

A link based network route choice model with unrestricted choice set

Fosgerau, M., Frejinger, E., & Karlstrom, A. (2013)

理論談話会 #4

5月10日

M1 石井 健太

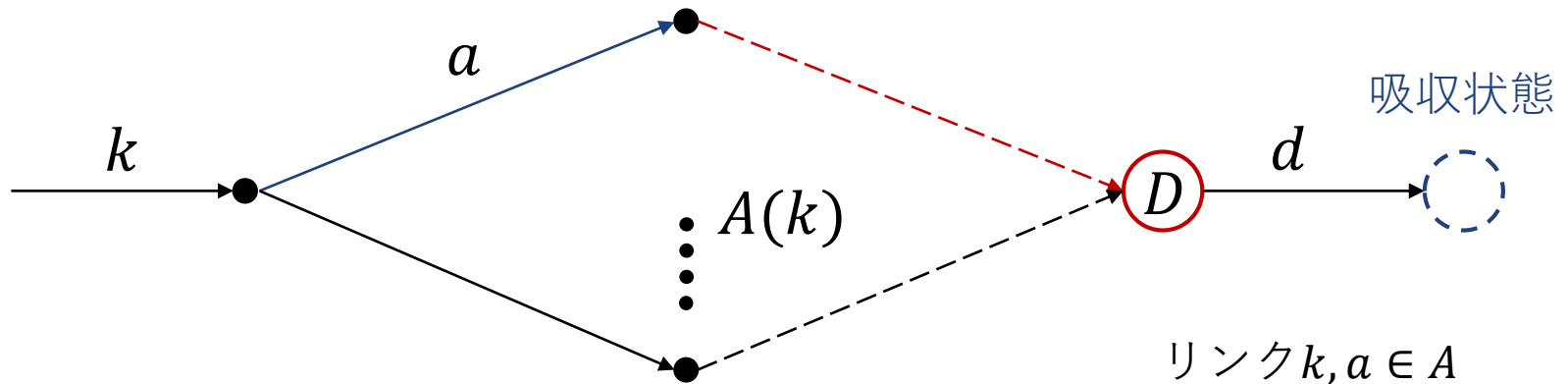
経路選択モデル

	経路ベース	リンクベース
特徴	目的地までの経路を予め列挙し、事前に選択する	各状態において逐次的に次のリンクを選択する
長所	<ul style="list-style-type: none">原理と計算過程が明快	<ul style="list-style-type: none">経路列挙のコストがない
短所	<ul style="list-style-type: none">選択肢集合が膨大逐次的意思決定を考慮できない (e.g. 回遊行動)	<ul style="list-style-type: none">説明変数にリンクに紐づかない項が入れにくい (e.g. 料金)
モデルの例	MNL, NL	マルコフ連鎖モデル Recursive Logit Model

本研究ではこれを扱う

単純化のため、静的ネットワークを考える

グラフ $G = (A, v)$ A :リンク集合, v :ノード集合



$A(k)$:リンク k の終点を始点とするリンク集合

仮定

意思決定者は

現在の状態 k から次の状態 a を選択する際に得られる効用
と

選択した状態 a から目的の状態 d までの期待効用
の和を最大化するように状態を選択する

意思決定者 n が

状態 k から次の状態 a を選択する際に考慮する効用

$$v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a) + V_n^d(a)$$

$v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$: 現在の状態 k から次の状態 a を選択する際に得られる効用

$\varepsilon_n(a)$: 平均0のGumbel分布に従う誤差項

μ : スケールパラメータ

$V_n^d(a)$: 選択した状態 a から目的の状態 d までの期待効用

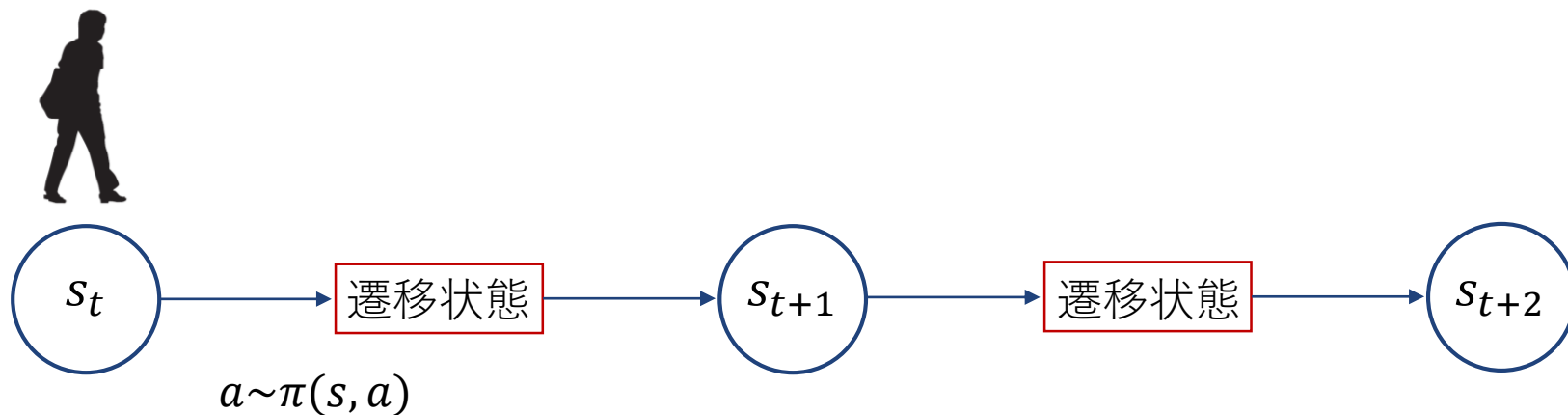
価値関数はBellman方程式を用いて以下のように表せる

$$V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} (v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a) + V_n^d(a)) \right] \quad \forall k \in A \quad (1)$$

今回、状態価値関数についてのみ考える

状態価値関数 $V^\pi(s)$: 状態 s にいることの価値を評価する
特定の方策に関して定義される

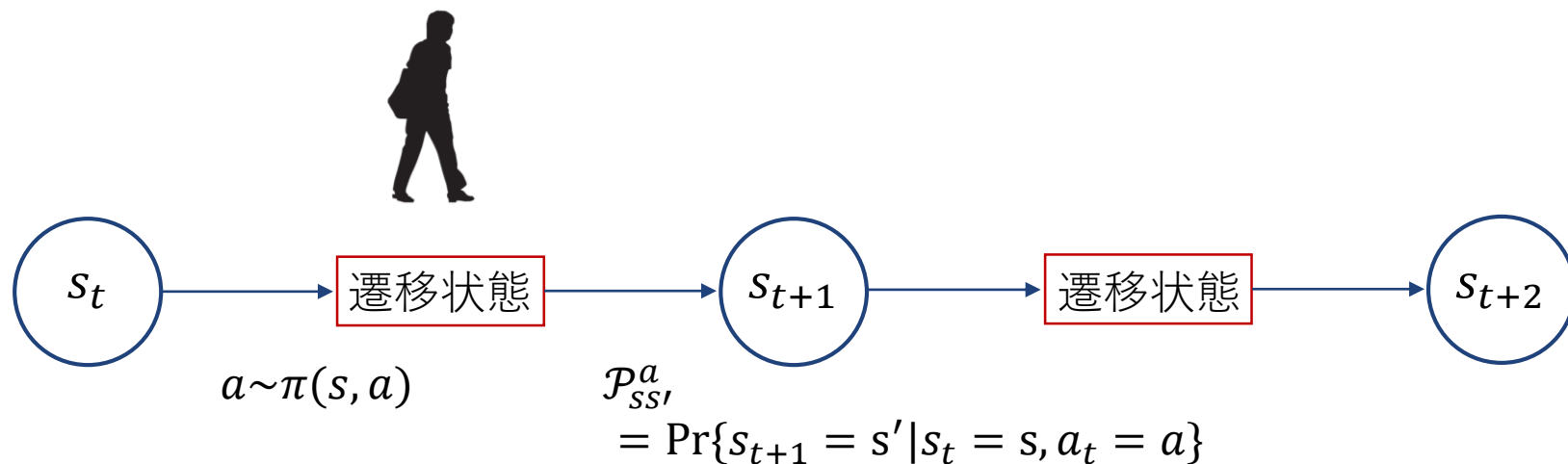
方策 $\pi(s, a)$: どのようなポリシーで行動するか.
(=ある状態 s の時に行動 a を取る確率)



今回、状態価値関数についてのみ考える

状態価値関数 $V^\pi(s)$: 状態 s にいることの価値を評価する
特定の方策に関して定義される

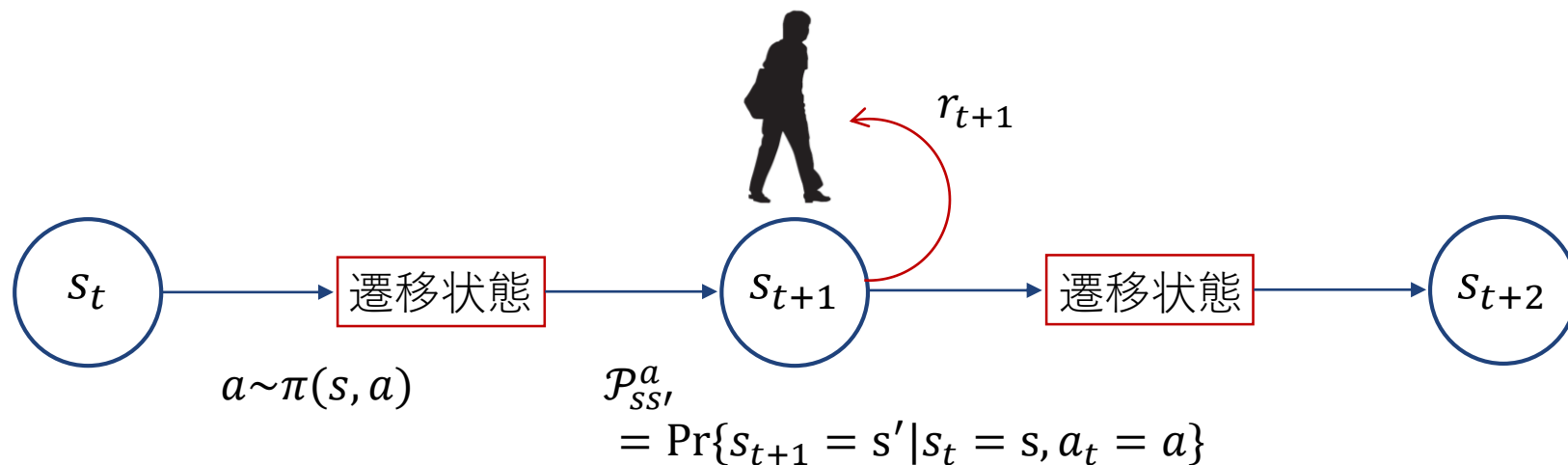
方策 $\pi(s, a)$: どのようなポリシーで行動するか.
(=ある状態 s の時に行動 a を取る確率)



今回、状態価値関数についてのみ考える

状態価値関数 $V^\pi(s)$: 状態 s にいることの価値を評価する
特定の方策に関して定義される

方策 $\pi(s, a)$: どのようなポリシーで行動するか.
(=ある状態 s の時に行動 a を取る確率)



$$V^\pi(s) = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} | s_t = s \right\}$$

$$= E_\pi \left\{ r_{t+1} + \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} | s_t = s \right\}$$

起こした行動 a に対して想定される状態は $\mathcal{P}_{SS'}^a$ に従って複数想定される

$$= \sum_a \pi(s, a) \sum_{s'} \mathcal{P}_{SS'}^a \left[\mathcal{R}_{SS'}^a + \gamma E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+2} | s_{t+1} = s' \right\} \right]$$

再帰的

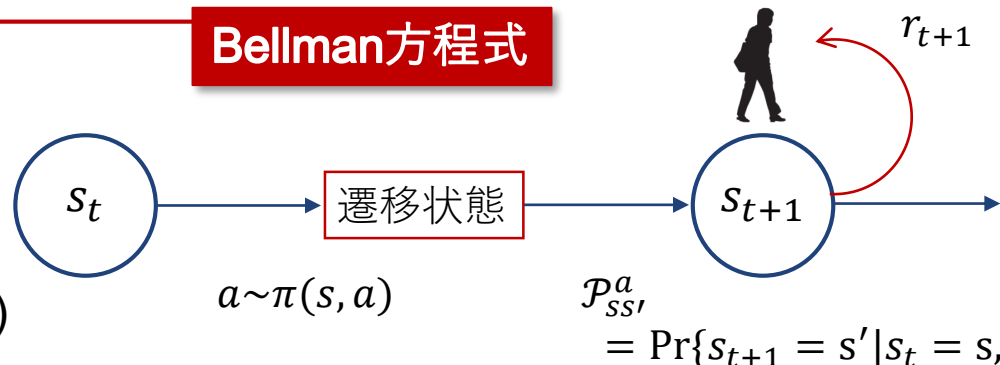
$$= \sum_a \pi(s, a) \sum_{s'} \mathcal{P}_{SS'}^a [\mathcal{R}_{SS'}^a + \gamma V^\pi(s')] \quad (2)$$

Bellman方程式

γ : 時間割引率 ($0 < \gamma \leq 1$)

$\mathcal{R}_{SS'}^a$: 報酬の期待値

($= E\{r_{t+1} | s_t = s, a_t = a, s_{t+1} = s'\}$)



状態価値関数

$$V^\pi(s) = \sum_a \pi(s, a) \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^a [\mathcal{R}_{ss'}^a + \gamma V^\pi(s')] \quad (2)$$

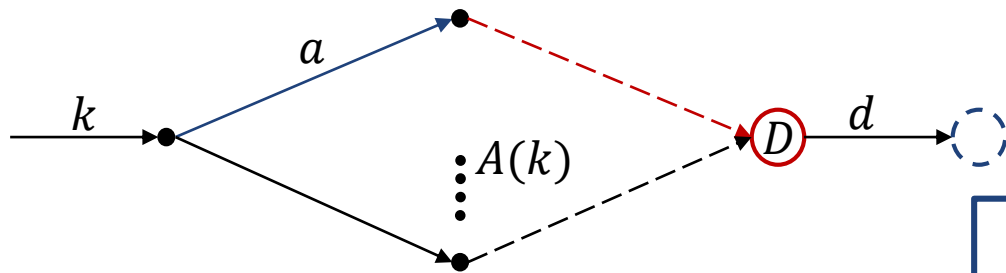
仮定

- 意思決定者は効用 (期待報酬の和) を最大化するように行動する (方策：効用を最大化する行動の確率を1とする)

RLモデルの価値関数

$$V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} (v_n(a|k) + \mu \varepsilon_n(a) + V_n^d(a)) \right] \quad \forall k \in A \quad (1)$$

- Recursive Logit Model



リンク選択肢 a の効用の確定項
 $v_n(a|k) + V_n^d(a)$

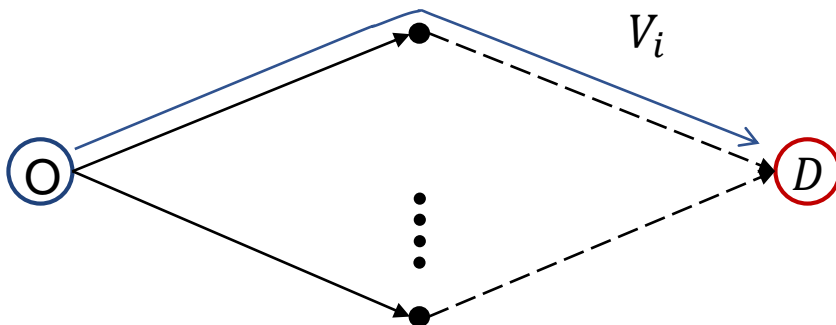
リンク選択肢 i の選択確率 $P_n^d(a|k)$

$$P_n^d(a|k) = \frac{e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V_n^d(a))}}{\sum_{a' \in A(k)} e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a'|k) + V_n^d(a'))}}$$

(3)

- MNL

ロジット型で表せる



経路選択肢 i の効用の確定項 V_i

経路選択肢 i の選択確率 P_i

$$P_i = \frac{\exp(V_i)}{\sum_j \exp(V_j)}$$

価値関数を求める = Bellman方程式を解く

$$V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} (v_n(a|k) + \mu \varepsilon_n(a) + V_n^d(a)) \right] \quad \forall k \in A \quad (1)$$

価値関数を変形

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases} \quad (4)$$

$$e^{\frac{1}{\mu} V_n^d(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

where

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & , a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

式(4)は行列を用いて表現できる

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{\mu}v_n^d(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A(k)} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + v_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

where

- \mathbf{z} ($|\tilde{A}| \times 1$)

$$z_k = e^{\frac{1}{\mu}v(k)}$$

- \mathbf{b} ($|\tilde{A}| \times 1$)

$$b_k = \begin{cases} 1 & k \neq d \\ 0 & k = d \end{cases}$$

- \mathbf{M} ($|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|$)

$$M_{ka} = \begin{cases} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}v(a|k)}, & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v(a|k)}, & a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b}$ を書き下すと

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\mu}V(1)} \\ \vdots \\ e^{\frac{1}{\mu}V(k)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & & \\ & & & & & \\ \vdots & & & e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & & \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\mu}V(1)} \\ \vdots \\ e^{\frac{1}{\mu}V(k)} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{z} を求める.

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

価値関数が解を持つためには

$(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ が逆行列を持つ必要がある

経路 $\sigma = \{k_i\}_{i=1}^I$ の選択確率を考える

k_1 : 出発地, k_I : 目的地 d

$$\begin{aligned}
 P(\sigma) &= \prod_{i=0}^{I-1} P(k_{i+1}|k_i) \\
 &= \prod_{i=0}^{I-1} \frac{e^{\frac{1}{\mu}(v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}))}}{\sum_{a \in A(k_i)} e^{\frac{1}{\mu}(v(a|k_i) + V(a))}} \\
 &= \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}(v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}) - V(k_i))} \\
 &= e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)} \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{e^{\frac{1}{\mu}V(k_0)}}
 \end{aligned}$$

ガンベル分布の性質を用いると (MNLの導出と同じ)

$$U^* = \max_{a \in A(k_i)} (v_n(a|k_i) + \mu \varepsilon_n(a) + V_n^d(a))$$

$$U^* = V^* + \varepsilon^*$$

$$V(k_i) = V^* = \ln \left[\sum_{a \in A(k_i)} e^{v_n(a|k_i) + V_n^d(a)} \right]$$

$$\therefore P(\sigma) = \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{\sum_{\sigma' \in \Omega} e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma')}} \quad (7)$$

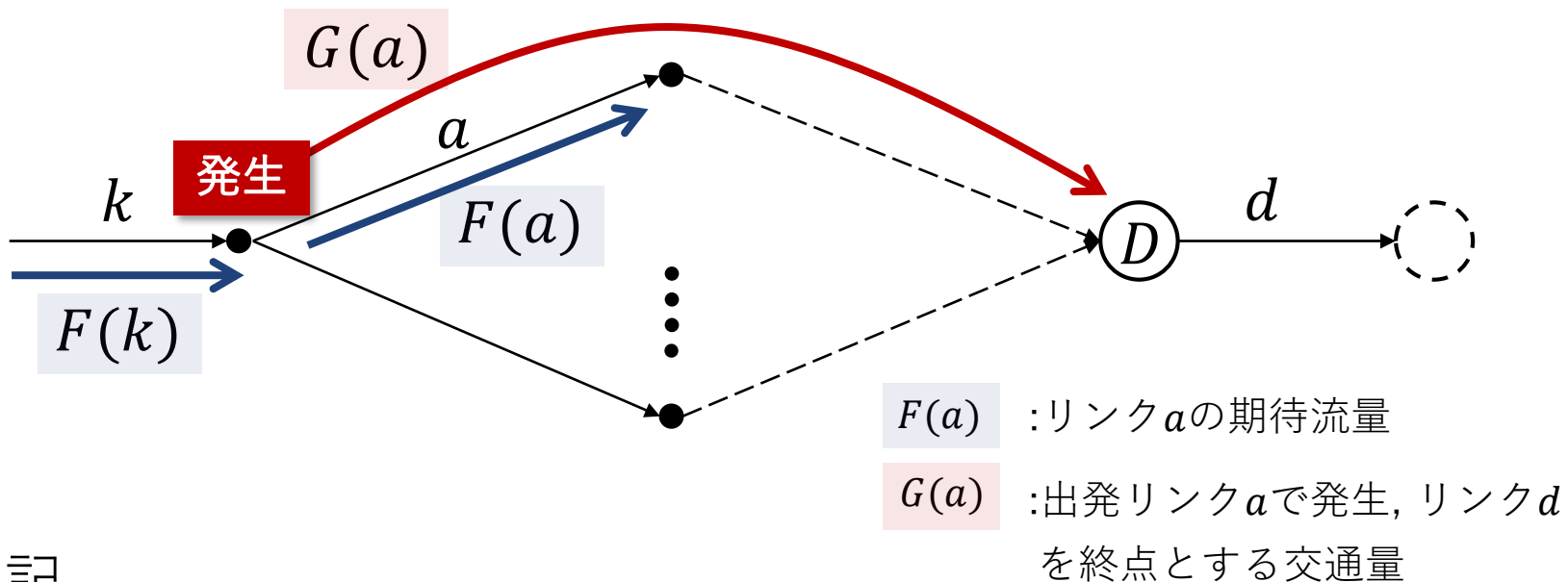
同一のODを持つ2つの経路 σ_1, σ_2 の選択確率比は $v(\sigma_1) - v(\sigma_2)$ のみに依存

$v(\sigma) = \sum_{i=1}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i)$, Ω : すべての経路集合

IIA特性

リンク a の交通量 $F(a)$ を考える

$$F(a) = G(a) + \sum_{k \in A} P(a|k) F(k) \quad (8)$$



行列表記

$$F = G + P^T F \Leftrightarrow (I - P^T) F = G \quad (9)$$

経路ベースのモデルにおけるリンク重複の考慮



通常のリジット型配分

下の2つの経路の相関が考慮されず
平等に配分されてしまう

経路の重複による魅力低下を考慮

$$U_{ni} = V_{ni} + \frac{1}{\mu} \ln PS_{ni} + \varepsilon_{ni}$$

$$PS_{ni} = \sum_{a \in \Gamma_i} \frac{l_a}{L_i} \frac{1}{\sum_{j \in C_n} \delta_{aj}}$$

Path-Size 修正項
(重複により魅力減少)

Γ_i	経路 i の全てのリンク集合
l_a	リンク a のリンク長
L_i	経路 i の経路長
$\sum_{j \in C_n} \delta_{aj}$	選択肢集合 C_n 内で いくつかの経路がリンク a を利用しているか

RLモデルは経路非列挙であるため、
この考え方は適用できない

経路選択肢の重複数ではなく、**期待リンク交通量**を用いる

$$LS^{od} = F^{od}(\tilde{\beta}) \quad (10)$$

where

LS_k^{od} : od におけるリンク k のLink Size

$\tilde{\beta}$: 説明変数のパラメータ

$F^{od}(\tilde{\beta})$ は以下で与えられる

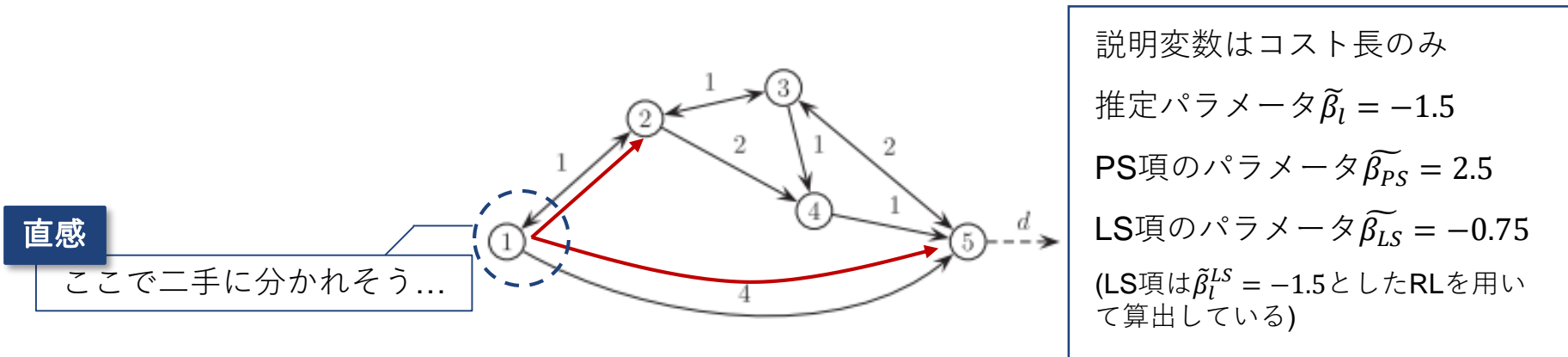
$$(I - P^d(\tilde{\beta})^T)F^{od}(\tilde{\beta}) = G^0 \quad (11)$$

$$G^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \text{originのみ1の発生交通量}$$

$$F = G + P^T F \Leftrightarrow (I - P^T)F = G \quad (9)$$

において $G \rightarrow G^0$ とした時の解

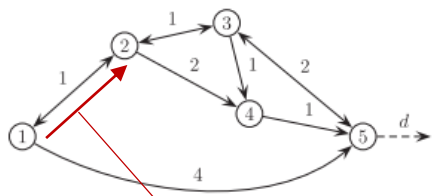
MNL, PL, PSL, RL with LSの4つで経路選択確率を算出



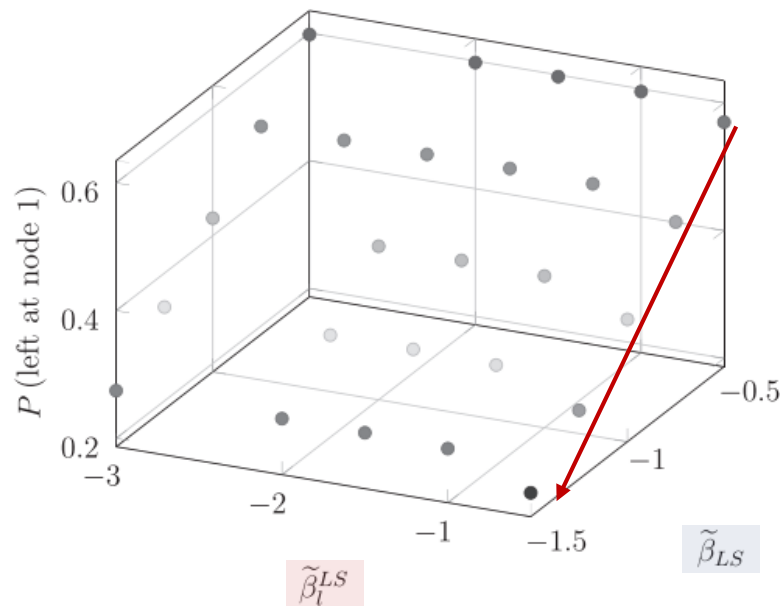
各モデルにおける各経路(node1 発, node5 着)の選択確率

Paths	Logit	RL	PSL	RL with LS
1: 12, 23, 35	0.25	0.2495	0.20	0.19
2: 12, 23, 34, 45	0.25	0.2502	0.12	0.13
3: 12, 24, 45	0.25	0.2495	0.20	0.19
4: 15	0.25	0.2495	0.48	0.48

- RLの推定結果がロジットと少し異なるのはループを微小確率許しているから
- PSL, RL with LSはそれぞれ重複の考慮により同等の改善が見られる
- RL with LSは経路列挙が不要という点に優位性がある



こちらに向かう確率=



リンク長パラメータ

LS項パラメータ

$$LS^{od} = F^{od}(\tilde{\beta})$$

$|\tilde{\beta}_l^{LS}|$ が大きくなると、相関が大きい経路の選択確率は小さくなる

- Rust'sのNFXP法に似たアプローチを用いて価値関数を計算
- 各反復においてBFGS法で最適化計算を解く
- 無限ループは存在しないというような、当たり障りのない（現実と整合性が取れる）仮定を置くことで式(6)を計算できるようにする
- より正確性を高めるために、標準偏差の計算においてanalytical gradientを用いる

対数尤度関数

$$LL(\beta) = \ln \prod_{n=1}^N P(\sigma_n) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{I_n-1} v(k_{i+1}|k_i) - V(k_0)$$

よって β_q に関するanalytical derivativeは

$$\frac{\partial LL(\beta)}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=0}^{I_n-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right]$$

$$P(\sigma) = \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}(v(k_{i+1}|k_i)+V(k_{i+1})-V(k_i))} \quad (7)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{Mz} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\frac{\partial LL(\beta)}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=0}^{I_n-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right]$$

ここで式(6)を β_q で偏微分

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta_q} \right] \mathbf{z}$$

以上より

$$\frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} = \mu \frac{1}{z_0} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} \right)_0 \quad \because z_k = e^{\frac{1}{\mu} V(k)}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} = \mathbf{z} \circ \frac{\partial V}{\partial \beta}$$

$$P(\sigma) = \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu} (v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}) - V(k_i))} \quad (7)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (6)$$

スウェーデンのBorlängeの実ネットワークを使用
(ノード数：3077, リンク数：7459)

価値関数

$$V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} (v_n(a|k) + \mu \varepsilon_n(a) + V_n^d(a)) \right] \quad \forall k \in A \quad (1)$$

効用 $v_n(a|k)$ を以下のように設定する

$$v_n(a|k) = \beta_{TT} TT_a + \beta_{LT} LT_{a|k} + \beta_{LC} LC_a + \beta_{UT} UT_{a|k}$$

TT_a : リンク a における旅行時間
 $LT_{a|k}$: 左折ダミー (左に 40° 以上であれば1, それ以外で0)
 LC_a : 交差点が多いリンクで1, それ以外で0
 $UT_{a|k}$: Uターンダミー (177° 以上方向転換するとき1)

パラメータの初期値

$$\beta_{TT} = -2, \beta_{LT} = -1, \beta_{LC} = -1, \beta_{UT} = -20$$

Uターンを防ぐため β_{UT} のみ固定

シミュレーションデータの概要

- 10組のODに対して、それぞれ500個の経路観測データを生成
- 各ODについて、平均39 (max 44, min 35) 個の経路が存在
- 経路の旅行時間は、平均9 (max 12.3, min 8.9) 分
- 総計5000個の経路データのうち、35経路 (全体の0.7%) がループを含む

パラメータ推定結果

Sample	$\hat{\beta}_{IT}$	Std. err.	$\hat{\beta}_{LT}$	Std. err.	$\hat{\beta}_{LC}$	Std. err.
1	-1.91	0.21	-1.02	0.09	-1.07	0.06
2	-1.97	0.22	-0.99	0.09	-1.04	0.06
3	-1.80	0.21	-1.09	0.09	-1.07	0.06
4	-2.38	0.26	-0.88	0.09	-1.01	0.06
5	-2.20	0.24	-0.96	0.08	-0.93	0.05
6	-2.30	0.26	-0.96	0.09	-0.96	0.06
7	-1.69	0.18	-1.00	0.08	-1.11	0.06
8	-1.84	0.20	-1.04	0.08	-1.04	0.05
9	-2.40	0.29	-1.05	0.09	-0.89	0.06
10	-1.88	0.20	-0.99	0.08	-0.976	0.05
Average	-2.04	0.23	-1.00	0.09	-1.01	0.06
Std. err.	0.26		0.06		0.07	

$\hat{\beta}_{UT}$ is fixed to -20.

モデルの再現性を確認

GPSデータの概要

- 2年間、200台の車から得られたGPSデータのうち、データの取得頻度が高い24台のデータを用いる
- 最低5つのリンクをもつ1832トリップデータを用いて推定
- 466の目的地と、37000以上のリンク選択を確認

パラメータ推定結果

	RL	RL with LS
$\hat{\beta}_{TT}$	-2.45	-3.20
Std. err.	0.06	0.06
t-test	-40.83	-52.59
$\hat{\beta}_{LT}$	-1.01	-1.11
Std. err.	0.03	0.03
t-test	-33.67	-31.90
$\hat{\beta}_{LC}$	-0.40	-0.32
Std. err.	0.01	0.01
t-test	-40.00	-21.98
$\hat{\beta}_{LS}$		-0.23
Std. err.		0.02
t-test		-13.20
$LL(\hat{\beta})$	7481.5	7213.2

LS項によるモデルの改善が確認された

$\hat{\beta}_{UT}$ is fixed to -20.

- 選択肢集合に制約をかけないリンクベースの経路選択モデルの提案
- リンクベースの動的計画法の枠組みから出発し，各経路の選択確率がMNL型で記述できることを示した
- **Link Size**の導入により，経路ごとの相関をリンクベースのモデルにおいても考慮可能にした