. \tag{56}$$

Model Formulation

Constraint set

(III) *Vehicle and Household Member Coupling Constraints*

$$\sum_{\alpha\in\eta} H^{\alpha}_{uw} = \sum_{v\in V} X^{v}_{uw}, \quad \forall u \in N,\ w \in N, \tag{57}$$

$$T^{v}_{0} - \bar{T}^{\alpha}_{0} \leq \mathrm{M}[(1 - H^{\alpha}_{0u}) + (1 - X^{v}_{0u})], \quad \forall u \in P^{+}, \alpha \in \eta,\ v \in V, \tag{58a}$$

$$T^{v}_{0} - \bar{T}^{\alpha}_{0} \geq -\mathrm{M}[(1 - H^{\alpha}_{0u}) + (1 - X^{v}_{0u})], \quad \forall u \in P^{+},\ \alpha \in \eta,\ v \in V, \tag{58b}$$

$$T^{v}_{2n+1} - \bar{T}^{\alpha}_{2n+1} \leq \mathrm{M}[(1 - H^{\alpha}_{u,2n+1}) + (1 - X^{v}_{u,2n+1})] \quad \forall u \in P^{-},\ \alpha \in \eta,\ v \in V, \tag{59a}$$

$$T^{v}_{2n+1} - \bar{T}^{\alpha}_{2n+1} \geq -\mathrm{M}[(1 - H^{\alpha}_{u,2n+1}) + (1 - X^{v}_{u,2n+1})] \quad \forall u \in P^{-},\ \alpha \in \eta,\ v \in V. \tag{59b}$$

(IV) *Nonnegativity Constraints on Decision Variables*

$$\begin{gathered} X^{v}_{uw} \geq 0, \quad u, w \in N, u \neq w; \quad H^{\alpha}_{uw} \geq 0, \quad \forall u, w \in N, \alpha \in \eta; \\ T_{u} \geq 0, u \in P; \quad T^{v}_{0} \geq 0, \forall v \in V; \\ T^{v}_{2n+1} \geq 0, \quad \forall v \in V; \quad \bar{T}^{\alpha}_{0} \geq 0, \bar{T}^{\alpha}_{2n+1} \geq 0, \quad \forall \alpha \in \eta. \end{gathered} \tag{60}$$

Model Formulation

* （補足）確率計画問題 : Stochastic Programming

$$
\begin{aligned}
\textbf{(SP)}: \ & \min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & T(\xi)\mathbf{x} = h(\xi) \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

← 制約条件に確率変数を含む

等価確定問題：リコース（償還請求）問題

$$
\begin{aligned}
\textbf{(SLPR)}: & \min E_{\xi}\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + Q(\mathbf{x},\xi)\} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
Q(\mathbf{x},\xi) = \min\{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}(\xi) \mid W\mathbf{y}(\xi) = h(\xi) - T(\xi)\mathbf{x}, \mathbf{y}(\xi) \geq 0\}
$$

確定要素と確率要素を分解し，2段階計画問題として定式化

Recourse actions

- 計画通りの活動実行によるコストを，調整行動により**償還**
- 予定の変更・調整行動は無数．すべて考慮することは困難．
- **「活動の追加・取りやめ」**(*1) に着目してモデルを構築．

(*1)For example: a survey in Clark and Doherty (2009)

- 活動の追加（214, 48.3%）
- 活動の取りやめ（65, 14.7%）
- 活動開始時刻の調整（74, 16.7%）
- 活動終了時刻の調整（38, 8.6%）
- 活動開始・終了時刻の調整（36, 8.1%）
- （場所の変更はわずか 0.03%）

63%

Probability: p_i

$p_i = 1$

: Deterministic activity

$0 < p_i < 1$

: Stochastic activity

$p_0 \equiv p_{2n+1} \equiv 1$

Model Formulation

Two-stage framework

最適化問題（確率的線形計画問題）：

$$\min E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) \tag{1}$$

リコース（活動調整）コストを次のように定義.

$$Q(\mathbf{X}_i) = E_{\xi} Q(\mathbf{X}_i, \xi) \tag{1a}$$

2段階計画問題：

$$\min E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \min \{C(\mathbf{X}_i) + Q(\mathbf{X}_i)\} \tag{1b}$$

Two-stage framework

2段階計画問題：

$$\min E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \min\{C(\mathbf{X}_i) + Q(\mathbf{X}_i)\} \qquad (1b)$$

段階(1)：不確実性のない状態での最適スケジューリング

$$\min C(\mathbf{X}_i)$$

段階(2)：不確実性（確率変数 ξ ）下での最適リスケジューリング

$$\min E_{\xi} Z(\underbrace{\mathbf{X}_i}_{\text{所与}}, \xi) \qquad (1c)$$

First stage optimal activity/travel schedule

段階(1)：不確実性のない状態での最適スケジューリング

$$C(\mathbf{X}_i) = \lambda_{tt} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} t_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v} + \lambda_{tc} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} c_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v} \qquad (2)$$

$\lambda_{tt}, \lambda_{tc}$ ：重みパラメータ（時間，コスト）

スケジュール変数：

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{uw}^{v}, \forall u, w \in N, v \in V \\ H_{uw}^{\alpha}, \forall u, w \in N, \alpha \in \eta \\ T_u, \forall u \in P \end{bmatrix}_i$$

: ノードuからwへ車両vが移動したら1，それ以外0

: ノードuからwへ個人αが移動したら1，それ以外0

: 活動uの開始時刻

Expected disutility function

段階(2)：不確実性下では次のようになる

$$E_{\xi}Z(\mathbf{X}_i,\xi)=\lambda_{tt}\sum_{v\in V}\sum_{u\in N}\sum_{w\in N}\overline{p}_{uw}^{v}\cdot t_{uw}^{v}\cdot X_{uw}^{v}+\lambda_{tc}\sum_{v\in V}\sum_{u\in N}\sum_{w\in N}\overline{p}_{uw}^{v}\cdot c_{uw}^{v}\cdot X_{uw}^{v} \quad (3)$$

$\overline{p}_{uw}^{v}$ ：ノードuからwへ車両vが**直接**移動する確率

確率変数 ξ_i のすべての実現値の組み合わせを考慮する必要がある

スケジュール変数：

$$\mathbf{X}_i=\begin{bmatrix} X_{uw}^{v},\forall u,w\in N,v\in V \\ H_{uw}^{\alpha},\forall u,w\in N,\alpha\in\eta \\ T_u,\forall u\in P \end{bmatrix}_i$$

: ノードuからwへ車両vが移動したら1，それ以外0

: ノードuからwへ個人αが移動したら1，それ以外0

: 活動uの開始時刻

Expected disutility function

$\overline{p}_{uw}^{v}$: ノードuからwへ車両vが**直接**移動する確率 を考えたい.

・確定的な状況下での最適スケジュール $\mathbf{X}_i$ は求まっている.

$\boldsymbol{\tau}^{v}$: 車両vが訪れたノード（活動）の集合

l^{v} : 車両vが訪れたノードの数（home は除く） とする.

→ τ のノードをRelabel：

$$\boldsymbol{\tau}^{v} = \{i_0^v, i_1^v, \ldots, i_{l^v}^v, i_{l^v+1}^v\} \qquad (i_0^v = "0", i_{l^v+1}^v = "2n+1")$$

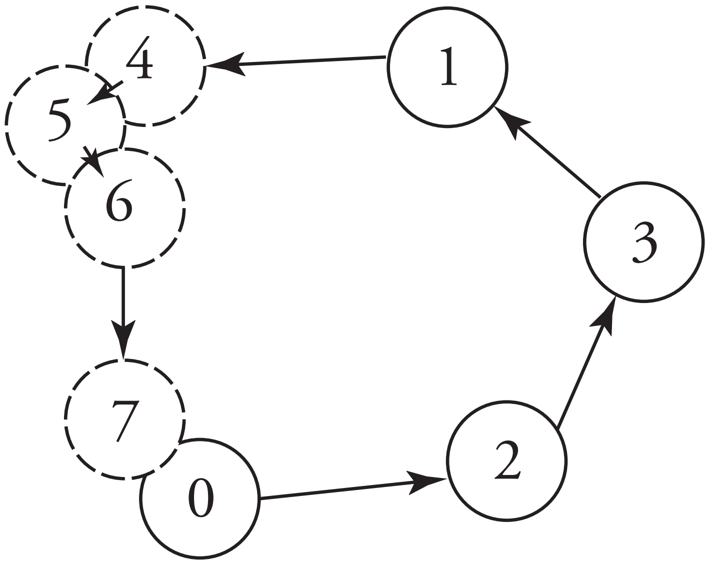
i_k^v : 車両vがk番目に訪れたノード

Expected disutility function

$\overline{p}_{uw}^{v}$ ：ノードuからwへ車両vが**直接**移動する確率 を考えたい.

→ τ のノードをRelabel（例）：

$$\boldsymbol{\tau}^{v} =$$
$$\{i_0^v = "0",$$
$$i_1^v = "2", i_2^v = "3", i_3^v = "1",$$
$$i_4^v = "4", i_5^v = "5", i_6^v = "6",$$
$$i_7^v = "7"\}$$



Expected disutility function

$\overline{p}_{uw}^{v}$ ：ノードuからwへ車両vが**直接**移動する確率

を考えたい.

車両vが訪れたノード（活動）の集合

$$\tau^{v} = \{i_0^v, i_1^v, \ldots, i_{l^v}^v, i_{l^v+1}^v\} \qquad (i_0^v = "0", i_{l^v+1}^v = "2n+1")$$

期待コスト：

$$E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \lambda_{tt} \sum_{v \in V} \sum_{u=0}^{u=l^k} \sum_{w=u+1}^{w=l^k+1} \overline{p}_{i_u^v, i_w^v}^{v} \cdot t_{i_u^v, i_w^v}^{v} + \lambda_{tc} \sum_{v \in V} \sum_{u=0}^{u=l^k} \sum_{w=u+1}^{w=l^k+1} \overline{p}_{i_u^v, i_w^v}^{v} \cdot c_{i_u^v, i_w^v}^{v} \qquad (4)$$

$$E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \lambda_{tt} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} \overline{p}_{uw}^{v} \cdot t_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v} + \lambda_{tc} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} \overline{p}_{uw}^{v} \cdot c_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v} \qquad (3)$$

Expected disutility function

$$\tau_{uw}^{v,1} = \begin{cases} \{u\}, & \text{if } i_w^v = i_u^v + n; \\ \{u, w\}, & \text{o.t.w;} \end{cases} \quad \text{(5a)}$$

$$\tau_{uw}^{v,2} = \{r \in \{u+1, \ldots, w-1\}: i_r^v \le n\}, \quad \text{(5b)}$$

$$\tau_{uw}^{v,3} = \{r \in \{u+1, \ldots, w-1\}: i_r^v \ge n+1,\ i_r^v = i_{r'}^v + n,\ r' \in \{(1, \ldots, u-1): u-1 \le n\}\}. \quad \text{(5c)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = 0 \quad \text{if } \{i_u^v, i_w^v\} \notin \tau^v, \quad \text{(6a)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = 0 \quad \text{if } u \ge w, \quad \text{(6b)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = 0 \quad \text{if } u = 0,\ w = l^v + 1, \quad \text{(6c)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = 0 \quad \text{if } \exists h \in \{u+1, \ldots, w-1\} \ni i_w^v = i_h^v + n,\ u \ge 1, \quad \text{(6d)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = 0 \quad \text{if } \exists k \in \{u+1, \ldots, w-1\} \ni i_k^v = i_u^v + n,\ u \ge 1; \quad \text{(6e)}$$

$$\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v = \prod_{h \in \tau_{uw}^{v,1}} p_{i_h^v} \prod_{r \in \tau_{uw}^{v,2}} (1 - p_{i_r^v}) \prod_{k \in \tau_{uw}^{v,3}} (1 - p_{i_k^v}), \quad \text{otherwise.} \quad \text{(6f)}$$

$$\boxed{\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v} = \underbrace{\prod_{h \in \tau_{uw}^{v,1}} p_{i_h^v}}_{\text{活動u,wが実行される確率}} \cdot \underbrace{\prod_{r \in \tau_{uw}^{v,2}} (1 - p_{i_r^v}) \cdot \prod_{k \in \tau_{uw}^{v,3}} (1 - p_{i_k^v})}_{\text{u,wの間の活動がすべてキャンセルされる確率}}$$

$$E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \lambda_{tt} \sum_{v \in V} \sum_{u=0}^{u=l^k} \sum_{w=u+1}^{w=l^k+1} \boxed{\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v} \cdot t_{i_u^v, i_w^v}^v + \lambda_{tc} \sum_{v \in V} \sum_{u=0}^{u=l^k} \sum_{w=u+1}^{w=l^k+1} \boxed{\bar{p}_{i_u^v, i_w^v}^v} \cdot c_{i_u^v, i_w^v}^v \quad (4)$$

Time window violation

- 予定されていた活動がキャンセル → スケジュールにずれが生じる.

Time window に対する遅れ/早い到着のペナルティは
活動が実行され，活動開始時刻が t である確率に依存

$$g^v(i_w^v, t) = \Pr(T_{i_w^v} = t \mid R_{i_w^v} = 1) \tag{8}$$

$$= \sum_{u=0}^{u=w-1} g^v(i_u^v, t - t_{i_u^v, i_w^v} - S_{i_u^v}) \cdot \bar{p}^v_{i_u^v, i_w^v} \qquad (w \geq 1) \tag{9}$$

$T_{i_w^v}$ ：活動開始時刻

$$R_{i_w^v} = \begin{cases} 0 & \text{if 活動 } i_w^v \text{ が実行されなかった場合} \\ 1 & \text{if 活動 } i_w^v \text{ が実行された場合} \end{cases} \tag{7}$$

Model Formulation

Time window violation

活動が実行され，活動開始時刻が t である確率

$$g^v(i_w^v, t) = \Pr(T_{i_w^v} = t \mid R_{i_w^v} = 1) \tag{8}$$

家を出る時間に差異はないとする

$$g^v(i_0^v, t) = \begin{cases} 1 & t = T_0^v, \\ 0 & t \neq T_0^v. \end{cases} \tag{10}$$

$T_{i_w^v}$ ：活動開始時刻

$$R_{i_w^v} = \begin{cases} 0 & \text{if 活動 } i_w^v \text{ が実行されなかった場合} \\ 1 & \text{if 活動 } i_w^v \text{ が実行された場合} \end{cases} \tag{7}$$

Model Formulation

Time window violation

$[a_i, b_i]$: Time window
LT_i : Latest potential starting time
ET_i : Earliest potential starting time

合計遅着ペナルティ

$$\sum_{v \in V} \sum_{w=1}^{l^v} \sum_{t=b_{i_w^v}}^{LT_{i_w^v}} \lambda_{tpl}^{i_w^v} \cdot g^v(i_w^v, t) \cdot (t - b_{i_w^v}) \tag{11a}$$

合計早着ペナルティ

$$\sum_{v \in V} \sum_{w=1}^{l^v} \sum_{t=ET_{i_u^v}}^{a_{i_w^v}} \lambda_{tpe}^{i_w^v} \cdot g^v(i_w^v, t) \cdot (a_{i_w^v} - t) \tag{11b}$$

活動が実行され，活動開始時刻が t である確率：

Time window:

$$g^v(i_w^v, t) = \Pr(T_{i_w^v} = t \mid R_{i_w^v} = 1) \tag{8}$$

Illustrative Example

- 簡単な例で不確実性を考慮する意味を考える.

Variable	Variable set
Household members	$\eta = \{1\}$
Available vehicles	$V = \{V_1\}$
Out-of-home activities	$A = \{1, 2, 3\}$
Activity durations	$S = [s_1, s_2, s_3] = [1.5, 1.0, 2.0]$
Time availability windows	$[a_i, b_i] = \begin{bmatrix} 14.00 & 24.00 \\ 16.00 & 16.15 \\ 14.00 & 24.00 \end{bmatrix}$
Return-home windows	$[a_{n+i}, b_{n+i}] = \begin{bmatrix} 14.00 & 24.00 \\ 14.00 & 24.00 \\ 14.00 & 24.00 \end{bmatrix}$
Initial departure windows	$[\bar{a}_0^\alpha, \bar{b}_0^\alpha] = [14.00 \quad 16.00]$
End-of-day windows	$[\bar{a}_{2n+1}^\alpha, \bar{b}_{2n+1}^\alpha] = [14.00 \quad 24.00]$
Travel cost budget	$\mathbf{B}_t^1 = 8.00$
Maximum number of sojourns in any tour	$D_s = 4$

	t_{uw}^v					c_{uw}^1			
	To					To			
From	0	1	2	3	From	0	1	2	3
0	0.00	0.50	0.15	0.60	0	0.00	1.00	0.30	1.20
1	0.50	0.00	0.50	0.50	1	1.00	0.00	1.00	1.00
2	0.15	0.50	0.00	0.25	2	0.30	1.00	0.00	0.50
3	0.30	0.50	0.25	0.00	3	0.60	1.00	0.50	0.00

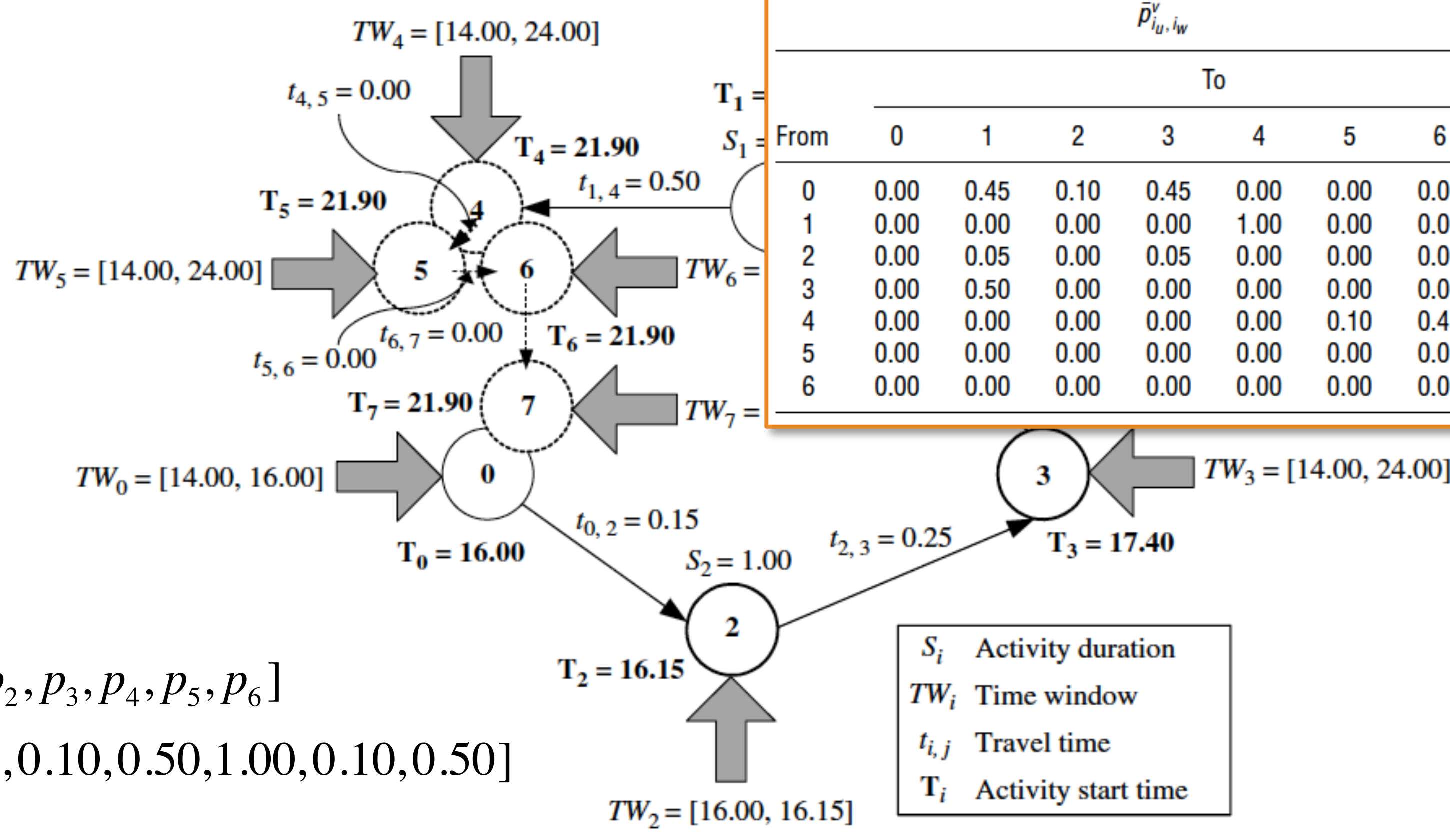
Activity 2 is tightly constrained by the time window

$$\lambda_{tt} = 1.0$$

$$\lambda_{tc} = 0.0$$

簡単のため旅行時間のみ

簡単な例で不確実性を考慮する意味を考える.



$\bar{p}^{v}_{i_u,i_w}$

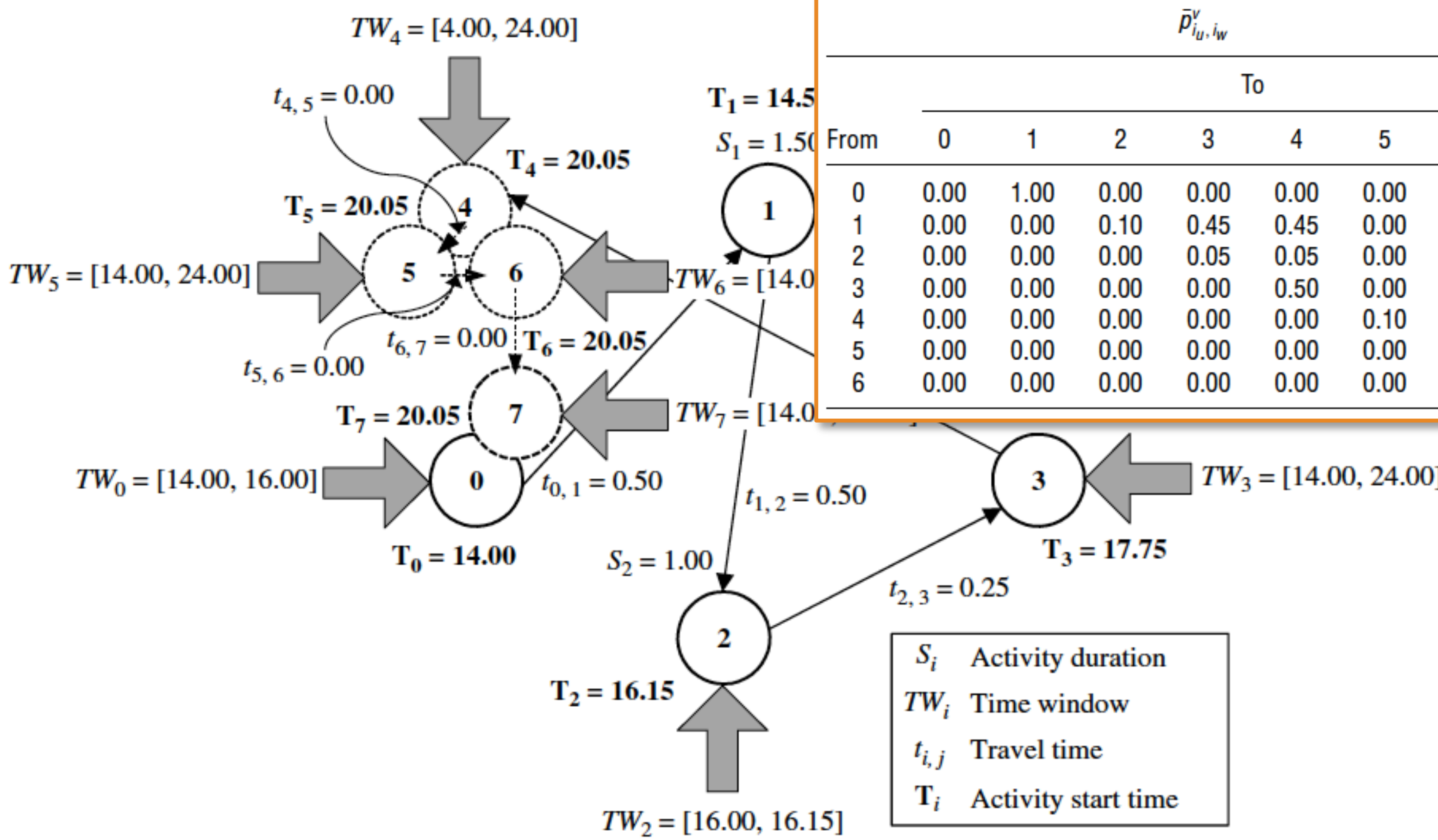
	To							
From	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.00	0.45	0.10	0.45	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.05	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.45	0.45
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6]$$
$$= [1.00, 0.10, 0.50, 1.00, 0.10, 0.50]$$

$$\min C(\mathbf{X}_i) = 1.40 \longrightarrow E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \xi) = 1.30$$

Illustrative Example

簡単な例で不確実性を考慮する意味を考える.



$\bar{p}^{v}_{i_u, i_w}$

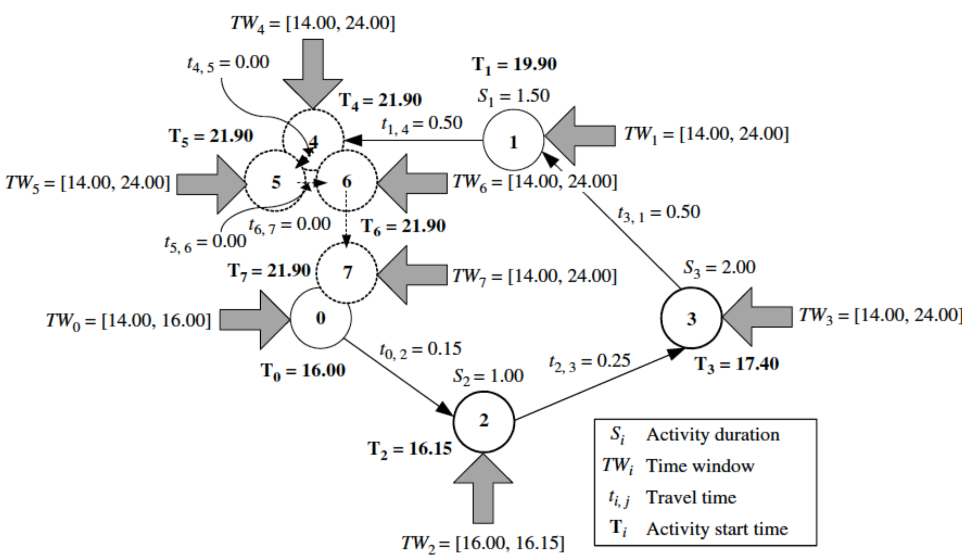
From	To 0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.10	0.45	0.45	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.45	0.45
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50

$$C(\mathbf{X}_i) = 1.55 \longrightarrow E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\xi}) = 1.17$$

Illustrative Example

簡単な例で不確実性を考慮する意味を考える.

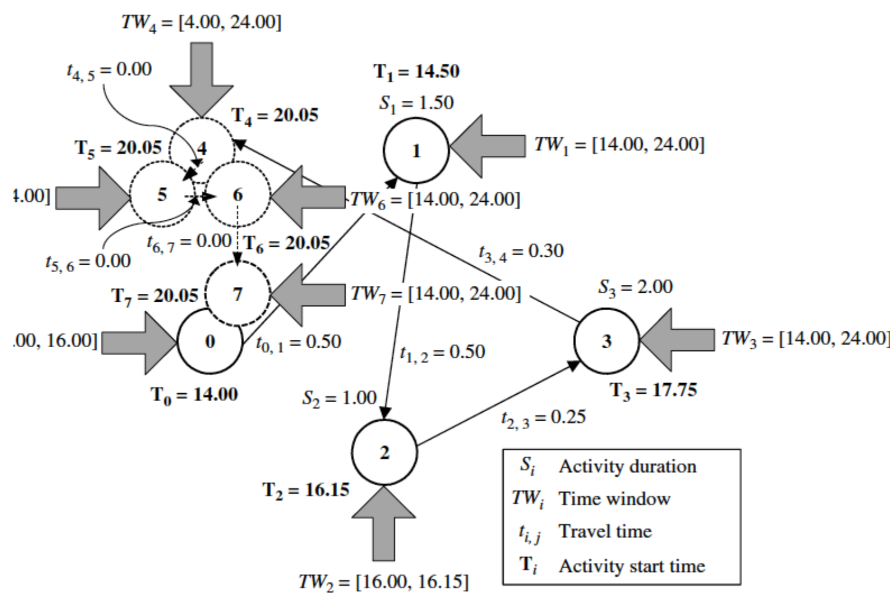
Pattern 1



$$\min C(\mathbf{X}_i) = 1.40$$

$$E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \xi) = 1.30$$

Pattern 2



$$C(\mathbf{X}_i) = 1.55$$

$$E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \xi) = 1.17$$

不確実な状況下では，事前のスケジューリングは必ずしも最適ではない

L-shaped Method

- 簡単な例では活動候補が3つのため，手計算で期待コストを計算することができた．しかし，実際の手続きは活動数（確率変数の状態数）にしたがって指数的に増加.
- SLPR (two-stage stochastic programming with recourse) の解法として，ここでは **“L-shaped method”** を用いる.
- L型法の基本的な考え方は，目的関数内のリコースコストを下限から始めてoptimal cutsを繰り返すことで徐々に近似していく.

L-shaped Method

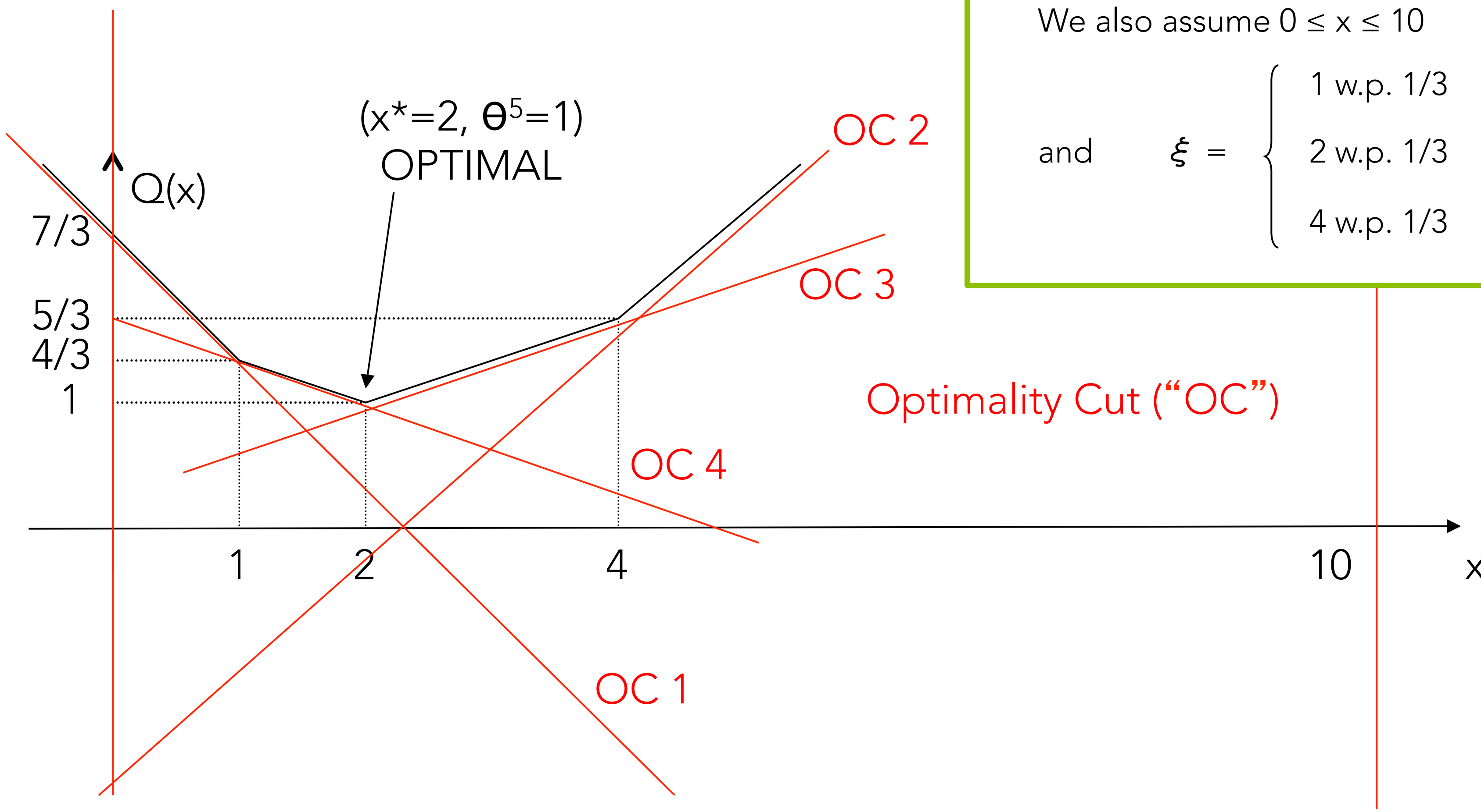
(*2) Graphical Image: an example

$\min z = 0 + Q(x, \xi_k)$ (we assume $c^T = 0$)

where $Q(x, \xi) = \begin{cases} \xi - x \text{ if } x \le \xi \\ x - \xi \text{ if } x \ge \xi \end{cases}$

We also assume $0 \le x \le 10$

and $\xi = \begin{cases} 1 \text{ w.p. } 1/3 \\ 2 \text{ w.p. } 1/3 \\ 4 \text{ w.p. } 1/3 \end{cases}$



L-shaped Method

- さきほどの簡単な例では，リコースコストが負になってしまう．

$$\min C(\mathbf{X}_i) = 1.40 \qquad E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\xi}) = 1.30 \qquad Q(\mathbf{X}_i) = -0.10$$

- モデル的に間違ってはいないが，非負の方が扱いやすい．

L-shaped Method

$$E_{\xi} Z(\mathbf{X}_i, \xi) = \min\{\tilde{C}(\mathbf{X}_i) + \tilde{Q}(\mathbf{X}_i)\} \qquad (1b')$$

として，期待コストの下限 $\tilde{C}(\mathbf{X}_i)$ を以下で定める.

$$\sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} \overline{p}_{uw}^{v} \cdot t_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v} \longrightarrow \sum_{v \in V} \sum_{u \in N} \sum_{w \in N} \tilde{t}_{uw}^{v} \cdot X_{uw}^{v}$$

$$\tilde{t}_{uw}^{v} = \begin{cases} t_{uw}^{v}, \text{ if } u = w + n \ or \ w = u + n; \\ p_u p_w t_{uw}^{v} + \frac{1}{2}\{p_u(1 - p_w) \min_{k \neq u,w} t_{uk}^{v} + (1 - p_u) p_w \min_{k \neq u,w} t_{kw}^{v}\}, \text{ otherwise;} \end{cases}$$

このとき，リコースコストQは常に非負となる.

$$\boxed{\tilde{Q}(\mathbf{X}_i) = C(\mathbf{X}_i) + Q(\mathbf{X}_i) - \tilde{C}(\mathbf{X}_i) \geq 0}$$

L-shaped Method

以上の準備をもとに，L-shaped method のMPを以下で定義する.

Master Problem (**MP**) :

$$\min_{(\mathbf{X}_i,\eta)} \tilde{C}(\mathbf{X}_i) + \eta \tag{13a}$$

s.t.

Constraint set I : (17) – (60)

Constraint set II : set of optimality cuts

L-shaped Method: Algorithm

Step 0:

- u = 0 とする．MPを初期化.

Step 1:

- u =: u + 1 とし，MPを解く．MPに解が存在しなければStep 4，それ以外の場合は解を $(\mathbf{X}_i^u, \eta^u)$ をし，Step 3に進む.

Step 3:

- $\eta \geq \tilde{Q}(\mathbf{X}_i^u)$ であれば，Step 4へ．それ以外は **optimality cut** を加えてStep 1 に戻る.

Step 4:

- 計算終了. $(\mathbf{X}_i^u, \eta^u)$ を解とする.

Solution Methodology

L-shaped Method: Optimality cuts

MPの解 $(\mathbf{X}_i^u, \eta^u)$ に対して，$\eta \geq \tilde{Q}(\mathbf{X}_i)$ を満たしていなければ制約条件に以下を加える．

$$\eta^u \geq \tilde{Q}(\mathbf{X}_i^u) \cdot \left(\sum_{(i,j)\in E^u} X_{ij}^v - 2n + |V| + 1 \right) \tag{15}$$

$$\{E^u = (i,j) \in E : i, j \neq 0, 2n+1 \ and \ X_{ij}^{v,u} = 1\}$$

$$\sum_{(i,j)\in E^u} X_{ij}^v \quad (\max = 2n-1)$$

$(2n-1)$　：活動場所の数（home除く）

$|V|$　：車両の数？？？

Proof. Consider the discrete variable-vehicle flows. Observe that the optimal vehicle flow vector from $\mathbf{X}_i^u$ to the MP is characterized by E^u and that

$$\sum_{(i,j)\in E^u} X_{ij}^{v,u} = 2n - |V|. \tag{16a}$$

Any other solution $\mathbf{X}_i^\lambda$ with a different edge set $E^\lambda \neq E^u$, and we further have

$$\sum_{(i,j)\in E^\lambda} X_{ij}^{v,\lambda} \leq 2n - |V| - 1. \tag{16b}$$

Based on the above argument, for solution $\mathbf{X}_i^u$, the right-hand side (RHS) of Equation (15) is equivalent to

$$\text{RHS} = \tilde{Q}(\mathbf{X}_i^u) \cdot (2n - |V| - 2n + |V| + 1) = \tilde{Q}(\mathbf{X}_i^u). \tag{16c}$$

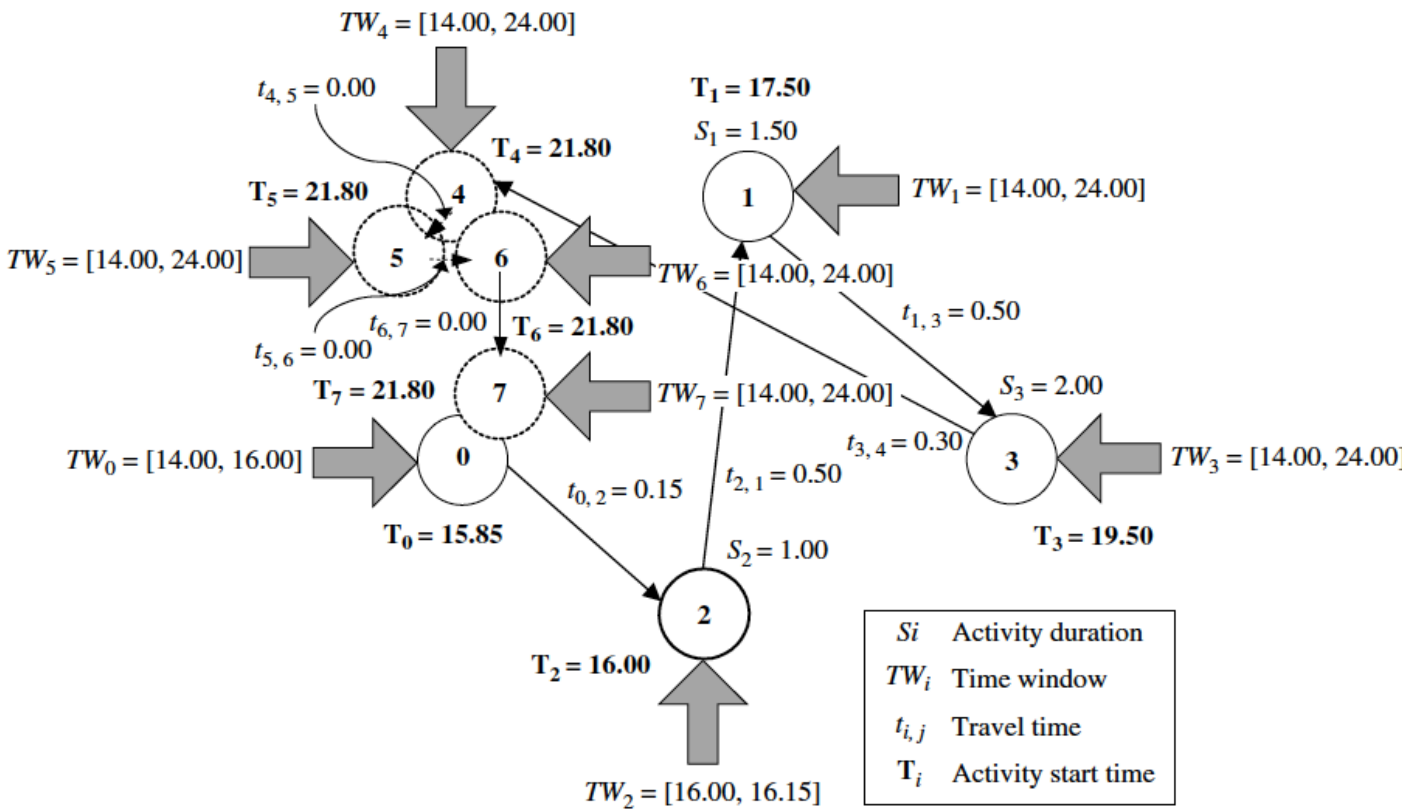
Therefore, we have $\eta \geq Q(\mathbf{X}_i^u)$, and Equation (15) is satisfied.

For any solution $\mathbf{X}_i^\lambda \neq \mathbf{X}_i^u$, the right-hand side of Equation (15) can be written as:

$$\text{RHS} \leq |\tilde{Q}(\mathbf{X}_i^\lambda)| \cdot (0 + 1 - 1) = 0, \tag{16d}$$

and also variable η is nonnegative. Therefore, variable η must satisfy $\eta \geq 0$ for any feasible solution $\mathbf{X}_i^\lambda$.

L-shaped Method: Optimal scheduling



$$C(\mathbf{X}_i) = 1.45 \longrightarrow \min E_\xi Z(\mathbf{X}_i, \xi) = 1.17$$

Summary

- 不確実性下におけるスケジューリング最適化問題を定式化.
- 二段階計画問題として確率計画を記述し，L-shaped method により求解.