Xiaosu MA, Hong K. LO

On joint railway and housing development strategy

Transportation Research Part B
vol.57(2013), pp.451-467

理論談話会2019 #10
M1 出原昇馬
2019/6/14

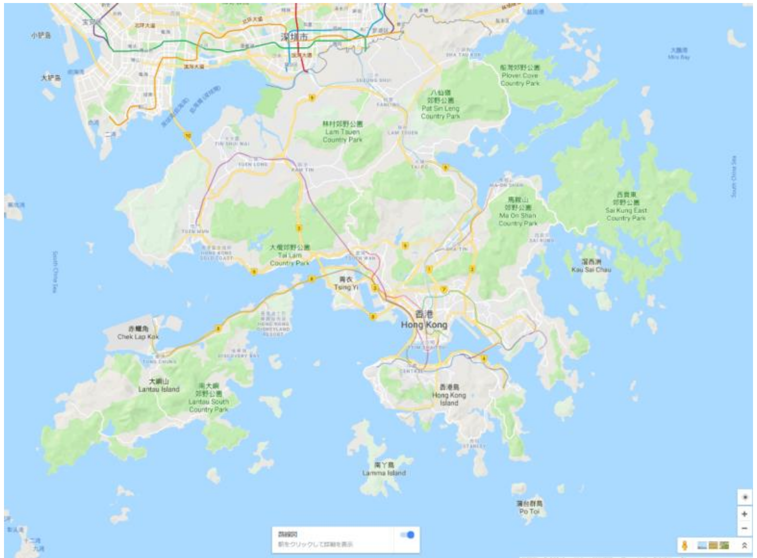
目次

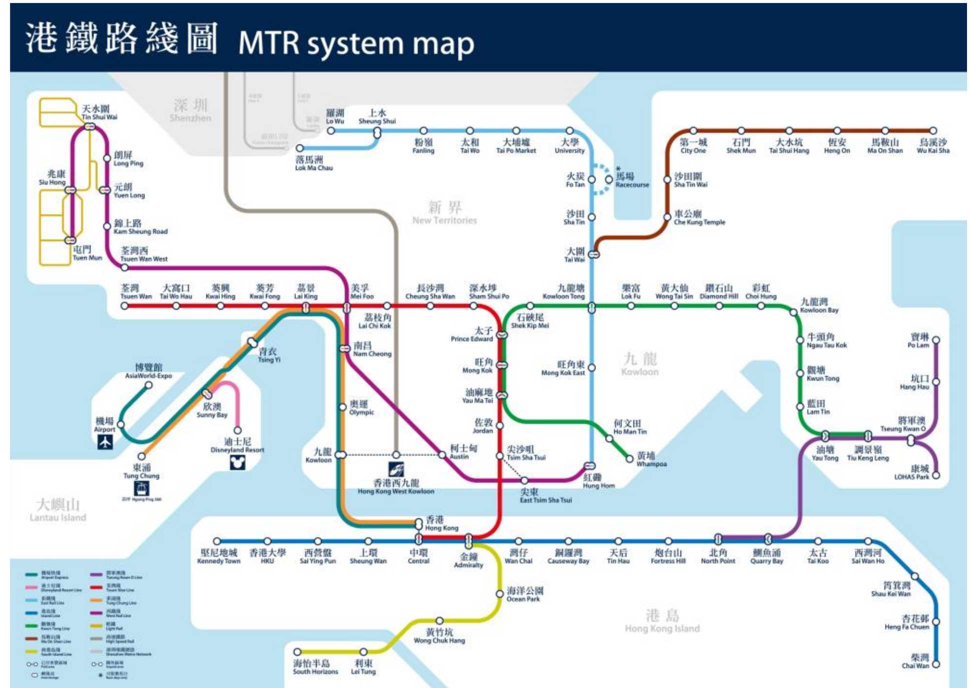
Abstract

- 高密な都市における持続的な発展をもたらすものとして**TOD**(Transit Oriented Development: 公共交通指向型開発)が注目されている.
- TODによるアクセシビリティの向上は都市全体における**住民の居住地選択**やそれに伴う**住宅価値の変動**につながる.
- 鉄道開発と住宅価値の関係については古典的なモデルの枠組みで研究がなされてきたが，都市全体のスケールでTODによる影響は議論されてこなかった.
- 本研究では付け値地代(bid-rent)理論に基づき，**均衡条件制約付き数理計画問題**として供給者－利用者の多段階モデルを記述し，鉄道＋住宅供給の複合戦略のシナジーを明らかにした.

1. Introduction(1)

香港の都市鉄道





http://www.mtr.com.hk/en/customer/tourist/index.php

- 香港MTR(Mass Transit Railway corp.)
  建設，投資，所有，運行に加え，デベロッパーとして住宅供給も行う．
  住宅部門の利益による鉄道部門への内部補助

住宅開発　　鉄道需要

不動産価値上昇　　サービス向上

- 日本の大都市近郊においても戦前から同様のことが行われてきた
  ex. 多摩田園都市開発，TXなど

既往研究・手法

交通インフラ整備と住宅供給の関係分析のためのモデル.

- **ヘドニック法(Waugh,1928など)**
  「財の価格はその財を構成する属性によって説明される」
  地価の説明要因として，生活環境やアクセシビリティを設定し，回帰分析により各々の属性価格を決定する.

  ×システム総体への影響が考慮されない
  ＝鉄道新線は沿線需要だけでなく，既存需要にも影響を与える

  ほかにも関数形の特定や多重共線性に難がある

- **土地利用・交通モデル(integrated land-use transport model)(Li et al.,2012など)**
  各行動選択メカニズムを記述．事業費と人口分布の関係についてmono-centricな都市における最適鉄道サービスについて考察.

本研究では，**鉄道・住宅の一体的開発が都市圏内の人口分布，交通行動，住宅価値に与える影響**を分析するための統合的なモデルを構築する.

The formulation

MPEC(均衡制約付き数理計画問題)

上位問題：開発者の利益最大化
住宅供給と鉄道サービスレベルの決定

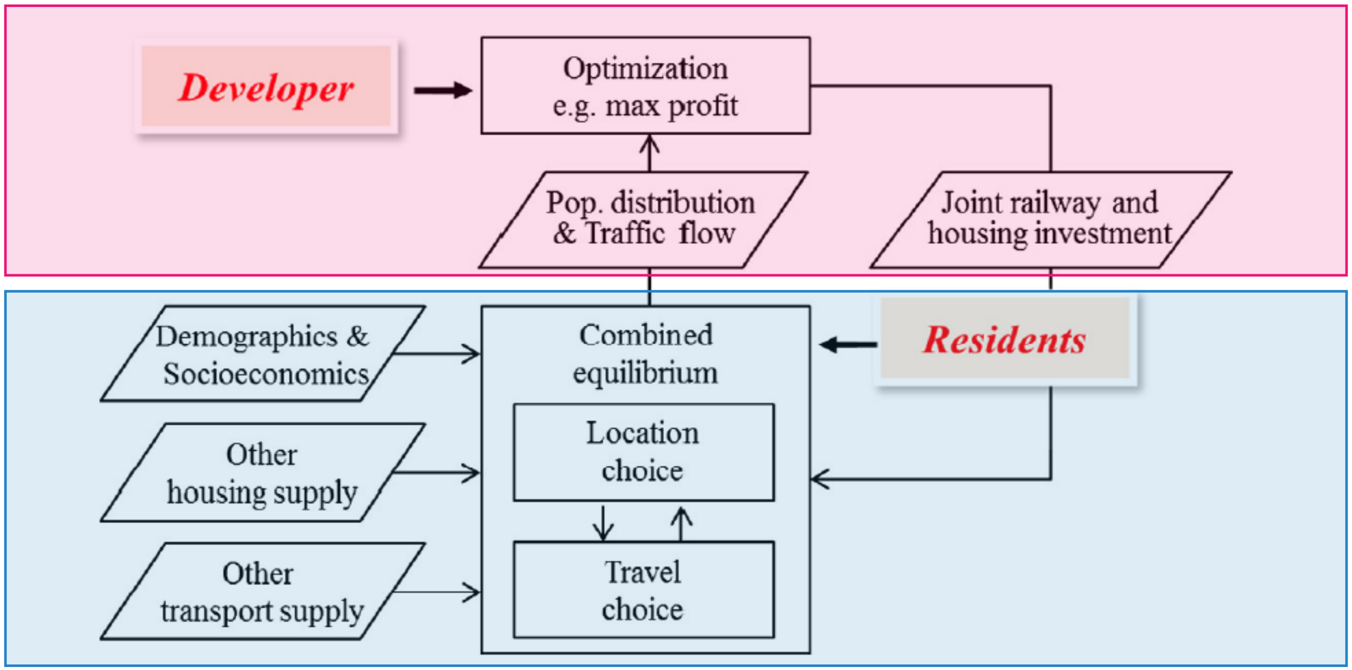


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

下位問題：住民の居住地選択＋交通行動選択
付け値地代理論に基づく均衡条件として記述

2.1.1. Travel choice

■ **住民の属性を以下の添え字で与える**

居住地： r
勤務地： s
所得層： k
住宅タイプ： v

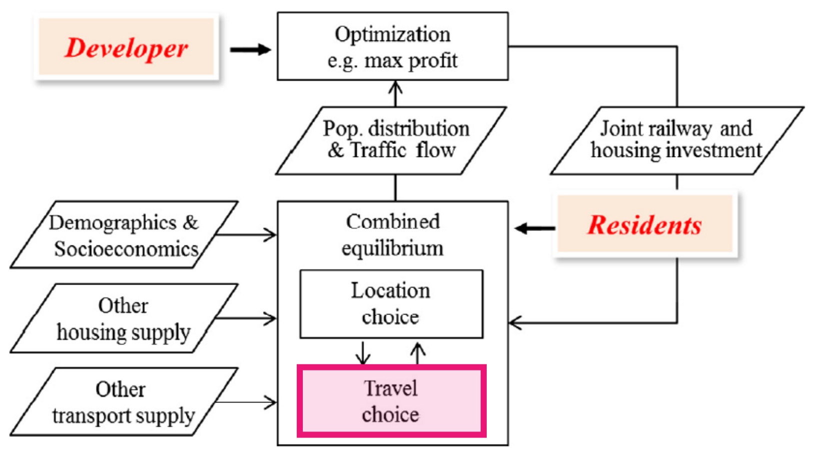


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

■ **鉄道経路について**

- OD ペアr, sに対して鉄道経路は1つと仮定．その旅行コストは

$$c_{\mathrm{rail}}^{rsk} = (ct\_i^{rs} + ct\_w^{rs}) \cdot vot^k + cp^{rs} \quad (1)$$

移動時間　待ち時間　時間価値　運賃

$$ct\_w^{rs} = \kappa_{cti} \cdot hw^{rs} \quad (2)$$

列車間隔

c_{rail}^{rsk}: ODペアrs, 所得層kの鉄道移動コスト，　ct_i^{rs}: ODペアrsの移動所要時間(固定),
ct_w^{rs}: ODペアrsの鉄道待ち時間，vot^k: 所得層kの住民の時間価値，　cp^{rs}: ODペアrsの運賃
κ_{cti}: 列車間隔に対する待ち時間パラメータ，　hw^{rs}: 列車間隔

◆ **開発者は列車間隔hw^{rs}と運賃cp^{rs}を決定変数として鉄道サービスレベルを決定**

■ **自動車経路について**

- ODペアr, sに対する自動車経路の旅行コストは

$$c_{p|\mathrm{auto}}^{rsk} = \sum_a \delta_{a,p}^{rs} (\underbrace{vot^k}_{\text{時間価値}} \cdot \underbrace{t_a}_{\text{時間}} + \underbrace{\rho_a}_{\text{通行料}}) \quad (3)$$

$c_{p|auto}^{rsk}$: ODペアrs, 所得層k, パスpの自動車移動コスト,
t_a: リンクaの移動時間（BPR関数）,
ρ_a: リンクaの通行料金,
$\delta_{a,p}^{rs}$: リンクaがODペアrsの経路pに含まれているか

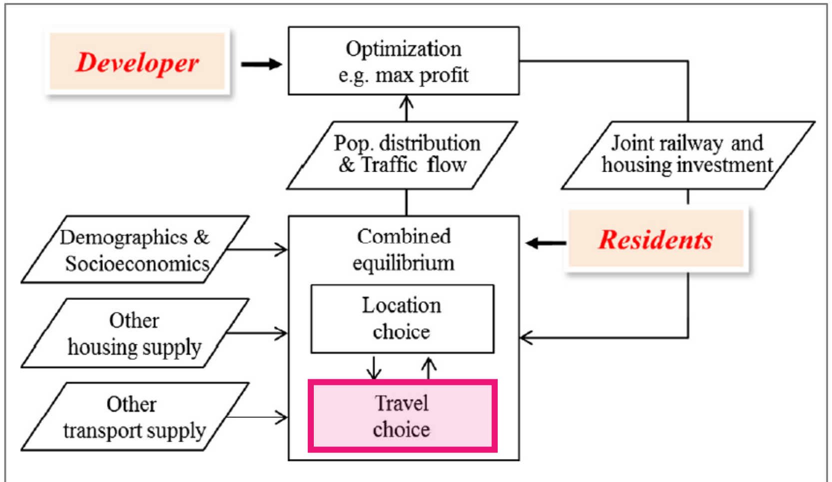


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- パスpの選択確率は

$$\mathrm{Pr}_{p|\mathrm{auto}}^{rsk} = \frac{\exp(-\beta_{\mathrm{route}}^k \cdot c_{p|\mathrm{auto}}^{rsk})}{\sum_{p' \in P^{rs}} \exp(-\beta_{\mathrm{route}}^k \cdot c_{p'|\mathrm{auto}}^{rsk})} \quad (4)$$

- ODペアrs,所得層kの自動車による期待旅行コストは

$$c_{\mathrm{auto}}^{rsk} = -\frac{1}{\beta_{\mathrm{route}}^k} \cdot \ln \left(\sum_{p' \in P^{rs}} \exp(-\beta_{\mathrm{route}}^k \cdot c_{p'|\mathrm{auto}}^{rsk}) \right) \quad (5)$$

β_{route}^k: スケールパラメータ

- 以上より，ODペアrs，所得層kの交通手段mの選択確率は

交通手段選択

$$\mathrm{Pr}_m^{rsk} = \frac{\exp(-\beta_{\mathrm{m}}^k \cdot c_m^{rsk})}{\sum_{m' \in \{\mathrm{rail},\ \mathrm{auto}\}} \exp(-\beta_{\mathrm{m'}}^k \cdot c_{m'}^{rsk})} \tag{6}$$

誤差項ω_m^{rsk}がスケールパラメータβ_m^kのGumbel分布に従う

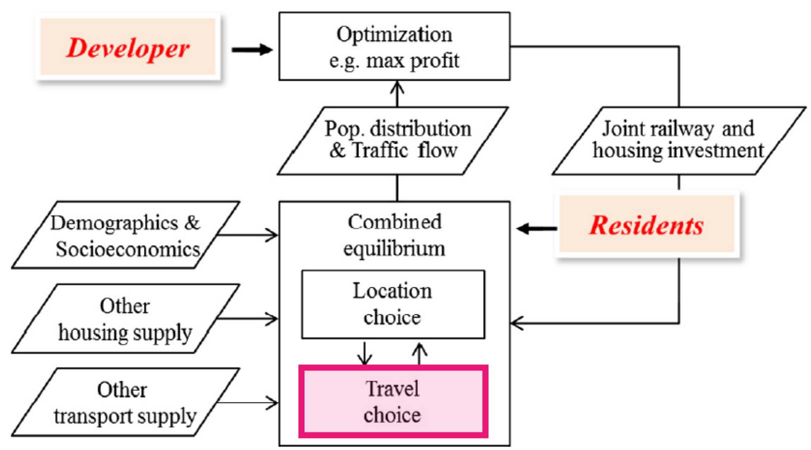


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- 勤務地s,所得層kの住民が居住地sを選択したときの期待不効用は

$$\mu^{rsk} = -\frac{1}{\beta_{\mathrm{m}}^k} \ln \sum_{m' \in \{\mathrm{rail},\ \mathrm{auto}\}} \exp(-\beta_{\mathrm{m'}}^k \cdot c_{m'}^{rsk}) \tag{7}$$

- 最終的にそれぞれのパスフローは

$$q_{\mathrm{rail}}^{rvsk} = q^{rvsk} \cdot \mathrm{Pr}_{\mathrm{rail}}^{rsk}, \tag{8}$$

$$f_{p|\mathrm{auto}}^{rvsk} = q^{rvsk} \cdot \mathrm{Pr}_{\mathrm{auto}}^{rsk} \cdot \mathrm{Pr}_{p|\mathrm{auto}}^{rsk} \tag{9}$$

q^{rvsk}: ODペアrsにおける住宅タイプv,所得層kの交通需要量

2.1.2. Location choice

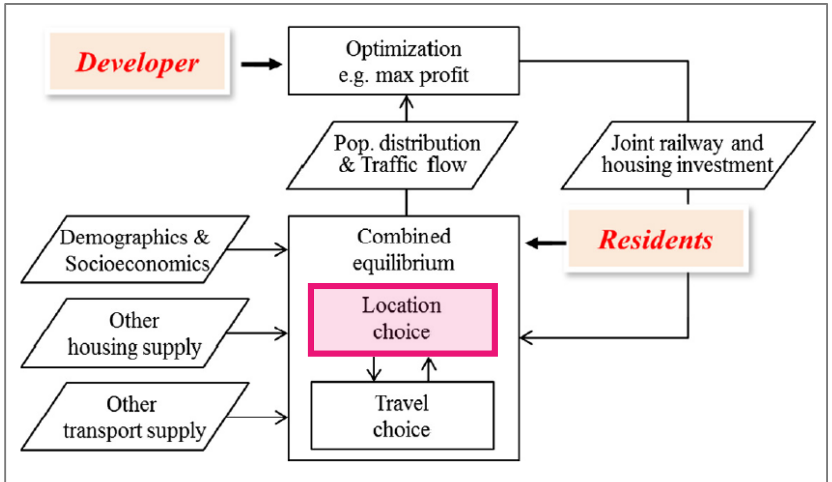


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- **付け値地代理論(bid-rent theory)**
  ：予算制約の下で居住地に対して入札(bid)を行い効用最大化

$$WP^{sk/rv} = b^{sk} - \mu^{rsk} + \alpha^k \cdot ls^v + wp \quad (10)$$

支払意思額　効用水準　旅行不効用　住宅供給

$WP^{sk/rv}$: 所得層k, 勤務地sの入札者の, 居住地rの住宅タイプvへの支払い意思額 (Willingness- to- pay)

b^{sk}: 入札者の効用水準($\in \mathbb{R}^{S\times K}$), μ^{rsk}: 所得層kの住民が認識するODペアrs間の旅行不効用, ls^v: 住宅供給規模(lot size), α^k: パラメータ, wp: 実際の賃料と合致させるための調整項

- WPは，誤差項$\omega^{sk/rv}$がスケールパラメータβのi.i.d.Gumbel分布に従う確率変数.
- 効用水準b^{sk}を調整することで，住宅供給と住宅需要の均衡状態を実現できる

住宅需給の均衡

$$\sum_{r'\in R}\sum_{v'\in V}\Psi^{r'v'} = \sum_{s'\in S}\sum_{k'\in K} D^{s'k'} \quad (11)$$

$\Psi^{r'v'}$: 居住地r'における住宅タイプv'の住宅供給数（内生変数），
$D^{s'k'}$: 勤務地s'における所得層k'の勤務者数（所与）

- 以上より，勤務地s,所得層kの住民が，居住地rにおける住宅タイプvを選択する確率は

居住地選択 (12)

$$\mathrm{Pr}^{sk/rv} = \frac{\exp(\beta \cdot WP^{sk/rv})}{\sum_{s'k' \in SK} \exp(\beta \cdot WP^{s'k'/rv})}$$

- ODペアrsにおける分布交通量は

$$q^{rvsk} = \Psi^{rv} \cdot \mathrm{Pr}^{sk/rv} \quad (13)$$

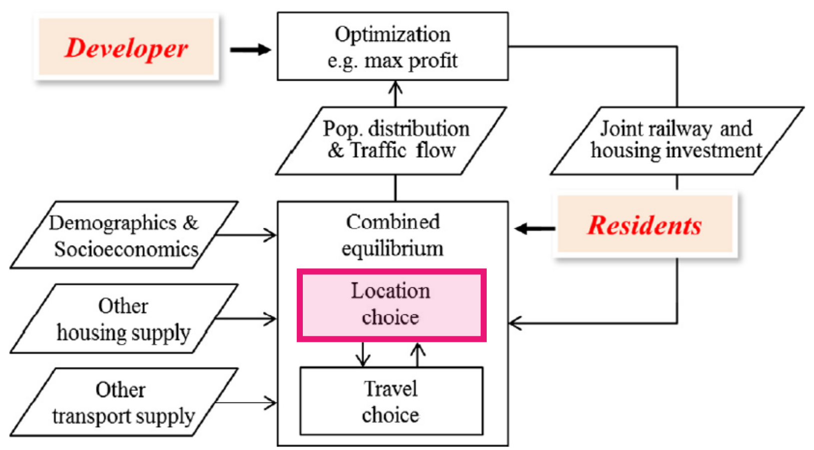


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- 供給効果を考慮した期待最大支払額は以下で表され，これは**最終的な住宅家賃**を表す (Ma and Lo, 2012)

$$\varphi^{rv} = \frac{1}{\beta} \cdot \ln\left(\sum_{s'k' \in SK} \exp(\beta \cdot WP^{s'k'/rv})\right) - \frac{1}{\beta} \cdot \ln(\Psi^{rv}) \quad (14)$$

住宅家賃

- 勤務地s,所得層kの住民が，居住地rにおける住宅タイプvに居住するときの**消費者余剰**は

消費者余剰

$$CS^{rvsk} = WP^{sk/rv} - \varphi^{rv} \quad (15)$$

消費者余剰　支払意思額　実際の家賃

2.1.3. Combined equilibrium formulation

- 以上の立式は均衡モデルとして表現される.これは**非線形相補性問題**(NCP: Nonlinear Complementarity Problem)に書き換えられる.

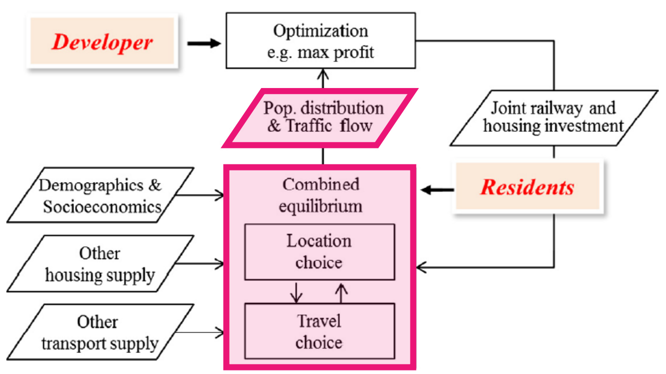


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

※式(20),(21):すべての住民に対して居住が保証されている

交通行動モデル

$$f^{rvsk}_{p|\text{auto}}(f^{rvsk}_{p|\text{auto}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\text{auto}}\cdot \Pr^{rsk}_{p|\text{auto}}) = 0, \quad \forall r, v, s, p, k, \quad (16)$$

$$f^{rvsk}_{p|\text{auto}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\text{auto}}\cdot \Pr^{rsk}_{p|\text{auto}} \geqslant 0, \quad \forall r, v, s, p, k, \quad (17)$$

$$q^{rvsk}_{\text{rail}}(q^{rvsk}_{\text{rail}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\text{rail}}), \quad \forall r, v, s, k, \quad (18)$$

$$q^{rvsk}_{\text{rail}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\text{rail}} \geqslant 0, \quad \forall r, v, s, k, \quad (19)$$

居住地選択モデル

$$b^{sk}\Big(\sum_{rv}\Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv} - D^{sk}\Big) = 0, \quad \forall s, k, \quad (20)$$

$$\sum_{rv}\Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv} - D^{sk} \geqslant 0, \quad \forall s, k, \quad (21)$$

非負条件

$$f^{rvsk}_{p|\text{auto}} \geqslant 0, \quad \forall r, v, s, p, k, \quad (22)$$

$$q^{rvsk}_{\text{rail}} \geqslant 0, \quad \forall r, v, s, k, \quad (23)$$

$$b^{sk} \geqslant 0, \quad \forall s, k. \quad (24)$$

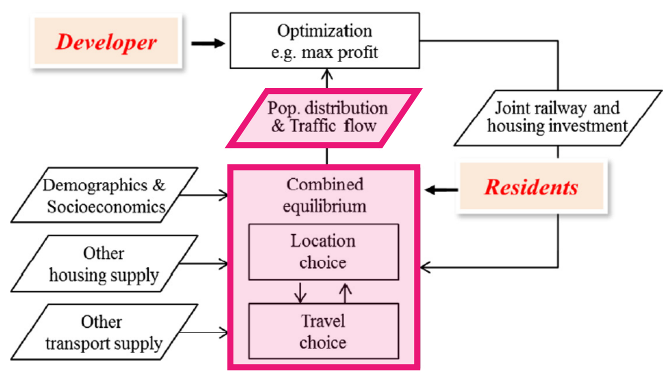


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- さらに，ギャップ関数$G(\boldsymbol{Z})$の最小化問題(=0)として記述.

$$\min G(\mathbf{Z}) = \sum_{rvskp} \underbrace{\vartheta\left(f^{rvsk}_{p|\mathrm{auto}},\ f^{rvsk}_{p|\mathrm{auto}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\mathrm{auto}}\cdot \Pr^{rsk}_{p|\mathrm{auto}}\right)}_{\text{自動車フロー}} + \sum_{rvsk} \underbrace{\vartheta\left(q^{rvsk}_{\mathrm{rail}},\ q^{rvsk}_{\mathrm{rail}} - \Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv}\cdot \Pr^{rsk}_{\mathrm{rail}}\right)}_{\text{鉄道フロー}}$$

$$+ \sum_{sk} \underbrace{\vartheta\left(b^{sk},\ \sum_{rv}\Psi^{rv}\cdot \Pr^{sk/rv} - D^{sk}\right)}_{\text{住宅需給均衡}}, \qquad (25)$$

where $\vartheta(\cdot)$ is defined as:

$$\vartheta(c,d) = \frac{1}{2}\phi^2(c,d), \qquad (26)$$

cかdのどちらかが0のとき最小となる関数

$$\phi(c,d) = \sqrt{c^2 + d^2} - (c+d). \qquad (27)$$

◆ $G(\boldsymbol{Z}) = 0$ は均衡制約付き数理計画問題MPECにおける均衡制約となり（後述）NCPも満たす.
◆ このとき居住分布およびそれぞれのリンクフローが出力される.

2.2. Developer’s investment decisions

開発者の行動

- 鉄道と住宅の一体的な投資戦略

鉄道投資費用 (28)

$$B_{\tilde{T}} = B_{\tilde{T}C} + st \cdot b_{\tilde{T}O}$$

$B_{\tilde{T}}$: 鉄道投資費用, $B_{\tilde{T}C}$: 初期建設費用,
st: 列車数, $b_{\tilde{T}O}$: 列車あたり運行費用

運賃収益 (29)

$$R_{\tilde{T}} = \sum_{rs} \underbrace{q^{rs}_{\text{rail}}}_{\text{需要}} \cdot \underbrace{cp^{rs}}_{\text{運賃}}$$

$R_{\tilde{T}}$: 総運賃収益

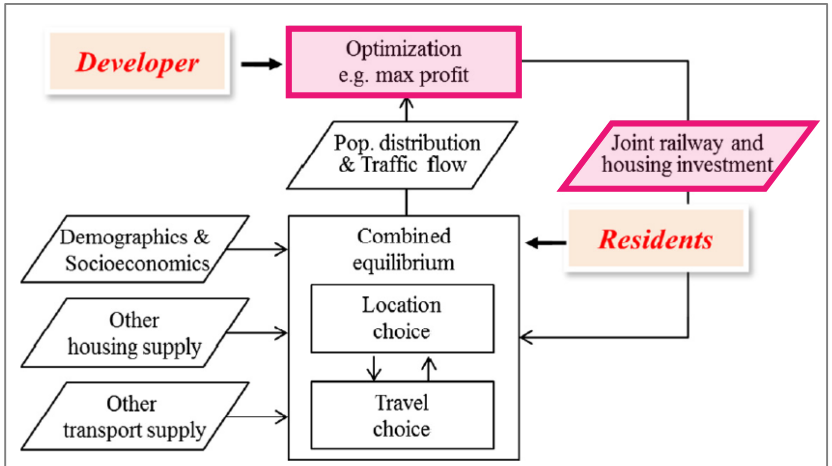


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

住宅投資費用 (30)

$$B_H = \sum_{v} \sum_{r} \underbrace{b^v_H}_{\text{単価}} \cdot \underbrace{\Psi^{rv}}_{\text{供給数}}$$

B_H: 住宅投資費用,
b^v_H: タイプvの住宅1軒あたり費用

住宅供給数 (31)

$$\underbrace{\Psi^{rv}}_{\text{供給数}} = \underbrace{\Psi}_{\text{住宅総数}} \cdot \underbrace{\Pr^{rv}}_{\text{供給割合}}$$

Ψ:住宅供給総数(=世帯総数(固定)),
$\Pr^{rv}$: 居住地rにおけるタイプvの供給割合

住宅家賃収益 (32)

$$R_H = \sum_{v} \sum_{r} \underbrace{\varphi^{rv}}_{\text{家賃}} \cdot \underbrace{\Psi^{rv}}_{\text{供給数}}$$

$R_{\tilde{T}}$: 総家賃収益

2.2. Developer’s investment decisions

- 単独開発者は住宅タイプ別供給割合Pr^{rv},列車間隔hw^{rs},運賃cp^{rs}を決定し，利益を最大化する．

開発者の利益最大化行動

$$\underset{\mathrm{Pr}^{rv},hw^{rs},cp^{rs}}{\text{Maximize}}\ \Pi = R_H + R_{\tilde{T}} - B_H - B_{\tilde{T}} \tag{33}$$

家賃収益　運賃収益　住宅投資　鉄道投資

subject to

$$G(\mathbf{Z}) = 0 \tag{34}$$

均衡制約
（住民の居住地選択＋交通行動）

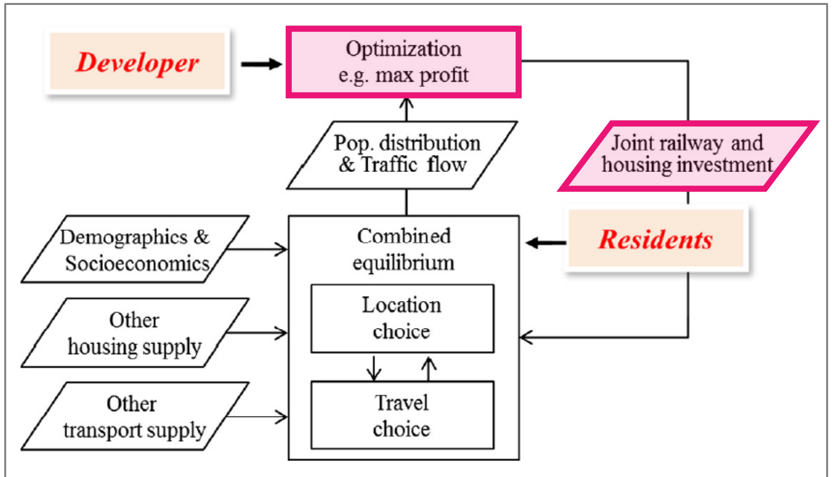


Fig. 1. The joint railway and housing development model.

- さらに以下の制約条件を満たす．

Constraints (1)–(15),

$$\sum_r \sum_v \mathrm{Pr}^{rv} = 1, \tag{35}$$
住宅供給割合

$$B_H + B_{\tilde{T}} \leqslant B, \tag{36}$$
予算制約

$$\mathrm{Pr}^{rv} \geqslant 0, \forall r, v, \tag{37}$$
非負条件

$$\underline{hw} \leqslant hw^{rs} \leqslant \overline{hw}, \forall r, s, \tag{38}$$
列車間隔の制約

$$\underline{cp} \leqslant cp^{rs} \leqslant \overline{cp}, \forall r, s, \tag{39}$$
運賃の制約

これが本モデルの主問題：均衡制約付き数理最適化問題（MPEC）

◆ これを解くことにより鉄道サービスレベルおよび住宅供給が決定．

◆ このMPECは非線形かつ非凸集合だが，商用ソルバーで解ける．ただし大域解の保証なし．

鉄道・住宅一体開発の効果

- シンプルな状況の下で**一体開発戦略が及ぼす効果について検証**する.
- **異なるステークホルダーがそれぞれ異なる戦略を実行**したときの，消費者余剰，生産者余剰，社会的余剰の変化といった**利益再配分(benefit redistribution)**のあり方について分析するのが大きな関心だが，これは今後の課題.
- 簡単のため以下の条件を想定する.

条件0
- 1居住地，1勤務地
- 住民は$k = 1,2, \dots, K$の所得層からなり，住宅需要は所得層ごとにそれぞれH^k(固定).

条件1
- 住宅タイプvごとに規模ls^vは異なる($ls^1 < ls^2 < \cdots < ls^V$).
- タイプごとの住宅供給数は$\Psi^v = \Psi \cdot \mathrm{Pr}^v$.
- 総住宅需要と総住宅供給は一致$\left(\Psi = H = \sum_k H^k\right)$

条件2
- ＯＤペアに対して交通機関は自動車(auto)と地下鉄(metro)の2つ.
- それぞれの交通機関に対して経路は1通り.
- 自動車のリンクコストはＢＰＲ関数（交通量依存）.

条件3
- 所得層ごとに時間価値が異なる$\left(vot^1 < vot^2 < \cdots < vot^K\right)$

- **定理1.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃といった鉄道投資の変化は，住民の住宅タイプの選択に影響しない.

※証明は補遺参照

- これはＯＤペアが1つのときのみ成立.
- 複数ＯＤペアの場合は必ずしも成立しない.

- **系1.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃といった鉄道投資の変化は，個人の消費者余剰にも総消費者余剰にも影響しない.

※証明は補遺参照

- 消費者余剰が変化しない≠鉄道サービスが住民に与える影響すべてが同一
- 所得が高い(=時間価値が高い)ほど，鉄道サービス改善により得る利益が大きい (Ma & Lo, 2012).
- 交通条件の改善により交通費用が減少すると，家賃が増加する.
- 旅行時間の減少による恩恵は時間価値の高い人の方がより大きい.
- 時間価値の高い人にとっては家賃の増加よりも交通費用減少による恩恵の方が大きい.

- **定理2.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃が増加するにつれ，すべての所得層で旅行不効用が単調増加し，家賃は単調減少する.

※証明は補遺参照

- **系2.**

条件0-3の下で，生産者余剰が最大となる最適列車間隔が存在する．またマルチモードネットワークにおいて運賃が増加すると生産者余剰は単調減少する.

※証明は補遺参照

- 競合交通機関がある場合，運賃が増加すると生産者余剰は単調減少する.

||

- 開発者は生産者余剰を維持するために鉄道運賃を低く設定する.

◆ **鉄道運賃の増額/減額は，住宅家賃の減額/増額に完全に吸収される**

2.4. Sensitivity analyses

■ 感度分析

- 以下を仮定する.
  - 1居住地,1勤務地が1鉄道と1高速道路を介してつながる.
  - 鉄道待ち時間は列車間隔hwの半分.
  - 自動車旅行時間にBPR関数.
  - 住宅タイプは大小の2つ.
  - 住民所得層は2つに分類(時間価値の大小)
  - 低所得層の効用水準は0に固定($b^L = 0$).
- 2つのシナリオを想定.

Scenario 1: 鉄道運賃固定，開発者は列車間隔と住宅タイプを決定

Scenario 2: 列車間隔固定，開発者は鉄道運賃と住宅タイプを決定

2.4. Sensitivity analyses

2.4.1. Developer’s cost and revenue

■ 住宅投資と家賃収益

Scenario 1 / Scenario 2

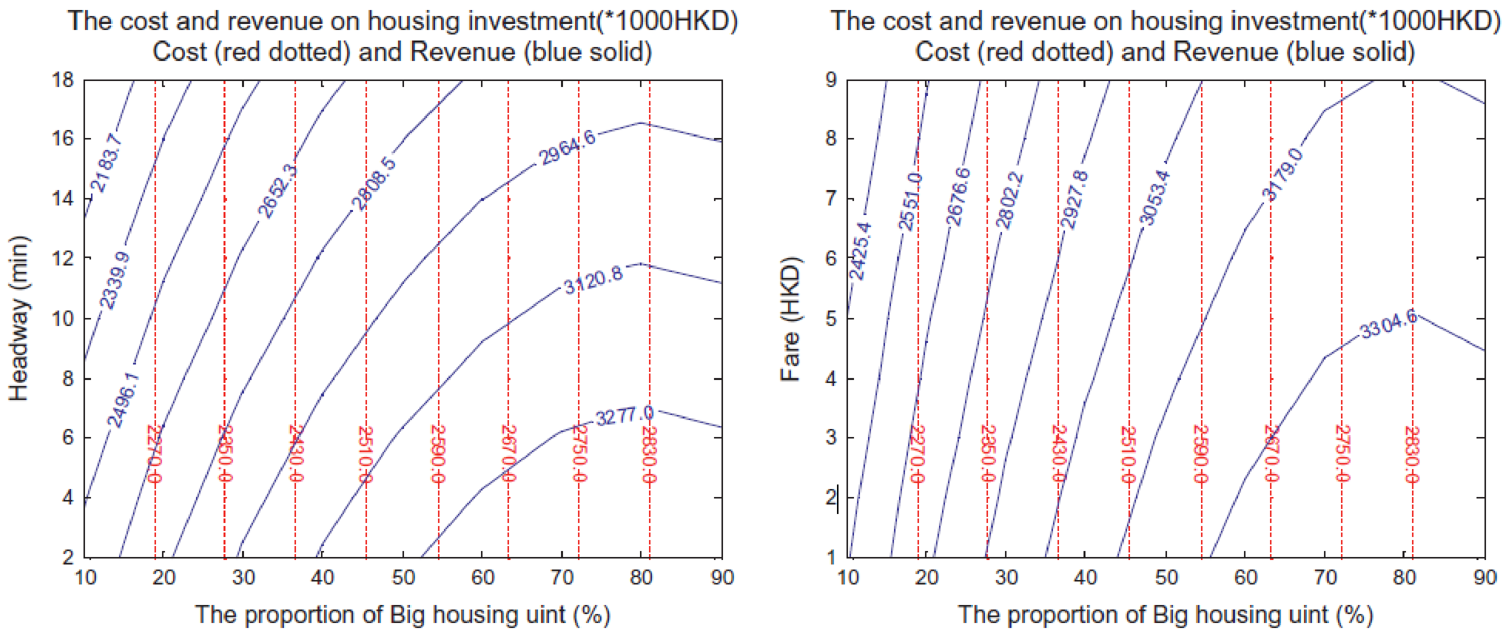


Fig. 2. The cost and revenue of housing investment.　住宅投資費用　家賃収益

- 大型住宅供給割合（横軸）が増加→住宅投資費用（赤）増加
- 列車間隔・運賃増加（縦軸）が増加→家賃収益（青）減少←定理2
- 収益を最大化する大型住宅供給割合が存在（80％付近）．

■ 鉄道投資と運賃収益

Scenario 1 **Scenario 2**

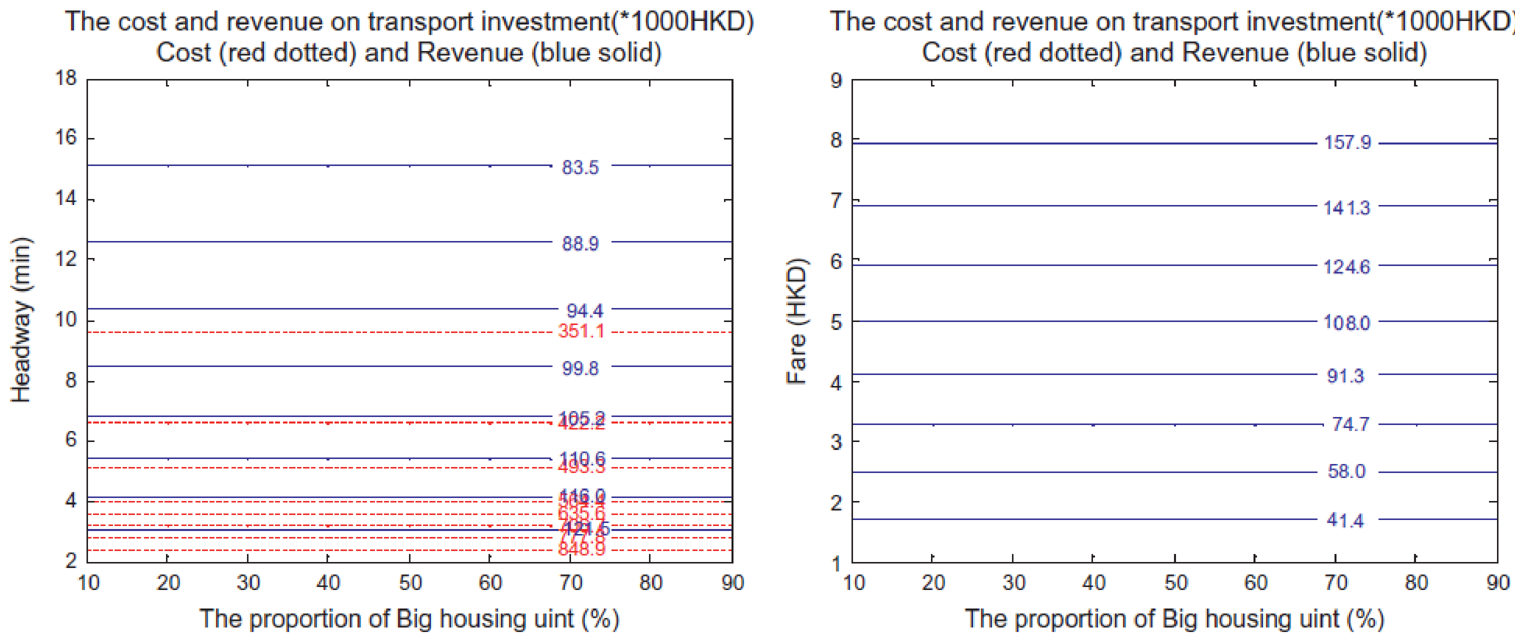
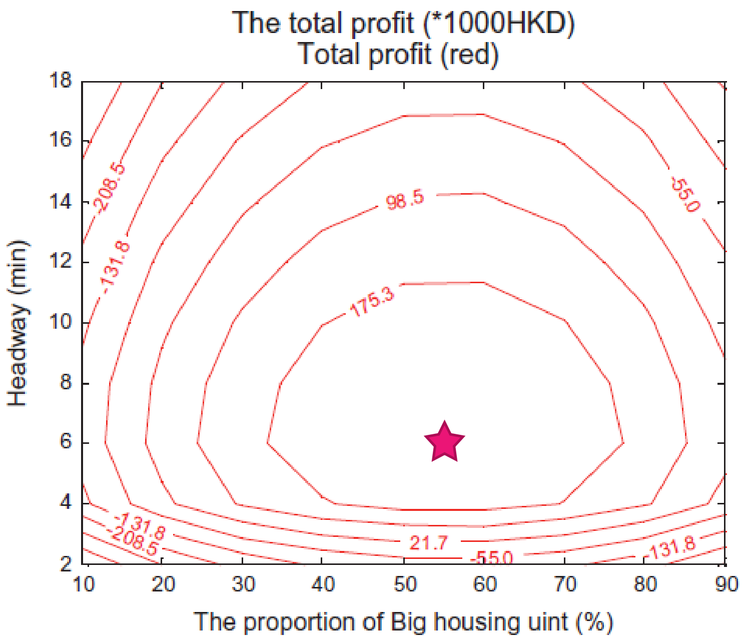


Fig. 3. The cost and revenue of railway investment. 鉄道投資費用 運賃収益

- 列車間隔（左縦軸）が減少→鉄道投資費用（赤）・運賃収益（青）増加
- 運賃増加（右縦軸）が増加→運賃収益（青）増加（ただし総鉄道需要は減少）
- 鉄道投資費用，運賃収益は住宅供給には影響されない．

■ 一体施策と総収益

Scenario 1



Scenario 2

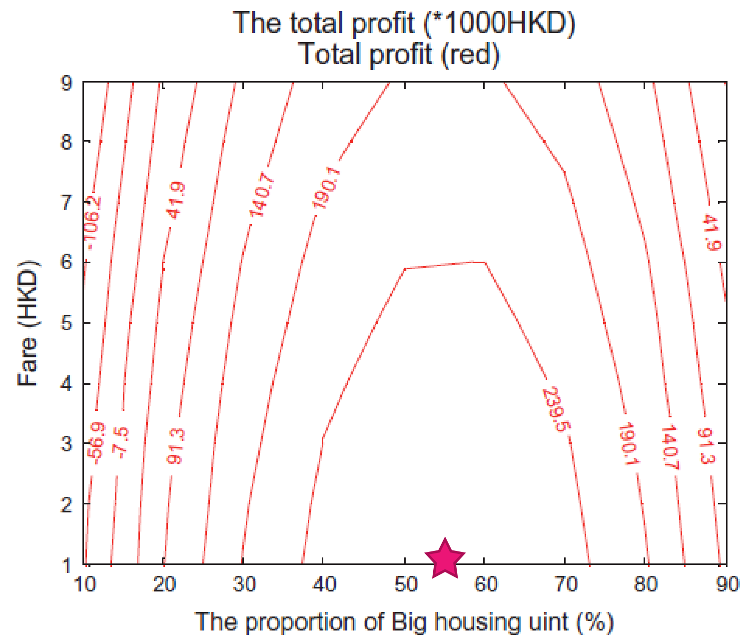


Fig. 4. The total profit or producer surplus.

- 左：列車間隔6分,大型住宅供給割合55％付近で総収益最大
- 右：**鉄道運賃0近傍**,大型住宅供給割合55％付近で総収益最大
- 今回の結果では2つのシナリオで最適住宅供給割合が一致した（常にそうとは限らない）．

2.4. Sensitivity analyses

2.4.2. Residents' choice and surplus

■ **所得別消費者余剰**

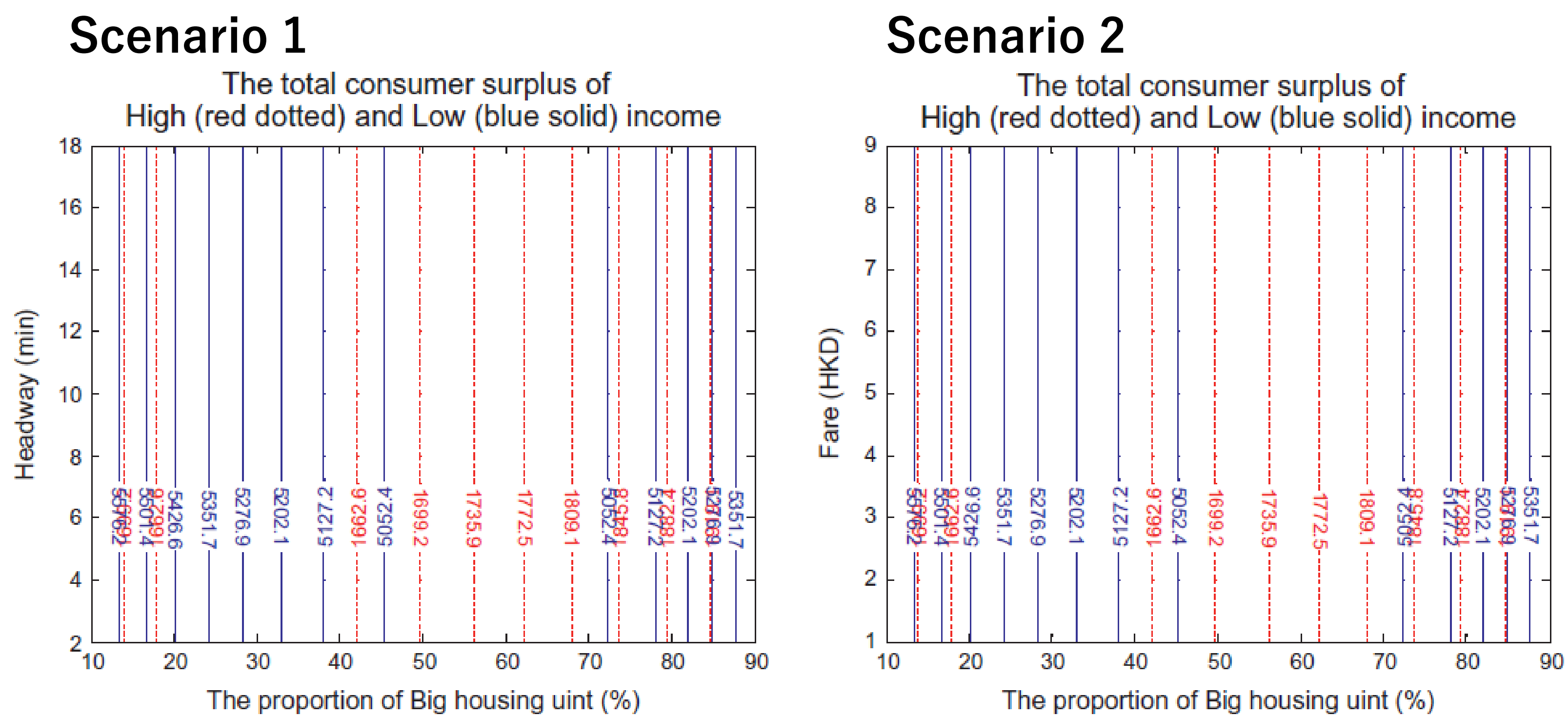


Fig. 5. The total consumer surplus by income group.　高所得層　低所得層

- 消費者余剰CSは鉄道サービスの変化（縦軸）に影響されない.
  ：交通コストの減少は住宅家賃の増加につながっている.
- 大型住宅供給割合（横軸）が増加→居住地選択および消費者余剰CSに影響
  ：高所得層は大型住宅供給割合が高いほど消費者余剰も増加．低所得層は逆.

2.4. Sensitivity analyses

■ 総消費者余剰

Scenario 1 Scenario 2

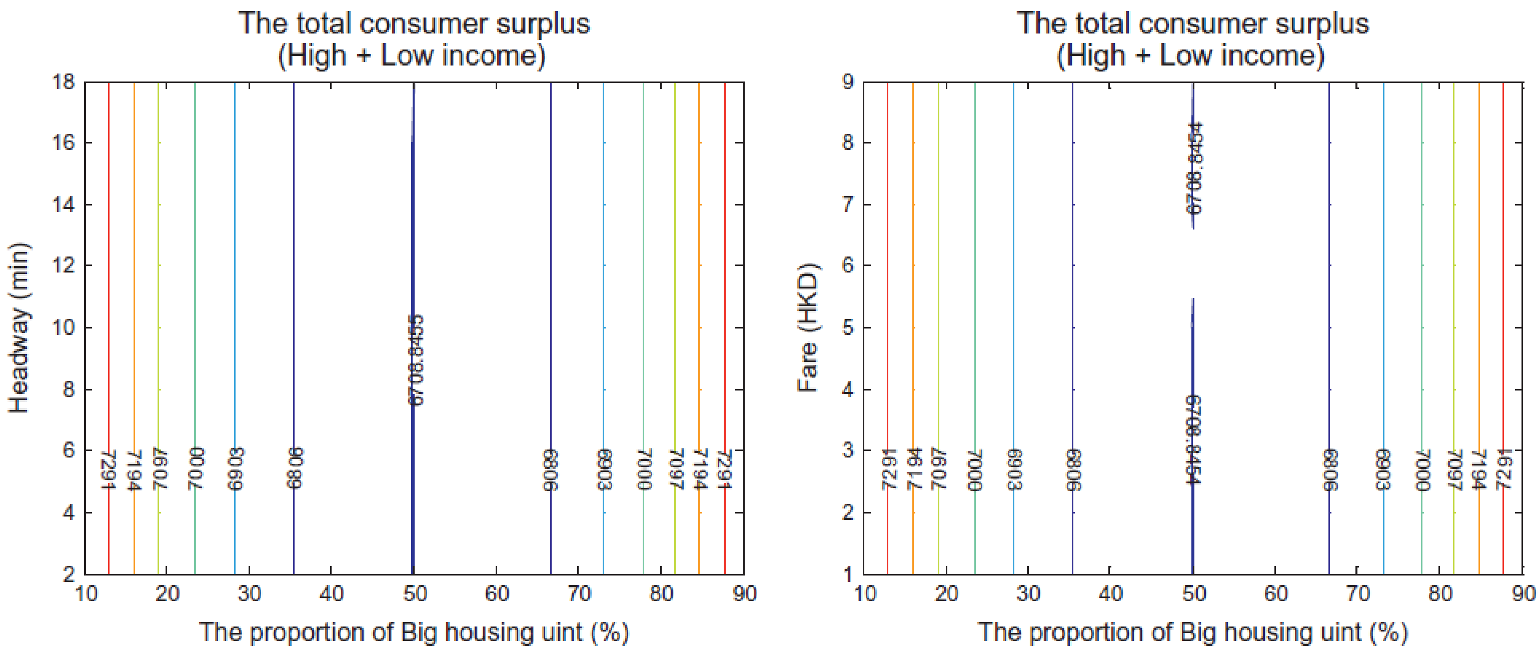


Fig. 6. The total consumer surplus.

- 総消費者余剰を最大にするのは大型住宅供給割合が0% or 100% 近傍.
- 総CSと，いずれかの所得層のCSの間にトレードオフがある（高所得層vs低所得層）.

2.4. Sensitivity analyses

2.4.3. Comparison with other objectives

■ **社会的余剰**(social welfare)＝**消費者余剰**(consumer surplus)＋**生産者余剰**(producer surplus)

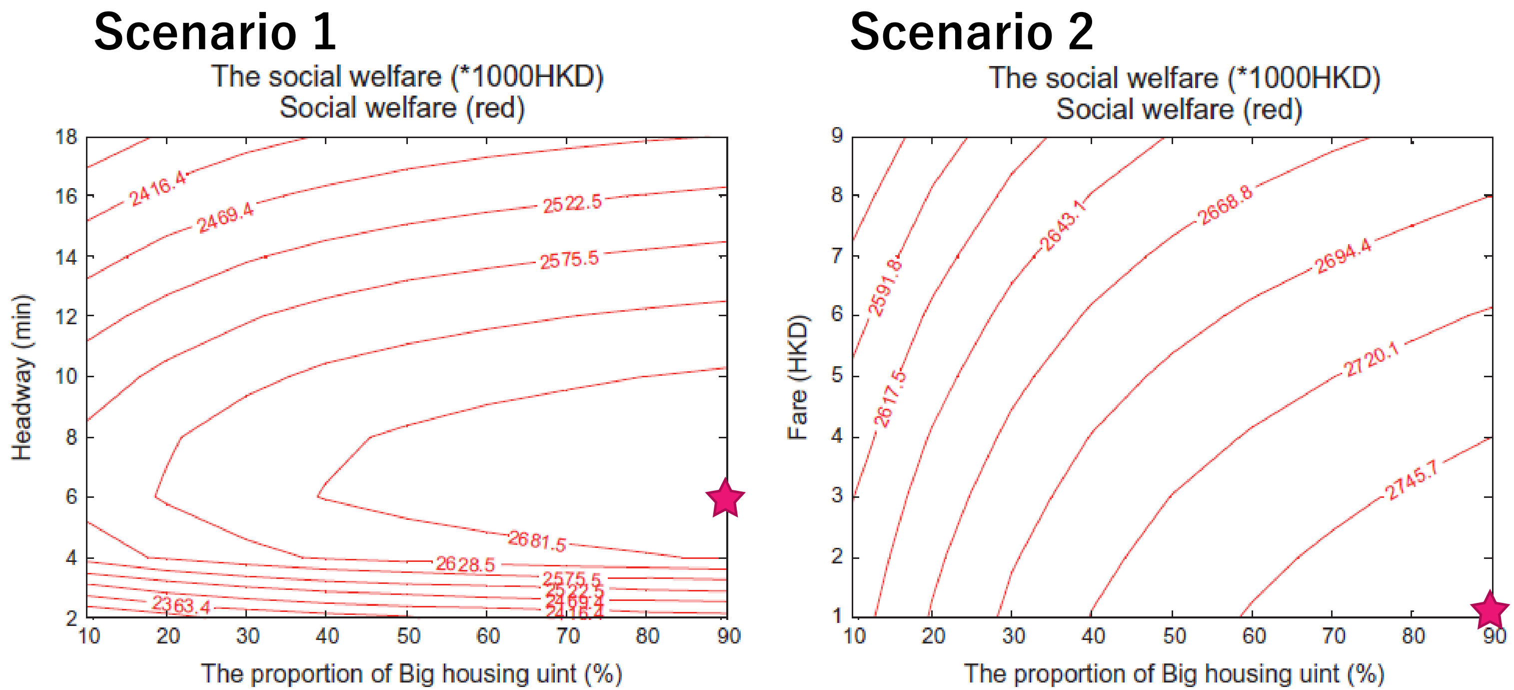


Fig. 7. The social welfare. 社会的余剰（政府視点）

- 左：列車間隔6分,大型住宅供給割合100％近傍で社会的余剰最大
- 右：鉄道運賃0近傍,大型住宅供給割合100％近傍で社会的余剰最大

◆ **開発者視点でも政府視点でも，鉄道サービスを向上するのが最善手**となっている．

◆ 大型住宅供給については，利益最大化では55％ほどが最善なのに対し，社会的余剰最大化では100％が最善．

◆ 鉄道と住宅の一体開発の親和性が明らかになった．一方で**住宅供給の調整も重要**．

Numerical studies

設定

- CBDが一つのmono-centric都市を想定し，数値実験を行う．
- zone 1&2は既存居住地．
- zone 3&4は新規計画居住地．
- それぞれのゾーンは鉄道リンク，高速道路リンクで結ばれる．

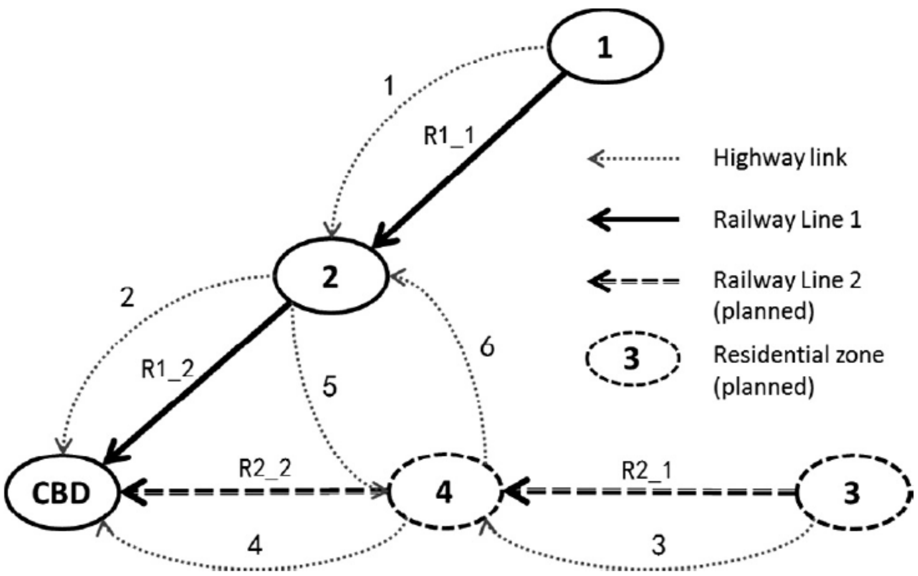


Fig. 8. A TOD network.

開発者：利益最大化
- 鉄道路線R2の列車間隔,運賃
- zone 3&4の住宅供給

※zone 1&2の住宅供給，鉄道路線R1の列車間隔は固定．ただし**運賃は変更可能**.

- 以下の仮定を置く．

(a) 1世帯1通勤者であり，式(7),(10)の知覚旅行コストに基づき居住地を選択.
(b) 1世帯当たり1軒の住宅に居住.
(c) 居住地はすべて自由に選択可能.

3.1. The optimal joint railway and housing investments

鉄道と住宅の最適投資

Table 1
The railway investment decisions.

Indicators	Unit	R1	R2
Headway	min	5 (fixed)	1.7
Fare	HKD/km	1.8	1.8

Table 2
The housing investment decisions.

Housing type	Old areas (in 1000 units)			New areas (in 1000 units)	
	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Sub-total
Big	15	15	2.8 (5.5%)	3.3 (6.5%)	6.1 (12%)
Small	10	10	20.3 (40.7%)	23.6 (47.3%)	43.9 (88%)
Total	25	25	23.1 (46.2%)	26.9 (54.8%)	50 (100%)

- R2では比較的短い列車間隔.
- zone 3&4において小型住宅供給割合が高い.
- CBDに近いzone 4により投資がなされている.

3.2. Impacts on residents' choices and land value

所得構成・道路混雑・住宅構成・家賃

交通条件の変化は交通行動だけでなく居住地分布や地価にも影響.

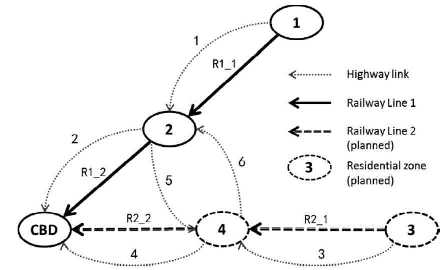


Fig. 8. A TOD network.

Table 3
Residents' travel mode choices

Group	Mode	Zone 1 (%)	Zone 2 (%)	Zone 3 (%)	Zone 4 (%)
High	Auto	69	42	50	22
	Rail	31	58	50	78
Low	Auto	56	32	43	20
	Rail	44	68	57	80

低所得層の方が鉄道利用割合大

CBDに近いところで鉄道需要大

Table 4
The highway link congestion levels (V/C ratio).

Highway	Link 1	Link 2	Link 3	Link 4	Link 5	Link 6
V/C ratio	0.77	1.04	0.53	1.02	0.55	0.35

CBDに近いリンクで混雑

Table 5
Residents' location and housing choices.

Housing type	Group	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Big	High	7.0 (46%)	5.4 (54%)	1.3 (49%)	1.9 (58%)
	Low	8.0 (54%)	4.6 (46%)	1.4 (51%)	1.4 (42%)
Small	High	4.4 (44%)	7.7 (51%)	9.3 (46%)	13.0 (55%)
	Low	5.6 (56%)	7.3 (49%)	11.0 (54%)	10.6 (45%)

CBDに近いところで高所得層の居住割合が高い

Table 6
The housing rents.

Housing rent	Unit	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Big	HKD/day	109	120	123	131
Small	HKD/day	108	114	106	114

CBDに近いところで家賃大

シナリオ比較

Scenario A: **鉄道と住宅の一体開発**（本モデル）
Scenario B: 新規開発を**既存のものと同一**に設定（住宅構成・鉄道サービス）
Scenario C: 新規居住地は既存住宅地と同一に設定し，**鉄道サービスのみ最適化.**

Table 7
Comparisons of the overall system performance.

Outcome indicators	Scenario A (Joint rail and housing investment)	Scenario B (Same rail and housing investment)		Scenario C (Same housing but optimized rail investment)	
Total travel time[a]	533	589	10.5%	539	1.1%
Total consumer surplus[b]	1340	1237	−7.7%	1238	−7.6%
Housing investment cost[c]	1736	1880	8.3%	1880	8.3%
Housing revenue[c]	2049	2092	2.1%	2104	2.7%
Railway investment cost[c]	234	212	−9.4%	233	−0.4%
Railway fare revenue[c]	107	62	−42.1%	110	2.8%
Developer's total profit[c]	185	62	−66.5%	102	−44.9%
Social welfare[c]	187	63	−66.3%	103	−44.9%

[a] The unit is 1000 min/day.
[b] The unit is million HKD/day.
[c] The unit is million HKD/year.

ほとんどの指標においてScenario Aの方が優位！

- ◆ **それぞれ個別に行う場合に比べて鉄道と住宅の一体的開発はより効率的であることが確かめられた.**
- ◆ **この下では，運賃収益が家賃収益によって補填されるため，開発者の交通条件改善のインセンティブが自然に働く.**

4. Conclusion

- 鉄道と住宅の一体開発による効果を明らかにするための**フレームワークの構築**.
- 社会的余剰や鉄道サービスといった観点で**鉄道と住宅の一体的開発の有意性**が確かめられた.
- 社会的余剰最大化を目的関数とする場合は住宅供給のタイプが偏る.
  したがって，利益最大化の下で多様なタイプの住宅が供給されるように，すべての主体への公平性を担保するという観点から，社会余剰最大化の要件においては**住宅供給の調整**を行うべきであり，これについては更なる研究が必要.
- **PPP(Public-Private Partnership)**など様々な主体が存在する際の戦略についても本論文におけるモデルは拡張可能．本論文では単独の利益志向型開発者の場合を想定したが，ほかの場合についても検討することが重要.

補遺

▶ **定理1.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃といった鉄道投資の変化は，住民の住宅タイプの選択に影響しない．

<proof>

式(1)-(7)より，列車間隔の変化∂hw,運賃の変化∂cpにより旅行不効用が変化する．これを$\Delta\mu^k(k=1,2,\dots,K)$とする．
定理1.は式(12)のタイプvごとの住民の居住地選択の変化が0になるというのと同値であるため，

$$\Delta \mathrm{Pr}^{k/v} = \frac{\exp(\beta\cdot(WP^{k/v}+\Delta WP^{k/v}))}{\sum_{k'\in K}\exp(\beta\cdot(WP^{k'/v}+\Delta WP^{k'/v}))} - \frac{\exp(\beta\cdot WP^{k/v})}{\sum_{k'\in K}\exp(\beta\cdot WP^{k'/v})} = 0. \quad (40)$$

Simplifying (40), we have:

$$\Delta WP^{k/v} = \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{\sum_{k'\in K}\exp\left(\beta\cdot(WP^{k'/v}+\Delta WP^{k'/v})\right)}{\sum_{k'\in K}\exp(\beta\cdot WP^{k'/v})}\right\}. \quad (41)$$

これは，支払意思額WPがすべての所得層に対して同一ということであり，

$$\Delta WP^{1/v} = \Delta WP^{2/v} = \cdots = \Delta WP^{K/v}, \quad (42)$$

According to (10), we have:

$$\Delta WP^{k/v} = \Delta b^k - \Delta\mu^k, \forall k, v. \quad (43)$$

ロジットモデルにおいては効用の差がわかればよいので，所得層$k=1$の効用水準を$b^1=0$とする．このとき住宅需給均衡を満たす効用ベクトル$b^k(k=1,2,\dots,K)$を見つけることができる．

交通条件が変化しても所得層$k=1$の効用水準は変わらないため，$\Delta b^1 = b^{1(1)} - b^{1(0)} = 0$となる($b^{1(1)}, b^{1(0)}$: 交通条件の変化前後の効用水準)．

$$\Delta WP^{1/v} = \Delta b^1 - \Delta\mu^1 = -\Delta\mu^1, \forall v, \quad (44)$$

$$\Delta WP^{k/v} = \Delta b^k - \Delta\mu^k = b^{k(1)} - b^{k(0)} - \Delta\mu^k, \forall v, \quad (45)$$

式(42),(44),(45)より

$$b^{k(1)} = b^{k(0)} + \Delta\mu^k - \Delta\mu^1, \forall v. \quad (46)$$

Putting (46) into (45), we have,

$$\Delta WP^{k/v} = -\Delta\mu^1, \forall v \quad (47)$$

旅行不効用$\Delta\mu^k$が決まっているとき，交通条件変化後の新たな均衡解は式(46)により$b^{k(1)}$を選ぶことで求まる．このとき各所得層kの住宅タイプの選択（1居住地1勤務地のため）としてのすべての供給制約も同一となる．したがって住民の住宅タイプの選択は変化しない．

$$\Delta q^{vk} = \Psi^v\cdot\Delta \mathrm{Pr}^{k/v} = 0. \quad \square \quad (48)$$

▶ **系1.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃といった鉄道投資の変化は，所得層ごとの消費者余剰にも総消費者余剰にも影響しない．

<proof>

式(14)より，家賃の変化は

$$\Delta\varphi^r = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\sum_{k'\in K}\exp(\beta\cdot(WP^{sk'/r}+\Delta WP^{sk'/r}))}{\sum_{k'\in K}\exp(\beta\cdot WP^{sk'/r})}\right) = \Delta WP^{k/v} = -\Delta\mu^1. \tag{49}$$

これより，家賃の変化は支払意思額の変化と同値であり，さらに所得層$k=1$の旅行不効用の変化と同一である（定理1.証明参照）．さらに式(7)により，条件2,3を単一交通機関，同質な時間価値という仮定に単純化した場合，旅行コストの減少は，同じ値だけの家賃の上昇を導くということがわかる．
式(15),(44)-(49)より消費者余剰の変化は，

$$\Delta CS^{vk} = \Delta WP^{k/v} - \Delta\varphi^v = 0.$$

これは，列車間隔や運賃の変化はそれぞれの消費者余剰に変化を及ぼさないということを示す．すなわち住民は交通条件の改善に対して恩恵を受けない．したがって総消費者余剰も変化しないことになる．
このことは定理1.を用いて以下のようにも証明できる．

$$\frac{\partial WP^{1/v}}{\partial hw} = \frac{\partial WP^{2/v}}{\partial hw} = \ldots = \frac{\partial WP^{K/v}}{\partial hw} = \frac{\partial WP^{k'/v}}{\partial hw}, \forall k' \in \{1,2,\ldots,K\},$$
$$\frac{\partial WP^{1/v}}{\partial cp} = \frac{\partial WP^{2/v}}{\partial cp} = \ldots = \frac{\partial WP^{K/v}}{\partial cp} = \frac{\partial WP^{k'/v}}{\partial cp}, \forall k' \in \{1,2,\ldots,K\}.$$

Accordingly, we have:

$$\frac{\partial\varphi^v}{\partial hw} = \frac{\partial WP^{k'/v}}{\partial hw}, \forall k' \in \{1,2,\ldots,K\},$$
$$\frac{\partial\varphi^v}{\partial hw} = \frac{\partial WP^{k'/v}}{\partial hw}, \forall k' \in \{1,2,\ldots,K\},$$
$$\frac{\partial CS^{vk}}{\partial hw} = \frac{\partial WP^{k/v}}{\partial hw} - \frac{\partial\varphi^v}{\partial hw} = 0,$$
$$\frac{\partial CS^{vk}}{\partial cp} = \frac{\partial WP^{k/v}}{\partial cp} - \frac{\partial\varphi^v}{\partial cp} = 0.$$
$$\frac{\partial \mathrm{Pr}^{k/v}}{\partial hw} = \beta\cdot\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial hw} - \beta\cdot\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\sum_k\left(\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial hw}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{Pr}^{k/v}}{\partial cp} = \beta\cdot\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial cp} - \beta\cdot\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\sum_k\left(\mathrm{Pr}^{k/v}\cdot\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial cp}\right) = 0.$$

Define the total consumer surplus as:

$$CS = \sum_k\sum_v((\Psi\cdot\mathrm{Pr}^v\cdot\mathrm{Pr}^{k/v})\cdot CS^{vk}).$$

$$\frac{\partial CS}{\partial hw} = \sum_v\sum_k\Psi\cdot\left(\frac{\partial CS^{vk}}{\partial hw}\cdot\mathrm{Pr}^v\cdot\mathrm{Pr}^{k/v} + CS^{vk}\cdot\mathrm{Pr}^v\cdot\frac{\partial\mathrm{Pr}^{k/v}}{\partial hw}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial CS}{\partial cp} = \sum_v\sum_k\Psi\cdot\left(\frac{\partial CS^{vk}}{\partial cp}\cdot\mathrm{Pr}^v\cdot\mathrm{Pr}^{k/v} + CS^{vk}\cdot\mathrm{Pr}^v\cdot\frac{\partial\mathrm{Pr}^{k/v}}{\partial cp}\right) = 0. \quad \square$$

▶ **定理2.**

条件0-3の下で，列車間隔や運賃が増加するにつれ，すべての所得層で旅行不効用が単調増加し，家賃は単調減少する.

<proof>

まず列車間隔hwの変化について，式(1)(2)より，

$$\frac{\partial c^k_{\text{rail}}}{\partial hw} = vot^k \cdot \kappa_{cti} > 0. \qquad (62)$$

また式(3)-(5)より，

$$\frac{\partial c^k_{\text{auto}}}{\partial hw} = vot^k \cdot \frac{\partial t_a}{\partial hw} = vot^k \cdot \frac{\partial t_a}{\partial q_{\text{auto}}} \cdot \frac{\partial q_{\text{auto}}}{\partial hw} \qquad (63)$$

ここでq_{quto}は自動車需要であり，以下で与えられる.

$$q_{\text{auto}} = \Psi - q_{\text{rail}} = \Psi - \sum_v \sum_k q^{vk} \cdot \text{Pr}^k_{\text{rail}}. \qquad (64)$$

式(64)を式(63)に代入して，

$$\frac{\partial c^k_{\text{auto}}}{\partial hw} = -vot^k \cdot \frac{\partial t_a}{\partial q_{\text{auto}}} \cdot \sum_v \sum_k \left(\frac{\partial q^{vk}}{\partial hw} \cdot \text{Pr}^k_{\text{rail}} + \frac{\partial \text{Pr}^k_{\text{rail}}}{\partial hw} \cdot q^{vk} \right). \qquad (65)$$

条件2より， $\partial t_a / \partial q_{auto}$ >0, 定理1.より $\partial q^{vk}/\partial hw$ =0であり，式(6)から，鉄道交通コストの増加は鉄道から自動車への受容転換を起こすので，

$$\frac{\partial \text{Pr}^k_{\text{rail}}}{\partial hw} < 0. \qquad (66)$$

したがって，式(65)において$\partial c^k_{auto}/\partial hw$>0であり，式(7),(10),(14)から，

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial hw} = \text{Pr}^k_{\text{rail}} \cdot \frac{\partial c^k_{\text{rail}}}{\partial hw} + \text{Pr}^k_{\text{auto}} \cdot \frac{\partial c^k_{\text{auto}}}{\partial hw} > 0, \qquad (67)$$

$$\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial hw} < 0, \qquad (68)$$

$$\frac{\partial \varphi^v}{\partial hw} = \sum_k \left(\text{Pr}^{k/v} \cdot \frac{\partial WP^{k/v}}{\partial hw} \right) < 0. \qquad (69)$$

運賃cpについても同様にして

$$\frac{\partial \text{Pr}^k_{\text{rail}}}{\partial cp} < 0, \qquad (70)$$

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial cp} > 0, \qquad (71)$$

$$\frac{\partial WP^{k/v}}{\partial cp} < 0, \qquad (72)$$

$$\frac{\partial \varphi^v}{\partial cp} = \sum_k \left(\text{Pr}^{k/v} \cdot \frac{\partial WP^{k/v}}{\partial cp} \right) < 0. \quad \square \qquad (73)$$

▶ **系2.**

条件0-3の下で，生産者余剰が最大となる最適列車間隔が存在する．またマルチモードネットワークにおいて運賃が増加すると生産者余剰は単調減少する．

<proof>

まず式(33)の開発者利益で表される生産者余剰について，列車間隔の変化に対する1次導関数を調べる．

家賃収益 $$\frac{\partial R_H}{\partial hw} = \frac{\partial(\sum_v \varphi^v \cdot \Psi^v)}{\partial hw} = \Psi \cdot \frac{\partial WP^{k'/v}}{\partial hw} < 0, \forall k' \in \{1, 2, \ldots, K\}, \tag{74}$$

運賃収益 $$\frac{\partial R_{\tilde{T}}}{\partial hw} = \sum_v \Psi^v \cdot cp \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \mathrm{Pr}^k_{\mathrm{rail}}}{\partial hw} \cdot \mathrm{Pr}^{k/v} \right) < 0, \tag{75}$$

住宅投資 $$\frac{\partial B_H}{\partial hw} = 0, \tag{76}$$

鉄道投資 $$\frac{\partial B_{\tilde{T}}}{\partial hw} = b_{\tilde{T}O} \cdot \frac{\partial st}{\partial hw} < 0. \tag{77}$$

式(74)-(77)について鉄道運賃収益と鉄道投資費用は列車間隔に対して単調減少．住宅投資費用は列車間隔に対して変化しない．住宅家賃収益は列車間隔に対して単調減少．したがって式(33)より，開発者の生産者余剰を最大にする列車間隔が存在する．

同様にして，運賃に対しても，

$$\frac{\partial R_H}{\partial cp} = -\sum_v \left(\Psi^v \cdot \sum_k \left(\mathrm{Pr}^{k/v} \cdot \mathrm{Pr}^k_{\mathrm{rail}} \right) \right) = -q_{\mathrm{rail}} < 0, \tag{78}$$

$$\frac{\partial R_{\tilde{T}}}{\partial cp} = q_{\mathrm{rail}} + \sum_v \Psi^v \cdot cp \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \mathrm{Pr}^k_{\mathrm{rail}}}{\partial cp} \cdot \mathrm{Pr}^{k/v} \right), \tag{79}$$

$$\frac{\partial B_H}{\partial cp} = \frac{\partial(\sum_v b^v_H \cdot \Psi^v)}{\partial cp} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial B_{\tilde{T}}}{\partial cp} = \frac{\partial(B_{\tilde{T}C} + st \cdot b_{\tilde{T}O})}{\partial cp} = 0. \tag{81}$$

したがって式(70),(78)-(81)より，運賃に対する生産者余剰の1次導関数は

$$\frac{\partial \Pi}{\partial cp} = \frac{\partial R_H}{\partial cp} + \frac{\partial R_{\tilde{T}}}{\partial cp} - \frac{\partial B_H}{\partial cp} - \frac{\partial B_{\tilde{T}}}{\partial cp} = \sum_v \Psi^v \cdot cp \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \mathrm{Pr}^k_{\mathrm{rail}}}{\partial cp} \cdot \mathrm{Pr}^{k/v} \right) < 0. \quad \square \tag{82}$$

- 競合交通機関がある場合，運賃が増加すると生産者余剰は単調減少する．

  ||

- 開発者は生産者余剰を維持するために鉄道運賃を低く設定する．

おまけ

－相補性問題・変分不等式問題と均衡制約付き数理計画問題－

相補性問題と変分不等式問題

- 相補性問題(CP: Complementarity Problem)
- 変分不等式問題(VIP: Variational Inequality Problem)

：複雑な関数が用いられる問題を解くために，，凸計画問題を一般化したもの．
交通・経済分野における**均衡問題**はこれらの問題として定式化できる．

土木学会（1998）『交通ネットワークの均衡分析』第5章を参照

相補性問題の定義

相補性問題(CP: Complementarity Problem)
連続変数$x = (x_1, \dots, x_n)$と同じ次元を持つベクトル値関数$F(x) = \big(F_1(x), \dots, F_n(x)\big)$に対して次式を満たす$x$を求める問題.

$$x_i \geq 0, \quad F_i \geq 0, \quad x_i F_i(x) = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

この問題においてすべてのiについて$x_i \geq 0$かつ$F_i(x) \geq 0$となる点xの集合を**実行可能集合**と呼ぶ．またすべてのiについて，$x_i = 0$または$F_i(x) = 0$が成り立つことを**相補条件**と呼ぶ.
つまり**相補性問題は実行可能集合の中から相補条件が成り立つ点を求める問題**と考えることができる.
線形相補性問題(Linear C.P.):$F(x) = Mx + q$とあらわされるもの.
非線形相補性問題(Nonlinear C.P.):それ以外の問題.

2次計画問題のKarush-Kuhn-Tucker条件は線形相補性問題として，非線形計画問題のKKT条件は非線形相補性問題としてあらわされる．ただし，一般の線形相補性問題がNP完全問題であることから，解の計算は容易ではない.

利用者均衡配分の相補性問題への拡張

利用者均衡条件(UE)

$$\begin{cases} f_k^{rs}\cdot(c_k^{rs}(\boldsymbol{f})-u_{rs})=0 \\ c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0, f_k^{rs}\geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs}$$

相補性形式に変換

背理法で証明

$$\begin{cases} u_{rs}\cdot\left(\sum_k f_k^{rs}-q_{rs}\right)=0 \\ \sum_k f_k^{rs}-q_{rs}\geq 0, u_{rs}\geq 0 \end{cases}$$

r：始点
s：終点
k：各ODに対するパス
q_{rs}：各ODに対するフロー
c_k^{rs}：ODペア(r,s)のパスkの旅行時間
f_k^{rs}： ODペア(r,s)のパスkのフロー

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}$$

E:経路・ODペア接続行列

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E}^T\\ \boldsymbol{E}^T & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})\\ -\boldsymbol{q}\end{bmatrix}$$

利用者均衡条件は非線形相補性問題と等価

【UE/FD-NCP】

$$\text{Find } x=(f,u)\in R_+^{\mathrm{K}}\times R_+^{\mathrm{M}}$$
$$s.t\quad x\cdot F(x)=0, x\geq 0\ \ F(x)\geq 0$$

非線形の連立等式・不等式系を一本の式で扱える．
（ex. 均衡配分モデル，一般均衡モデル(CGE)）

変分不等式問題(1)

変分不等式問題の定義

変分不等式問題(VIP: Variational Inequality Problem)

与えられた閉凸集合$S \subseteq \mathbb{R}^n$に対して次の不等式を満たす点$x \in S$を求める問題.

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in S$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$：ベクトルの内積

特に$S = \mathbb{R}_+^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \dots, n)\}$で与えられた変分不等式問題は相補性問題に帰着できる（相補性問題の上位クラス）.

利用者均衡配分の変分不等式問題への拡張

利用者均衡条件は変分不等式問題と等価

【UE/FD-VIP】

$$\text{Find } x* = (f*, u*) \in \Omega \equiv R_+^K \times R_+^M$$
$$s.t \quad \mathrm{F}(\mathrm{x}*) \cdot (x - \mathrm{x}*) \geq 0 \ , \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{rs}\sum_{k}(C_k^{rs}(f*) - u*_{rs}) \cdot (\mathrm{f}_k^{rs} - \mathrm{f}_k^{rs*}) + \sum_{rs}(\sum_{k}(\mathrm{f}_k^{rs} - q_{rs}) \cdot (u_{rs} - u_{rs}^*) \geq 0$$
$$\forall (f, u) \in R_+^K \times R_+^M$$

VIPはNCPを包含する一般的枠組みであり，ベクトル場**F**が凸集合Ωに直交している点ｘを求める問題である．

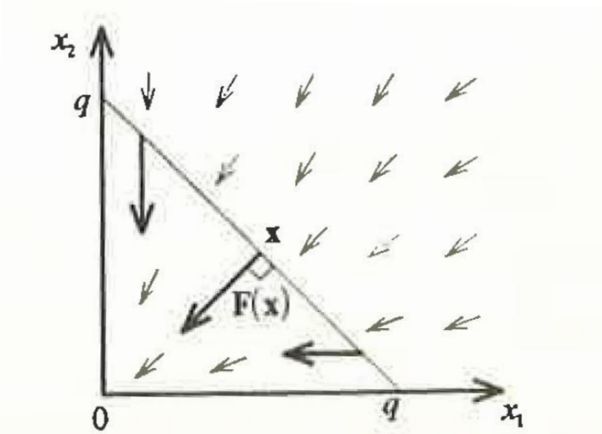


図-5.8a ベクトル場の直交

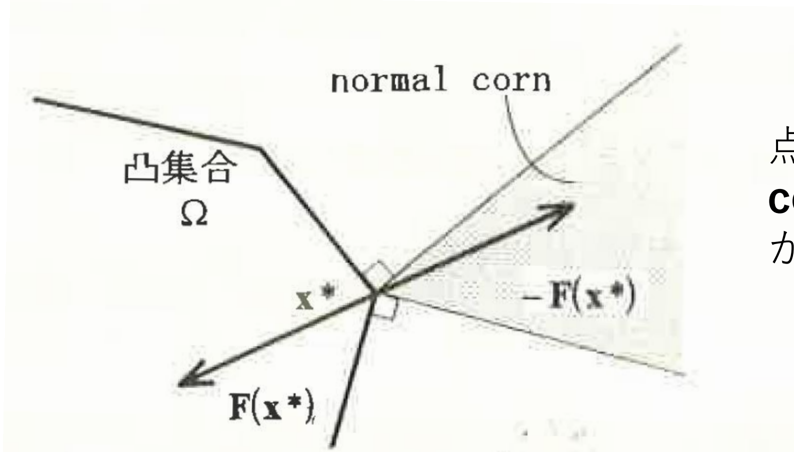


図-5.8b 変分不等式問題と normal cone

点ｘでのΩの**normal corn** にベクトル-F(x)が含まれる．

定義

均衡制約付き数理計画問題(MPEC: Mathematical Program with Equilibrium Constraints)
:相補性問題や変分不等式問題を制約条件に含む数理計画問題.
通常，一般の非線形計画問題に関するアルゴリズムで解が得られる保証がない困難な問題（NP困難）．2段階数理計画問題など.

◆ **2段階問題**

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_1(x,y) & \\
\text{subject to} & (x,y) \in X & \\
& \text{minimize} & f_2(x,y) \\
& \text{subject to} & g_i(x,y) \le 0, \quad (i = 1, \cdots, m) \\
& & h_j(x,y) = 0, \quad (j = 1, \cdots, n)
\end{array}
$$

下位レベルの問題をKKT条件で置き換える.

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_1(x,y) \\
\text{subject to} & (x,y) \in X \\
& \nabla f_2(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x,y) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nabla h_j(x,y) = 0 \\
& \mu_i \ge 0, \quad g_i(x,y) \le 0, \quad \mu_i g_i(x,y) = 0, \quad (i = 1, \cdots, m) \\
& h_j(x,y) = 0, \quad (j = 1, \cdots, n)
\end{array}
$$

相補性問題

目的関数f_1が凸で，不等式制約gと等式制約hが線形関数で与えられているときには**分枝限定法**により解くことができる（らしい）.

http://www-optima.amp.i.kyoto-u.ac.jp/papers/bachelor/2001_bachelor_yoshida.pdf