A general and operational representation of Generalized Extreme Value models

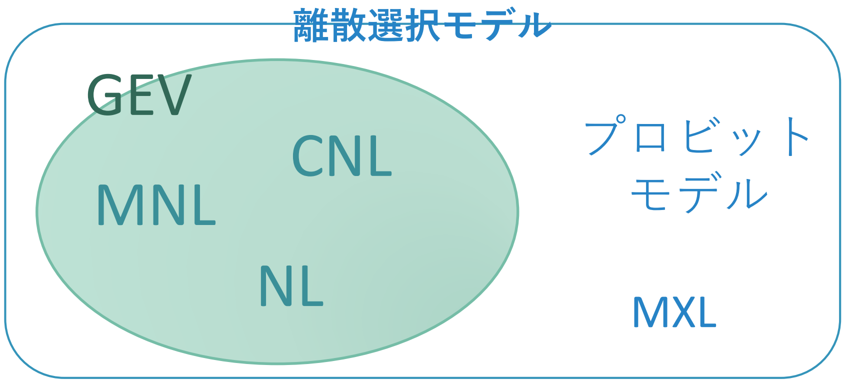
Daly, A., Bierlaire, M., 2006.

Transportation Research Part B, 40(4), 285-305.

2019/06/07 理論談話会 B4 髙谷和弘

はじめに

- GEV(Generalized Extreme Value, 一般化極値)モデル
  - ✓McFadden(1978)が初出
  - ✓様々な離散選択モデルがすべてGEVモデルとして一般化して定義
  - ✓ランダム効用理論と矛盾しない



(補足)

- 離散選択モデル
  - ランダム効用理論に基づき、「最も効用の高い選択肢を1つだけ選ぶ」として離散的な選択を表現したモデル。プロビットモデル、ロジットモデルなど。
- ランダム効用理論
  - 選択肢の持つ効用は確率的に変動すると考える理論。効用を観測可能な変数により説明可能な「確定項」と、観測不可能な個人の選好等に依存する「誤差項(確率項)」の和として表す。

$$U_j = V_j + \varepsilon_j$$

GEVモデルの特徴

長所

- ✓Closed-formのため、計算が単純
- ✓GEV関数(: 個人が享受する全効用を反映した関数)の扱いが平易、理論的に観測可能
- ✓交通行動分析との親和性
- ✓モデルの混合がしやすい

短所

- ✓GEV関数の仮定が複雑

→GEVモデルの例がわずかしか提示されていない

- ✓個別の事例に対しGEVモデルを新たに構築する手法が確立されていない

過去の成果

- ✓Daly(2001)：RNEVモデルによるCNLモデルの多重ネストへの一般化
- ✓Bierlaire(2002)：NLモデルにおけるツリーをネットワーク表現として拡張・一般化したnetwork-GEVモデル
- ✓McFadden(1978, 1981)：GEVモデルにおけるcross-nestingについて示唆
- ✓Daly & Zachary(1978)：multi-levelのツリー構造

本論文の構成

もくじ

1. Introduction
2. The GEV model
3. GEV-inheritance
4. GEV network
5. Demand responses and elasticities
6. Specific instances
7. Estimation
8. Conclusions and future research

本論文における目標

- 直観的にGEVモデルを生成する手法の確立
  - ✓GEV-inheritance(継承)：既存のGEVモデルから新規のGEVモデルを生成
  - ✓GEVネットワーク：選択肢間の複雑な相関構造の表現
  - →ネットワークに基づき帰納的かつシンプルに定式化
- GEVモデル体系の一般化とその厳密な証明
  - ✓過去の研究ではされていない
  - ✓今後追加で証明する必要がなくなる

GEVモデルの立式　(McFadden, 1978も参照)

- 選択肢集合Cから選択肢iを選ぶ確率;

$$P(i|C) = \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_J)}{\mu G(y_1, \ldots, y_J)}$$

J : 選択肢の数,　$y_i = \exp V_i$: 選択肢iの効用確定項,
$G(y_1, \ldots, y_J)$: μ-GEV関数

- 期待最大効用

$$\overline{U} = \frac{\log G(y) + \gamma}{\mu}$$

γ : Euler定数 (実際の計算上は省略されることも)

- 選択確率と期待最大効用の関係式

$$P(i|C) = \frac{\partial \overline{U}}{\partial V_i}$$

GEVモデルの立式 (McFadden, 1978も参照)

- GEV関数Gは以下の4つの性質を満たす

1. $G(y) \geq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}_+$
2. Gはμ次同次、すなわち $G(\lambda y) = \lambda^\mu G(y), \ \forall \lambda > 0$
3. 各選択肢 $i = 1, \ldots, J$ に対し
$$\lim_{y_i \to +\infty} G(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_J) = +\infty$$
4. (GEV-differentiable) 異なるyによるk階偏微分が

k: 奇数⇒非負, k: 偶数⇒非正

すなわち

$$i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{J} = \{1, \ldots, J\} \text{ に対し}$$
$$(-1)^k D_\mathcal{K}(y) \leq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}_+$$

ここで
$$\mathcal{K} = i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{J}, \ D_\mathcal{K}(y) = \frac{\partial^k G}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_k}}(y)$$

↑条件1,2,3に比べて成立の確認が難しい…

(補足)GEVモデルの例

- MNL(Multinomial logit)の場合

$$G(y) = \sum_{i \in C} y_i = \sum_{i \in C} \exp V_i$$

1. $\exp V_i > 0$ より $G(y) > 0$
2. $G(\lambda y) = \sum \lambda y_i = \lambda \sum y_i = \lambda G(y)$
3. $y_i \to \infty$ のとき $G(y) \to \infty$
4. $\dfrac{\partial G}{\partial y_i} = 1 > 0$, 2階以上の偏微分はすべて0

⇒$G(y)$はGEV関数で、選択肢iの選択確率は

$$P(i|C) = \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}}{G} = \frac{\exp V_i}{\sum_{j \in C} \exp V_j}$$

GEV-inheritance

GEV関数の線形結合はGEV関数

- 既存のGEVモデルから新しいGEVモデルを生成することが可能であることを証明する
- ＝新しく定義した関数GがGEV関数であることを示す

定理1. $\mathbb{R}^{J_i}:\mathbb{R}^J$の部分空間, $[y]_i : \forall y \in \mathbb{R}^J$の$\mathbb{R}^{J_i}$への射影,
$G^i : \mathbb{R}^{J_i} \to \mathbb{R} : \mu$-GEV関数 $(i = 1, \ldots, p)$
のとき、 $\alpha_i > 0 \ (i = 1, \ldots, p)$ ならば

$$G : \mathbb{R}^J_+ \to \mathbb{R} : y \mapsto G(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G^i([y]_i)$$

も μ-GEV関数である。

系2. Gに対する期待最大効用は $\overline{U} = \dfrac{\log \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \exp(\mu \overline{U}_i)}{\mu}$

系3. Gに対する選択肢kの選択確率式は

$$P(k) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i \exp(\mu \overline{U}_i)}{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \exp(\mu \overline{U}_j)} P_i(k)$$

GEV-inheritance

GEV関数のべき乗はGEV関数

定理4. $G:\mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}:\ \mu$-GEV関数, $0<\beta\leq 1$

$$\Rightarrow G^\beta:\ (\mu\beta)\text{-GEV関数}$$

系5. G^βに対する期待最大効用は $\overline{U}^* = \overline{U} + \dfrac{\gamma}{\mu}\left(\dfrac{1}{\beta}-1\right)$

系6. G^βに対する選択肢kの選択確率は、Gに対する場合と不変。

定理4の証明：G^β がGEV関数の4つの性質を満たすことを確認する。

1. $G\geq 0$ より自明に $G^\beta\geq 0$
2. $\lambda>0$ に対し $G(\lambda y)=\lambda^\mu G(y)$ より
$$G(\lambda y)^\beta = \lambda^\mu G(y)^\beta = \lambda^{\mu\beta}G(y)^\beta$$
3. $\beta>0$ より自明。
4. 帰納法で示す。順次微分し符号を確かめる。複雑なので割愛。

- GEV関数Gは以下の4つの性質を満たす
  1. $G(y)\geq 0,\ \forall y\in\mathbb{R}_+$
  2. Gはμ次同次、すなわち $G(\lambda y)=\lambda^\mu G(y),\ \forall\lambda>0$
  3. 各選択肢i=1, …, Jに対し
  $$\lim_{y_i\to+\infty} G(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_J)=+\infty$$
  4. (GEV-differentiable) 異なるyによるk回偏微分が
  k: 奇数⇒非負, k: 偶数⇒非正

  すなわち
  $i_1,\ldots,i_k\in\mathcal{J}=\{1,\ldots,J\}$ に対し
  $$(-1)^k D_\mathcal{K}(y)\leq 0,\ \forall y\in\mathbb{R}_+$$
  ここで $\mathcal{K}=i_1,\ldots,i_k\in\mathcal{J},\ D_\mathcal{K}(y)=\dfrac{\partial^k G}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}}(y)$

GEV-inheritance

GEV関数のべき乗の線形結合はGEV関数

- 定理1,4を組み合わせると、次が得られる;

定理7. (GEV-inheritance)

$\mathbb{R}^{J_i}$: $\mathbb{R}^J$の部分空間, $[y]_i : \forall \in \mathbb{R}^J$の$\mathbb{R}^{J_i}$への射影,

$G^i : \mathbb{R}_+^{J_i} \to \mathbb{R} : \mu_i$-GEV関数 $(i = 1, \ldots, p)$

のとき、 $\alpha_i > 0,\ 0 < \mu \leq \mu_i\ (i = 1, \ldots, p)$ のもとで

$$G : \mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R} : y \mapsto G(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left\{ G^i([y]_i) \right\}^{\mu/\mu_i}$$

は μ-GEV関数である。

系8. Gに対する期待最大効用は

$$\overline{U} = \frac{\gamma + \log \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \exp\left[\mu(\overline{U}_i - \frac{\gamma}{\mu_i})\right]}{\mu}$$

系9. Gに対する選択肢kの選択確率は

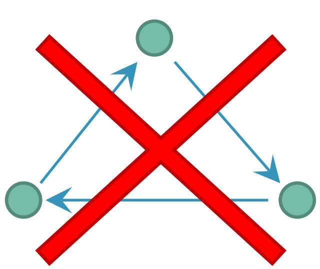
$$P(k) = \sum_{i=1}^{p} \Omega_i P_i(k), \quad \Omega_i = \frac{\alpha_i \exp\left[\mu(\overline{U}_i - \frac{\gamma}{\mu_i})\right]}{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \exp\left[\mu(\overline{U}_j - \frac{\gamma}{\mu_j})\right]}$$

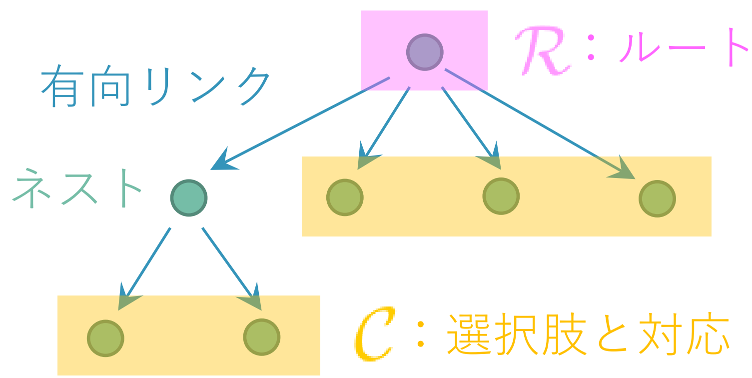
GEVネットワーク

- 選択肢どうしの結びつき（＝効用の相関）をネットワーク構造で表現する

(N, E) ：有向グラフ
N ：ノードの集合
E ：エッジの集合
$\alpha_{ij}\,(>0)$ ：エッジ(i, j)に対応するパラメータ
$\mathcal{R}$ ：先頭のノード(=root)の集合
$\mathcal{C}$ ：末端のノード(=選択肢)J個の集合
$\mu_i(>0)$ ：ノード$v_i \in N$に対応するパラメータ

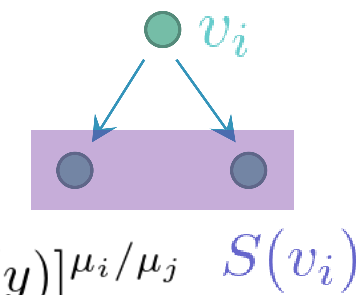
- GEVネットワークの条件：閉じた環（周回）がない





ネットワークによるGEVモデルの生成

- GEV関数：末端から順番に帰納的に定義



$$
\begin{cases}
v_i \in \mathcal{C}\text{のとき} & G^i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : G^i(y_i) = y_i^{\mu_i} \ (\mu_i > 0) \\
v_i \notin \mathcal{C}\text{のとき} & \mathbb{R}_+^{J_i} = \mathrm{span}_{v_j \in S(v_i)} \langle \mathbb{R}_+^{J_j} \rangle, \\
 & G^i : \mathbb{R}_+^{J_i} \to \mathbb{R}_+ : G^i(y) = \sum_{v_j \in S(v_i)} \alpha_i [G^j(y)]^{\mu_i/\mu_j}
\end{cases}
$$

作成した関数 G^i は本当にGEV関数なのか？⇒定理10

定理10. $\forall v_j \notin \mathcal{C}, \quad \mu_j \le \mu_k \ \forall k \ s.t. \ v_k \in S(v_j)$
のとき、ノードv_iに対応する関数 G^i は μ_i-GEV 関数である。

証明：帰納法。末端から順に定理7を適用する。

- $v_i \in \mathcal{C}$のとき

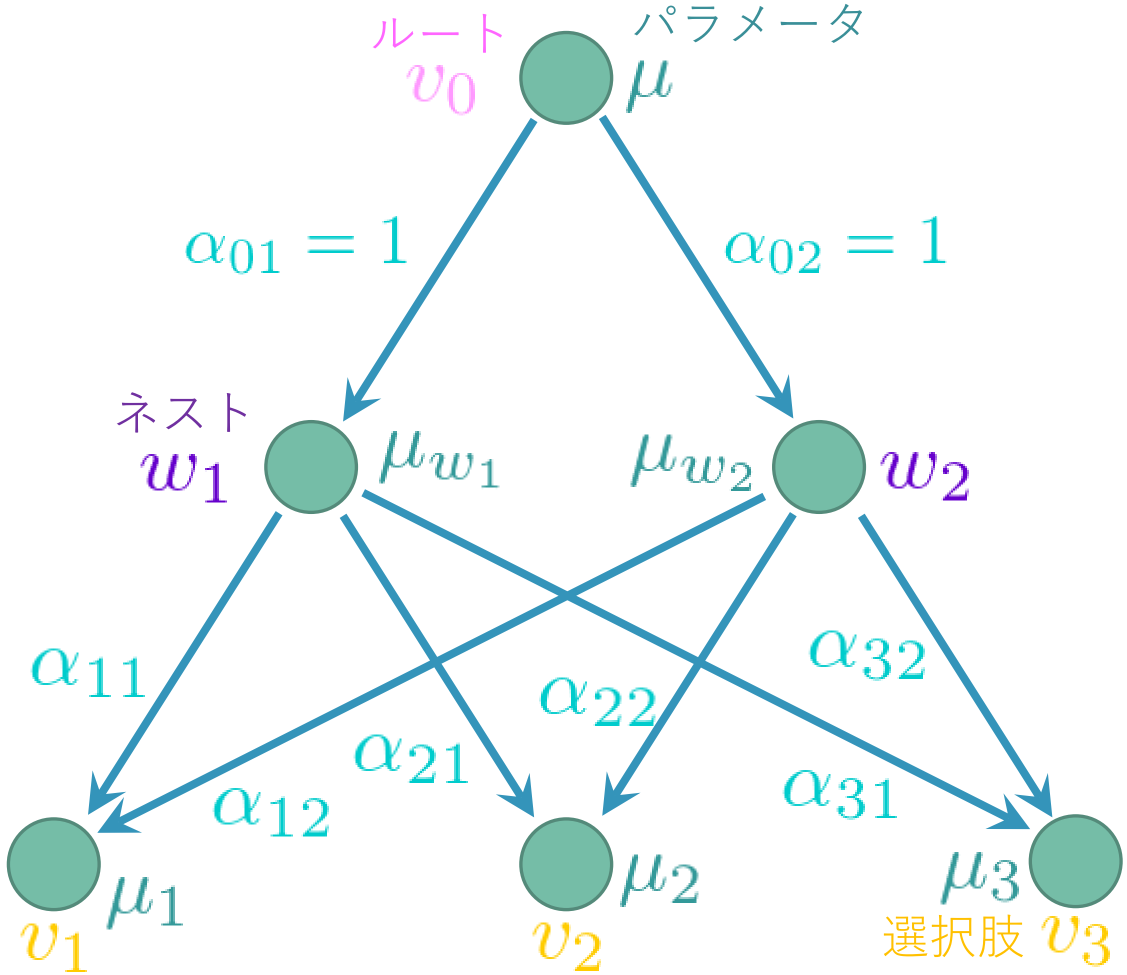
$$
\overline{U}_i = V_i + \frac{\gamma}{\mu_i}
$$

$$
P_i(k) = \begin{cases} 1 & (\text{if} \quad i = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

経路に沿って帰納的に条件付き確率をかけ合わせることで、選択確率式が得られる

$$
P_j(i) = \sum_{\mathcal{K}_{ij}} \prod_{k=1}^{K_{ij}} P_k(k+1) = \sum_{\mathcal{K}_{ij}} \prod_{k=1}^{K_{ij}} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial \overline{U}_{k+1}}
$$

GEVネットワークの例



③最上端(ルート)での各選択肢の選択確率が求まる

$$P(k) = \sum_{m=1}^{M} P(m) P_m(k)$$

ネストの選択確率×条件付き選択確率

②下から順に
GEV関数を定義し、期待最大効用と選択確率を導出

①末端の選択肢ノードについて、GEV関数を定義

$$G^i(y) = y_i^{\mu_i} = \exp(\mu_i V_i)$$

選択確率の計算手順 (前頁の例の場合)

- 各選択肢iについて

$$G^i(y) = y_i^{\mu_i} \qquad \overline{U}_i = V_i + \frac{\gamma}{\mu_i}$$

$$P_i(k) = \begin{cases} 1 & (\text{if} \quad i = k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- 各ネストmについて

$$G^m(y) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} [G^j(y)]^{\mu_m/\mu_j} = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m}$$

$$\overline{U}_m = \frac{\gamma}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_m} \log \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} \exp(\mu_m V_j)$$

$$P_m(i) = \frac{\alpha_{im} \exp(\mu_m V_i)}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} \exp(\mu_m V_j)}$$

- ルートについて

$$G(y) = \sum_{m=1}^{M} [G^m(y)]^{\mu/\mu_m} = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \right)^{\mu/\mu_m}$$

$$\overline{U} = \frac{\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \log \sum_{m=1}^{M} \exp \left[\mu \left(\overline{U}_m - \frac{\gamma}{\mu_m} \right) \right] = \frac{\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \log \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{im} \exp(\mu_m V_i) \right]^{\mu/\mu_m}$$

$$P(k) = \sum_{m=1}^{M} P(m) P_m(k) = \sum_{m=1}^{M} \frac{[\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{im} \exp(\mu_m V_i)]^{\mu/\mu_m}}{\sum_{n=1}^{M} [\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{in} \exp(\mu_n V_i)]^{\mu/\mu_n}} \frac{\alpha_{km} \exp(\mu_m V_k)}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} \exp(\mu_m V_j)}$$

需要応答性・弾力性

- 選択肢jの説明変数x_jに対する選択肢iの選択確率の弾力性

$$\eta_{i,x_j} = \frac{P(i)\text{の変化率}}{x_j\text{の変化率}} = \frac{\partial P(i)}{\partial x_j}\frac{x_j}{P(i)}$$
$$= \frac{\partial P(i)}{\partial V_j}\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\frac{x_j}{P(i)} = \frac{\partial P(i)}{\partial V_j}\frac{\beta_{x_j} x_j}{P(i)}$$

説明変数のパラメータ

- 添字が混在していてわかりにくい

→効用V_jの変化に対する応答性$\partial P(i)/\partial V_j$に着目すると明快

- 定理7(GEV-inheritance)により、需要応答性は次のように導出される。

定理12/系13. 需要応答性は次式により継承される。

$$\frac{\partial P(i)}{\partial V_l} = \sum_{i=1}^{p}\left\{\Omega_i \frac{\partial P_i(k)}{\partial V_l} + \mu P_i(k)\Omega_i\left(P_i(l) - \sum_{m=1}^{M} P_m(l)\Omega_m\right)\right\}$$

ただし

$$\Omega_i = T_i/S,\ S = \sum_{j=1}^{p} T_j,\ T_i = \alpha_i \exp\left[\mu\left(\overline{U}_i - \frac{\gamma}{\mu_i}\right)\right]$$

パラメータ推定

- パラメータ推定は、最尤推定法（＝尤度最大化）で行う
  ✓Pythonの無料パッケージ「BIOGEME」が利用可能
- network-GEVモデルによる選択確率は、tree (nested) logit model での選択確率と同一
  ✓tree logitの推定コードを少し書き換えるだけでnetwork-GEVの推定が可能に

<u>注意点</u>

- パラメータ値が $\alpha_{ij}=0$ となるエッジ(i,j)は必ずネットワークから取り除く
- パラメータμ：比 μ_i/μ_j のみが選択確率に影響
  ✓→正規化（例えば最上端か末端で $\mu=1$ ）
- パラメータα： α を定数倍するのは、G が定数倍されるのと同じでこのとき確率の値は変動しない
  ✓→正規化（下式、参考：CNL）

$$\sum_i \delta_{ij}\alpha_{ij}^{\mu_i/\mu_j}=1,\ \forall j\notin\mathcal{R},\ \delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } j\in S(i)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

結論

- 本論文の成果は、GEV-inheritanceの証明とGEVネットワーク表現の導入。
  - ✓選択肢どうしの相関について、直観的解釈に基づきGEVモデルを設計することが可能に。
- ネットワーク構造によるシンプルな記述、pythonBIOGEME等で容易に推定が可能という点で操作性◎
- 新しいGEVモデルを開発する際、その都度難解な数学的証明を行う必要がなくなった。
- 自由にネットワーク構造をつくることができるため、モデル設計の自由度が高い。

(Appendix) 定理4.の詳しい証明

- GEV関数の4つの性質のうち、4番目(GEV-differentiability)について関数G^βが満たすことを示す。
  - ✓性質1,2,3は簡単に示せる。
  - ✓$D_{\mathcal{K}}^*(y) = \frac{\partial^k}{\partial y_1 \dots \partial y_k} G(y)^\beta$の符号を調べる。
- 次頁の補題14,15を示すことで導く。
  - ✓補題14: k階偏微分$D_{\mathcal{K}}^*(y)$を導出。帰納法による。添字集合$\{1, \dots, k\}$の「分割」について注意が必要。
  - ✓補題15: 補題14で示されたk階偏微分の各項について、もう1度微分すると必ず符号が逆になる。

定理4. G: $\mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}$: μ-GEV関数, $0 < \beta \le 1$
$\Longrightarrow G^\beta$は$(\mu\beta)$-GEV関数。

- GEV関数Gは以下の4つの性質を満たす
  1. $G(y) \ge 0, \ \forall y \in \mathbb{R}_+$
  2. Gはμ次同次、すなわち $G(\lambda y) = \lambda^\mu G(y), \ \forall \lambda > 0$
  3. 各選択肢i=1, …, Jに対し
  $$\lim_{y_i \to +\infty} G(y_1, \dots, y_i, \dots, y_J) = +\infty$$
  4. (GEV-differentiable) 異なるyによるk回偏微分が
  k: 奇数⇒非負, k: 偶数⇒非正
  すなわち
  $$i_1, \dots, i_k \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\} \text{ に対し}$$
  $$(-1)^k D_{\mathcal{K}}(y) \le 0, \ \forall y \in \mathbb{R}_+$$
  ここで $\mathcal{K} = i_1, \dots, i_k \in \mathcal{J}, \ D_{\mathcal{K}}(y) = \frac{\partial^k G}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_k}}(y)$

(Appendix) 定理4.の詳しい証明

補題14. $\mathcal{P}_k$: 添字集合$\{1, \dots, k\}$の分割の集合,
$P \in \mathcal{P}_k$: p個の添字から構成される分割, R: r個の添字を含む集合,

$$S^p(y) \coloneqq G(y)^{\beta-p} \prod_{i=0}^{p-1} (\beta - i)\,, D_R \coloneqq \frac{\partial^r G(y)}{(\partial y_i)_{i \in R}}$$

このとき、$G^* \coloneqq G^\beta$に対してk階偏微分$D^*_{\mathcal{K}}(y)$が次式で導かれる。

$$D^*_{\mathcal{K}}(y) = \frac{\partial^k}{\partial y_1 \dots \partial y_k} G(y)^\beta = \sum_{P \in \mathcal{P}_k} \boxed{S^p} \boxed{\prod_{R \in P} D_R} \quad (55)$$

補題15. 任意のkについて、
$0 < \beta \leq 1, \qquad P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}: p(\geq 1)$個の添字から構成される分割
のとき、補題14で導いた(55)式中の項

$$S^p(y) \prod_{R \in P} D_R$$

の符号と、その導関数

$$\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \left(S^p(y) \prod_{R \in P} D_R \right)$$

の符号は逆である。

(Appendix) 補題15の証明

$$\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left(S^p(y)\prod_{R\in P}D_R\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}S^p(y)\right)\prod_{R\in P}D_R+S^p(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\prod_{R\in P}D_R\right)$$

- 右辺第1項について

$$S^p(y)=\underbrace{\boxed{G(y)^{\beta-p}}}_{\geq 0}\boxed{\prod_{i=0}^{p-1}(\beta-i)},\ \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}S^p(y)=\overbrace{\boxed{\frac{\partial G}{\partial y_{k+1}}}}^{\geq 0}\boxed{\prod_{i=0}^{p-1}(\beta-i)\,(\beta-p)}\overbrace{\boxed{G(y)^{\beta-(p+1)}}}^{\geq 0}$$

ここの符号は必ず逆 $(\because \beta-p\leq 0)$

- 右辺第2項は、D_Rの定義より

$$D_R:=\frac{\partial^r G(y)}{(\partial y_i)_{i\in R}}$$

→ GEV関数$G(y)$が性質4(GEV-differentiable)を満たしていることから、D_Rとその偏導関数$\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}D_R$の符号は逆になる。

4. (GEV-differentiable) 異なるyによるk回偏微分が
k: 奇数⇒非負, k: 偶数⇒非正
すなわち
$i_1,\ldots,i_k\in\mathcal{J}=\{1,\ldots,J\}$ に対し
$$(-1)^k D_{\mathcal{K}}(y)\leq 0,\ \forall y\in\mathbb{R}_+$$
ここで $\mathcal{K}=i_1,\ldots,i_k\in\mathcal{J},\ D_{\mathcal{K}}(y)=\frac{\partial^k G}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}}(y)$

(Appendix) 補題14の証明の指針

- 1階偏導関数

$$D^*_{\{1\}}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} G(y)^\beta = \boxed{\beta G(y)^{\beta-1}} \boxed{\frac{\partial G}{\partial y_1}}$$

- 2階偏導関数

$$D^*_{\{1,2\}}(y) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G(y)^\beta = \boxed{\beta(\beta-1)G(y)^{\beta-2}} \boxed{\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2}} + \boxed{\beta G(y)^{\beta-1}} \boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial y_1 \partial y_2}}$$

- 3階偏導関数

$$\begin{aligned}
D^*_{\{1,2,3\}}(y) &= \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} G(y)^\beta \\
&= \boxed{\beta(\beta-1)(\beta-2)G(y)^{\beta-3}} \boxed{\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_3}} \\
&\quad + \boxed{\beta(\beta-1)G(y)^{\beta-1}} \left(\boxed{\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial^2 G}{\partial y_2 \partial y_3}} + \boxed{\frac{\partial G}{\partial y_2}\frac{\partial^2 G}{\partial y_3 \partial y_1}} + \boxed{\frac{\partial G}{\partial y_3}\frac{\partial^2 G}{\partial y_1 \partial y_2}} \right) \\
&\quad + \boxed{\beta G(y)^{\beta-1}} \boxed{\frac{\partial^3 G}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}}
\end{aligned}$$

集合$\{1,2,3\}$に対する「分割」を考える

(Appendix) 集合の分割

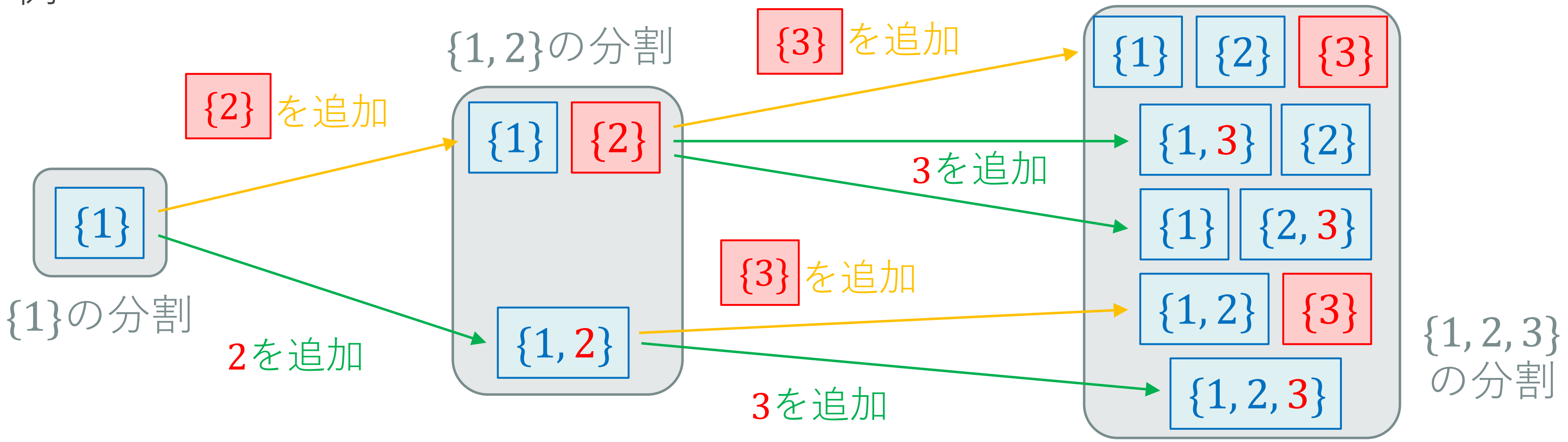
- Indexの集合$\{1,\dots,k\}$に対する分割は次のように再帰的に定義される。

$$\mathcal{P}_0=\emptyset,\mathcal{P}_1=\left\{\{\{1\}\}\right\},\mathcal{P}_k=\bigcup_{i=1}^{p}P_i^k\quad\left(P_i^k=\bigcup_{j=1}^{n_i}R_j^i,R_j^i\subseteq\{1,\dots,k\}\right)$$

- $\mathcal{P}_k$から$\mathcal{P}_{k+1}$を構成する
  - ✓1つは、単集合$\{\{k+1\}\}$をP_i^kに加える
  - ✓他すべてに対しては、分割された各添字集合R_j^iを、1度に1つだけ$R_j^i\cup\{k+1\}$に置き換える

$$\mathcal{P}_{k+1}=\bigcup_{i=1}^{p}\left[\left(P_i^k\cup\{\{k+1\}\}\right)\cup\bigcup_{l=1}^{n_i}P_{i,l}^{k+1}\right]\quad(71)\quad\left(P_{i,l}^{k+1}=\left\{R_l^i\cup\{k+1\}\right\}\cup\bigcup_{j=1,j\neq l}^{n_i}R_j^i\quad(72)\right)$$

- 例



(Appendix) 補題14の証明

- 帰納法。$k=1$で成立。
- 帰納法の仮定より

$$\frac{\partial^k}{\partial y_1 \dots \partial y_{k+1}} G(y)^\beta = \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left(\frac{\partial^k}{\partial y_1 \dots \partial y_k} G(y)^\beta\right) = \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left[\sum_{P\in\mathcal{P}_k} S^p \prod_{R\in P} D_R\right]$$
$$= \sum_{P\in\mathcal{P}_k}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} S^p\right)\prod_{R\in P} D_R + S^p\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\prod_{R\in P} D_R\right)\right]$$
$$= \sum_{P\in\mathcal{P}_k}\left[\left(S^{p+1}\frac{\partial G}{\partial y_{k+1}}\right)\prod_{R\in P} D_R + S^p \sum_{R\in P} D_{R\cup\{k+1\}} \prod_{T\in P, T\neq R} D_T\right]$$

- (71)(72)式の分割の定義から

$$\frac{\partial^k}{\partial y_1 \dots \partial y_{k+1}} G(y)^\beta = \sum_{i=1}^{p}\left[S^{p+1}\prod_{R\in P\cup\{\{k+1\}\}} D_R + \sum_{l=1}^{n_i} S^p \prod_{R\in P_{i,l}^{k+1}} D_R\right] = \sum_{P\in\mathcal{P}_{k+1}} S^p \prod_{R\in P} D_R$$

$$\mathcal{P}_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{p}\left[\left(P_i^k \cup \{\{k+1\}\}\right) \cup \bigcup_{l=1}^{n_i} P_{i,l}^{k+1}\right] \quad (71) \quad \left(P_{i,l}^{k+1} = \left\{R_l^i \cup \{k+1\}\right\} \cup \bigcup_{j=1, j\neq l}^{n_i} R_j^i \quad (72)\right)$$

- kで成立するとき、$k+1$でも成立することが示せた。