

理論談話会

# Dynamic Choice Models

Michel, Emma, Tim(2021)  
Report TRANSP-OR 210305

2022/06/01

M1 福谷 きり

# 構成

1. Introduction
2. The point of view of the decision maker
3. The point of view of the analyst
4. A general parametric model and estimation
5. Habitual behaviour and learning
6. Links to existing models
7. Conclusion

# 1. Introduction

## 動的選択モデルとは？

意思決定過程において連続的な選択を記述するモデルの仲間。

→ モデルの推定には**パネルデータ**(複数の質問項目\*一定期間)が必要。

3つの異なるモデリングシナリオが存在：

- ① 外的要素の時間変化 (changes in external factors over time)
- ② 習慣的行動・学習 (habitual behaviour and learning)
- ③ 先を見据えた計画 (forward-looking planning)

	1. Introduction
①	2. The point of view of the decision maker
	3. The point of view of the analyst
②	4. A general parametric model and estimation
	5. Habitual behaviour and learning
③	6. Links to existing models
	7. Conclusion

## 目的

- ① 動的選択問題の一般式を提示し、それが上記①～③のメカニズムをどのように捉えているか示す
  - ② 式を用いて一般化パラメトリックモデルを導出する
  - ③ 一般化パラメトリックモデルから動的選択モデルの様々な具体例がどのように導出されるか示す
- 既存の様々な動的選択モデルに統合されたフレームワークを設け、モデル間の違いを説明する

# 2. The point of view of the decision maker

1. Introduction
- 2. The point of view of the decision maker**
3. The point of view of the analyst
4. A general parametric model and estimation
5. Habitual behaviour and learning
6. Links to existing models
7. Conclusion

## 2. The point of view of the decision maker

### 変数一覧

- $t$ : 時間,  $n$ : 個人,  $i_{nt}$ : 選択肢 (set  $C$ )
- $a_{int}$ : 個人 $n$  が時間 $t$  に選択肢 $i$  を選べるかどうか (binary)
- $y_{int} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = i_{nt}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$  : 時間 $t$  において個人 $n$  が選択肢 $i$  を選んだかどうか
- $\tilde{x}_{nt}$ : 個人 $n$  がどんな $t$  でも選択できるデータ (vector)。意思決定するための全ての情報を含む。離散・連続どちらでも可。

## 2. The point of view of the decision maker

### 現在 (t)

$\tilde{x}_{nt}$

個人 $n$ がどんな時間 $t$ においても選択できるデータ (vector)。意思決定するための全ての情報を含む。離散・連続どちらでも可。

$$\tilde{u}_{nt} = \tilde{u}(\tilde{x}_{nt}) \in \mathbb{R}^J \quad (6)$$

効用関数。個人の趣向も含んでいる。

### 未来 (s)

$\tilde{X}_{ns}(t)$

$t$ 時点の結果を受けて予想される  
 $s$ 時点の説明変数 $X$ の価値。  
ランダム変数。

$$f_{\tilde{X}_{ns}(t)}(x|y_{nt}, \tilde{x}_{nt}), \quad t < s \leq T, \quad (5)$$

確率密度関数(pdf)。これにより $\tilde{X}_{ns}(t)$ を予測する。

$\tilde{u}(\tilde{X}_{ns}(t))$

$t$ 時点の結果を受けて予測される  
説明変数 $X$ の $s$ 時点の将来効用。

## 2. The point of view of the decision maker

### 最終的な未来 (T)

$$\max_{y_T \in \mathcal{Y}} y_T^T \tilde{u}(\tilde{x}_{nT}) \quad (7)$$

T時点の効用を最大化するように行動する。

$$\max_{y \in \mathcal{T}_t} y_t^T \tilde{u}(\tilde{x}_{nt}) + E_{\tilde{X}_{n,t+1:T}(t)} \left( \sum_{s=t+1}^T \rho_n^{s-t} y_s^T \tilde{u}(\tilde{X}_{ns}(t)) \right), \quad t < T, \quad (8)$$

残り時間tにおいて、個人は予想される効用の合計を最大化しようとする。

→ t時点の効用 + 予想される将来効用

(  $0 \leq \rho_n \leq 1$  : 割引率)

(  $\mathcal{T}_t$ : tから始まる選抜 のセット)

## 2. The point of view of the decision maker

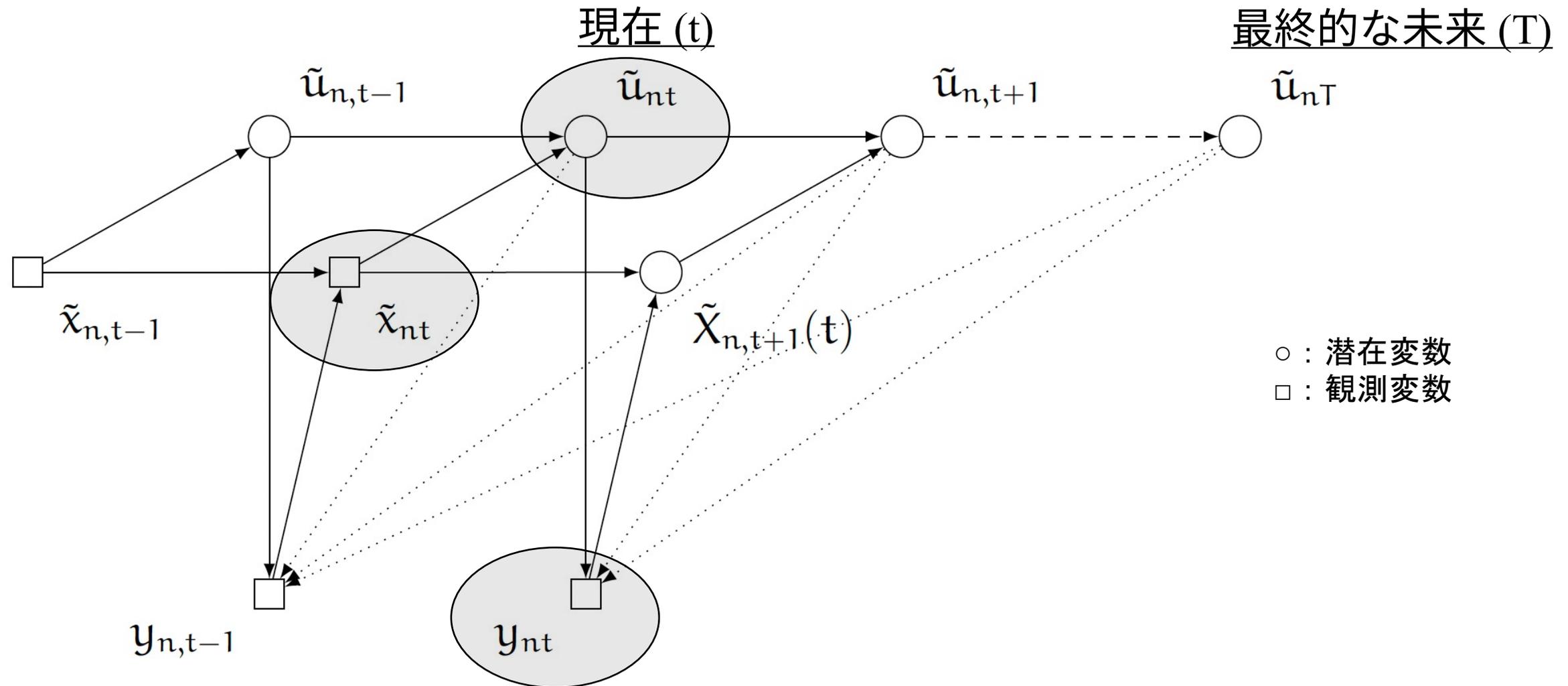


Figure1: Illustration of the variables involved in the decision making process at the current time interval  $t$

# 3. The point of view of the analyst

1. Introduction
2. The point of view of the decision maker
- 3. The point of view of the analyst**
4. A general parametric model and estimation
5. Habitual behaviour and learning
6. Links to existing models
7. Conclusion

# 3. The point of view of the analyst

分析者の視点：観測されていない意思決定者の選択の連続を正確に予想したい

→ dynamic programming (ベルマンの最適性の原理\*より)

価値関数(ベルマン方程式により定義される)の後方からの再帰式を解き、最適な選択連続を構築する

$$f_{\tilde{X}_{n,s+1}(t)}(x|y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t)), t \leq s < T. \quad (9)$$

意思決定者の持つ確率密度関数(5)  $f_{\tilde{X}_{ns}(t)}(x|y_{nt}, \tilde{x}_{nt})$ ,  $t < s \leq T$ , に再帰的に近似しようとしたもの。

$$\tilde{X}_{nt}(t) = \tilde{x}_{nt}. \quad (10)$$

$s = t$  のとき、説明変数は観測されるため。

\*ベルマンの最適性の原理：最適な方策は、初期状態と初期決定がどんなものであれ、その結果得られる次の状態に関して、以降の決定が必ず最適方策になっているという性質をもつ。(Wikipedia)

# 3. The point of view of the analyst

分析者は意思決定者の持つ効用関数  $u$  を知り得ない

→ ランダム変数  $u$  を用いる(ランダム効用理論(Manski, 1973, Manski, 1977)より与えられる)

$U'_i(\tilde{X}_{nT}(t))$  総効用 (即時効用・将来効用を含む)

$U_i(\tilde{X}_{nT}(t))$  即時効用

$W_i(\tilde{X}_{ns}(t))$  将来効用 (価値関数  $w^*$  確率密度関数  $f$ )

$w_{ns}^*(t)$  価値関数 (予想される最大総効用の価値関数)

「意思決定者は、将来効用  $W_i$  を最大化するように行動する」という仮定のもと分析する

# 3. The point of view of the analyst

- $t$  時点で予想する、 $s = T$  時点における**価値関数** (予想される最大総効用)

$$w_{nT}^*(t) = w^*(\tilde{X}_{nT}(t)) = E_U[\max_{j \in \mathcal{C}} \underline{U'_j(\tilde{X}_{nT}(t))}], t \leq T. \quad (12)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ U'_i(\tilde{X}_{nT}(t)) = U_i(\tilde{X}_{nT}(t)), t \leq T. \end{array} \quad (11)$$

$s = T$  のとき、総効用 = 即時効用

- $t$  時点で予想する、 $s < T$  時点における**価値関数** (予想される最大総効用)

$$w_{ns}^*(t) = w^*(\tilde{X}_{ns}(t)) = E[\max_{j \in \mathcal{C}} \underline{U'_j(\tilde{X}_{ns}(t))}], t \leq s < T. \quad (15)$$

$\underline{U'_i(\tilde{X}_{ns}(t))} = \underline{U_i(\tilde{X}_{ns}(t))} + \rho_n \underline{W_i(\tilde{X}_{ns}(t))}, t \leq s < T, \quad (13)$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <span>総効用</span> <span>即時効用</span> <span>割引率*将来効用</span> </div>

# 3. The point of view of the analyst

- 以上を踏まえ、**価値関数の完全形** (予想される最大総効用)

$$w_{ns}^*(t) = \begin{cases} E[\max_{j \in \mathcal{C}} U_j(\tilde{X}_{ns}(t)) + \\ \quad \rho_n \int_{\mathcal{X}} w_{n,s+1}^*(x) f_{\tilde{X}_{n,s+1}(t)}(x|\delta_j, \tilde{X}_{ns}(t)) dx], & s < T, \\ E[\max_{j \in \mathcal{C}} U_j(\tilde{X}_{nT}(t))], & s = T. \end{cases} \quad (16)$$

- $t$  時点で意思決定者  $n$  が選択肢  $i_{nt}$  を選択する**選択モデル**

$$P(y_{nt} | \tilde{x}_{nt}, \mathcal{C}) = \text{Prob}(y_{nt}^\top U'(\tilde{x}_{nt}) \geq \delta_j^\top U'_{nt}(\tilde{x}_{nt}), \forall j \in \mathcal{C}). \quad (18)$$

# 4. A general parametric model and estimation

1. Introduction
2. The point of view of the decision maker
3. The point of view of the analyst
- 4. A general parametric model and estimation**
5. Habitual behaviour and learning
6. Links to existing models
7. Conclusion

# 4. A general parametric model and estimation

モデリング仮定を導入し (パラメトリックモデル)、尤度関数を導出する。

## 構成

4.1 Parametric model

4.2 Agent effects

4.3 Maximum likelihood estimation

# 4. A general parametric model and estimation

## 4.1 Parametric model

- 将来の説明変数：マルコフ連鎖\*でモデル化可能

$$\tilde{X}_{n,s+1}(t) = \underbrace{h(y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t); \theta_h)}_{\text{増加する予測の dynamics を表現}} + \underbrace{\alpha_n^x}_{\text{誤差項1 個人nに特有}} + \underbrace{\lambda_v^{s+1-t} v_{n,s+1}}_{\text{誤差項2 未来が遠いほど分散は大きい}}, \quad t \leq s < T, \quad (19)$$

過去の他の選択肢の価値・未来の選択の参考になる情報の両者を含む  
→ どんな形の将来説明変数も表現可能

- 確率密度関数

$$f_{\tilde{X}_{n,s+1}(t)}(x | y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t), \alpha_n^x) = \frac{1}{\lambda_v^{s+1-t}} f_v \left( \frac{x - h(y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t); \theta_h) - \alpha_n^x}{\lambda_v^{s+1-t}}; \theta_v \right). \quad (20)$$

\*マルコフ連鎖(MC)：未来の挙動が現在の状態のみに依存し、過去の状態と無関係(マルコフ性)である確率過程(マルコフ過程)のうち、取りうる状態(今回は時間)が離散的なもの。(白井さんの理論談話資料を参照)

# 4. A general parametric model and estimation

## 4.1 Parametric model

- 効用

$$U'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) = V'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^U + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T \quad (21)$$

$$= \underbrace{V_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \rho_n W_i(\tilde{X}_{ns}(t))}_{\text{確定的}} + \underbrace{\alpha_{in}^U}_{\text{誤差項1}} + \underbrace{\lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}}_{\text{誤差項2}}, \quad t \leq s \leq T$$

$$U'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) = \underbrace{U_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \rho_n W_i(\tilde{X}_{ns}(t))}_{\text{即時効用+割引率*将来効用}}, \quad t \leq s < T, \quad (13) \text{ に randomness を加えてモデル化}$$

# 4. A general parametric model and estimation

## 4.1 Parametric model

- **選択モデル**: 誤差項  $\varepsilon_{nt}$  の想定によりタイプが決まる。
  - 例えば、スケールパラメータ  $\mu$  の極値分布\*の時...
  - **価値関数**

$$\begin{aligned} w^*(\tilde{X}_{ns}(t)) &= E_{\alpha_n^u} [E_{\varepsilon_{ns}} [\max_{i \in \mathcal{C}} U'_{ins}(\tilde{X}_{ns}(t))]] \\ &= E_{\alpha_n^u} \left[ \frac{1}{\mu_{st}} \ln \sum_{i \in \mathcal{C}} \exp(\mu_{st}(V'_{int}(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^u)) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

- **スケールパラメータ**

$$\mu_{st} = \frac{\mu}{\lambda_\varepsilon^{s-t}} \quad (24)$$

- **選択モデル**: ロジットモデルの混合で表現可能

$$P(i_{nt} | \tilde{x}_{nt}) = E_{\alpha_n^u} [P(i_{nt} | \tilde{x}_{nt}, \alpha_n^u)], \quad (25)$$

$$P(i_{nt} | \tilde{x}_{nt}, \alpha_n^u) = \frac{\exp(\mu_{st}(V'_{int}(\tilde{x}_{nt}) + \alpha_{in}^u))}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \exp(\mu_{st}(V'_{jnt}(\tilde{x}_{nt}) + \alpha_{jn}^u))}. \quad (26)$$

\*極値分布: 確率論および統計学において、ある累積分布関数にしたがって生じた大きさ  $n$  の標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  のうち、 $x$  以上 (あるいは以下) となるものの個数がどのように分布するかを表す、連続確率分布モデル。  
(Wikipedia)

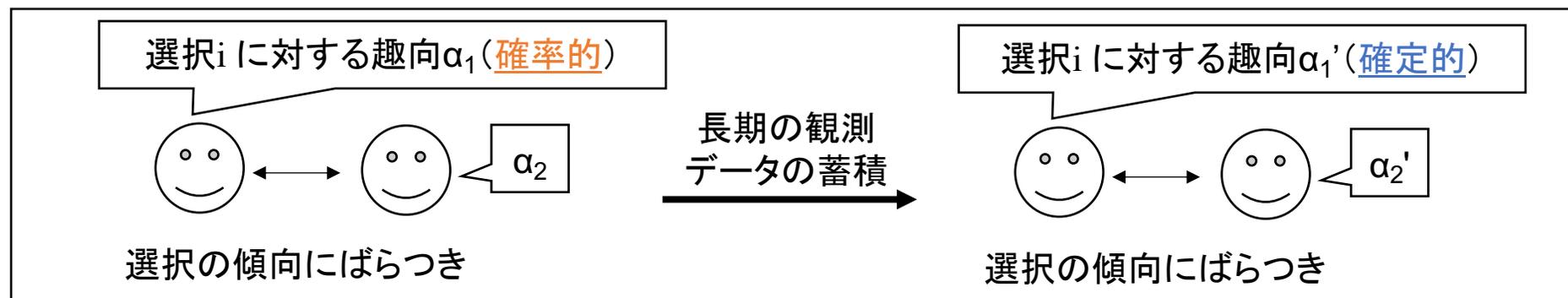
# 4. A general parametric model and estimation

## 4.2 Agent effects $\alpha_n^u$ $\alpha_n^x$

個人によって選択の傾向にばらつきがある(被験者固有の効果) → **ランダム効果モデル\***



長い観測の結果、1人につきの観測データが膨大になる → agent effectsが固定化される → **固定効果モデル**  
例)  $\alpha_n^u$ が各選択肢  $i \in J$  に対し1つのパラメタ(正規化されている)を持つ → N人に対して  $N(J-1)$ 個のパラメタを計算する



- 動的モデル:ランダム効果モデル、静的モデル:ランダム効果モデル&固定効果モデル。
- 一般化パラメトリックモデルをより厳格にしたものが静的モデルと考えられる。(選択にあたって、近視眼的かつ過去データを参照しない)

\***ランダム効果モデル**:モデルパラメータが確率変数である統計モデル。異質性が時間の経過とともに一定であり、独立変数と相関していない場合に、観測されない異質性をコントロールするのに役立つ。(Wikipedia)

# 4. A general parametric model and estimation

## 4.3 Maximum likelihood estimation

最尤推定法によりパラメタを推定する。

推定対象のパラメタ:

$\beta$ : 効用関数のパラメタ	$\lambda_v, \lambda_\varepsilon$ : 分散拡大係数のパラメタ
$\rho_n$ : 割引率のパラメタ	$\theta_{\alpha^x}, \theta_{\alpha^u}$ : agent effectsの分布のパラメタ
$\theta_h$ : 分散予測モデルのパラメタ	$\nu, \theta_\nu$ : 確率密度関数のパラメタ

全部まとめて  $\theta$  とする  
agent effects  $\alpha_n^u, \alpha_n^x$  は  
時間一定のため、他の  
パラメタから分離させる

条件付き尤度関数への個人 $n$ の影響度:

$$\ell_n(\theta) = \ln E_{\alpha^x, \alpha^u} [\text{Prob}(\mathbf{y}_{n,t_b:t_e}, \mathbf{x}_{n,t_b:t_e} | \alpha^x, \alpha^u, \theta)]. \quad (28)$$

再帰性と誤差項独立(over time)より:

$$\text{Prob}(\mathbf{y}_{n,t_b:t_e}, \mathbf{x}_{n,t_b:t_e} | \alpha^x, \alpha^u, \theta) = \text{Prob}(\mathbf{y}_{n,t_b}, \mathbf{x}_{n,t_b} | \alpha^x, \alpha^u, \theta) \prod_{t=t_b+1}^{t_e} \text{Prob}(\mathbf{y}_{nt}, \mathbf{x}_{nt} | \mathbf{y}_{n,t_b:t-1}, \mathbf{x}_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta), \quad (29)$$

# 4. A general parametric model and estimation

## 4.3 Maximum likelihood estimation

周辺確率は予測した説明変数と条件付き選択確率から求められ、

同時確率はベイズ理論( $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ )を用いて周辺確率から求められる。

$$\frac{\text{同時確率}}{\text{同時確率}} = \frac{\text{Prob}(y_{nt}, x_{nt} | y_{n,t_b:t-1}, x_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta)}{\text{Prob}(x_{nt} | y_{n,t_b:t-1}, x_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta) \times \text{Prob}(y_{nt} | x_{nt}, y_{n,t_b:t-1}, x_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta)}. \quad (30)$$

- 全ての過去データが必要 → 計算量が多すぎる & データ取得も容易でない
- マルコフ連鎖を用いる(スライド15)

$$\begin{aligned} \text{Prob}(x_{nt} | y_{n,t_b:t-1}, x_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta) &\xrightarrow{\star} \\ &= P(x_{nt} | y_{n,t-1}, x_{n,t-1}, \alpha^x, \theta) \\ &= \frac{1}{\lambda_v} f_v \left( \frac{x_{nt} - h(y_{n,t-1}, x_{n,t-1}; \theta_h) - \alpha_n^x}{\lambda_v}; \theta_v \right). \end{aligned} \quad (31)$$

# 5. Habitual behaviour and learning

1. Introduction
2. The point of view of the decision maker
3. The point of view of the analyst
4. A general parametric model and estimation
- 5. Habitual behaviour and learning**
6. Links to existing models
7. Conclusion

# 5. Habitual behaviour and learning

## 習慣的な行動・学習をモデルの中で考慮する際に生じる2つの疑問

1. 過去の経験をとらえるためにどんな変数を用いるか？  
→ 過去の選択と効用
2. どのくらい昔まで考慮すべきか？  
→ 固定の時間 $1 \sim k$ を考えるが、初期値データがない場合は不可能  
→ ・マルコフ仮定を置き、選択結果からマルコフモデルを得る  
：習慣行動と学習による進歩をモデリングする手法その1  
・潜在効用を用いる際には隠れマルコフモデルを得る  
：習慣行動と学習による進歩をモデリングする手法その2

### 構成

5.1 The Markov model and the initial condition problem

5.2 The hidden Markov model and particle filtering

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.1 The Markov model and the initial condition problem

4で導入した効用のパラメトリックモデル

$$U'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) = V'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^u + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T \quad (21)$$

マルコフモデル: 現在の選択のみ考慮  $\rightarrow s = t$  を考えると、

$$U'_i(\tilde{x}_{nt}) = V'_i(\tilde{x}_{nt}) + \eta_i y_{n,t-1} + \alpha_{in}^u + \varepsilon_{int}, \quad t \leq T. \quad (33)$$

Model Habitual behaviour and learning (dependent on **the choices**)

↑

Parallel

↓

Model Forward-planning behaviour (dependent on **their values**)

$$\tilde{X}_{n,s+1}(t) = h(y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t); \theta_h) + \alpha_n^x + \lambda_v^{s+1-t} v_{n,s+1}, \quad t \leq s < T, \quad (19)$$

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.1 The Markov model and the initial condition problem

難点:

観測期間  $\geq$  entire history とならないと、モデリングするのが困難。

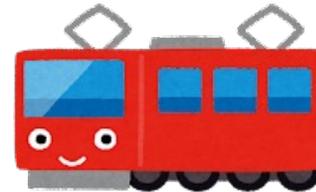
特に、時間  $0 \sim t_b$  (観測のスタート時点) において起きたことが  $t_b$  時点の選択のみから解釈されると、大幅に誤った解釈につながりかねない。

例)



○ car lover

× cheaper transportation lover



○ Public transportation lover

× faster transportation lover

$t_b$  時点の選択のみで解釈すると、原因を求めるパラメタを誤る可能性がある！

特に例の場合、選択や他のパラメタから独立であるはずの agent effects  $\alpha_{in}^u$  の影響が入り込んでしまい(内生性の問題)、意思決定者  $1 \sim n$  に共通するはずのパラメタが一定値を取らなくなってしまう！

→ 初期条件問題 (initial condition problem)

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.1 The Markov model and the initial condition problem

→  $y_{ntb}$  に条件付けられた agent effects をモデリングする(Wooldridge, 2005) : Wooldridge's correction

$$\alpha_n^x = a_x y_{ntb} + b_x^T x_n' + \zeta_n^x, \quad (34)$$

$x_n'$ : 観測された個人nの社会経済特性  
 $\zeta_n^x$ :  $y_{ntb}$  から独立であり、正規分布に従う  
 $a_x, b_x^T$ : 未知パラメタ(推定対象)

同様に、

$$\alpha_{in}^u = a_u y_{ntb} + b_u^T x_n' + \zeta_n^u. \quad (36)$$

過去データ全てにアクセスできないときや、各個人が複数の観測により結びついているときなど、幅広く適用できる。

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.2 The hidden Markov model and particle filtering

隠れマルコフモデル: 何らかの状態変数が潜在的で観測できないマルコフモデル。  
今回は効用関数 → 過去の効用関数を現在の説明変数に入れ込む。

- 効用関数

$$U_i'(\tilde{x}_{nt}) = \tilde{U}_{int} + \varepsilon_{int}, \quad (37)$$

$$= \underline{V_i'(\tilde{x}_{nt}) + \gamma_i \tilde{U}_{n,t-1} + \eta_i y_{n,t-1} + \alpha_{in}^u + \xi_{nt} + \varepsilon_{int}} \quad (38)$$

ただし、 $\xi_{nt} = \Sigma_\xi \omega$ ,  $\Sigma_\xi$  は分散共分散行列のCholesky factor,  $\omega$  は平均0, 分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う。

- 選択モデル

$$\text{Prob}(y_{n,t_b:t_e}, x_{n,t_b:t_e} | \alpha^x, \alpha^u, \theta) = \text{Prob}(y_{n,t_b}, x_{n,t_b} | \alpha^x, \alpha^u, \theta) \prod_{t=t_b+1}^{t_e} \text{Prob}(y_{nt}, x_{nt} | y_{n,t_b:t-1}, x_{n,t_b:t-1}, \alpha^x, \alpha^u, \theta), \quad (29)$$

↓ 解くと、

$$P(y_{nt} | y_{n,t-1}, x_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho) = \underline{E_{\tilde{U}_{n,t_b:t-1}} [P(y_{nt} | \tilde{U}_{n,t_b:t-1}, x_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho)]}. \quad (40)$$

期待値の計算は $t-t_b$ 次元の積分を含む → 複雑すぎる

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.2 The hidden Markov model and particle filtering

簡略化のためにモデルの再帰性を利用し、**粒子フィルタリング**という手法で解く。

**粒子フィルタリング**：各時間で推定を更新。時間変化する潜在変数が効用関数に含まれるときに適用可能。

(38) - (39)

$$\tilde{U}_{int} = V'_i(\tilde{x}_{nt}) + \gamma_i \tilde{U}_{n,t-1} + \eta_i y_{n,t-1} + \alpha_{in}^u + \xi_{nt}$$

$$\xi_{nt} = \Sigma_\xi \omega$$

---

$$\omega(\tilde{U}_{nt}, \tilde{U}_{n,t-1}) = \Sigma_\xi^{-1} (\tilde{U}_{nt} - V'_i(\tilde{x}_{nt}) - \gamma_i \tilde{U}_{n,t-1} - \eta_i y_{n,t-1} - \alpha_{in}^u). \quad (41)$$

変数が変わったので、 $\tilde{U}_{nt}$  の密度関数は

$$f_{\tilde{U}_{nt}}(u | \tilde{U}_{n,t-1}, y_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{x}_{nt}) = \frac{1}{|\Sigma_\xi|} \phi(\omega(u, \tilde{U}_{n,t-1})), \quad (42)$$

$\phi$  は標準正規分布の確率密度関数

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.2 The hidden Markov model and particle filtering

$\tilde{u}_{n,t-1}$  を積分  $\rightarrow \tilde{u}_{n,t-1}$  の分布が得られる (State prediction):

$$f_{\tilde{u}_{nt}}(\mathbf{u}|\mathbf{y}_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{\mathbf{x}}_{nt}) = \frac{1}{|\Sigma_\xi|} \int_{\mathbf{v}} \phi(\omega(\mathbf{u}; \mathbf{v})) f_{\tilde{u}_{n,t-1}}(\mathbf{v}|\mathbf{y}_{n,t-1}, \mathbf{y}_{n,t-2}, \alpha_n^u, \tilde{\mathbf{x}}_{n,t-1}) d\mathbf{v}, \quad (44)$$

- 選択モデル (mixtureモデルで書ける)

$$P(\mathbf{y}_{nt}|\mathbf{y}_{n,t-1}, \mathbf{x}_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho) =$$

$$\int_{\mathbf{u}} P(\mathbf{y}_{nt}|\mathbf{u}, \mathbf{y}_{n,t-1}, \mathbf{x}_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho) f_{\tilde{u}_{nt}}(\mathbf{u}|\mathbf{y}_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{\mathbf{x}}_{nt}) d\mathbf{u}, \quad (45)$$

# 5. Habitual behaviour and learning

## 5.2 The hidden Markov model and particle filtering

### 解き方の手順

①過去の時点における効用の密度関数は既知:  $f_{\tilde{u}_{n,t-1}}(u|y_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{x}_{n,t-1})$

②state prediction により計算:  $f_{\tilde{u}_{nt}}(u|y_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{x}_{nt})$

③時間tが尤度に及ぼす影響度を知るために計算:

$$P(y_{nt}|y_{n,t-1}, x_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho) = \int_u P(y_{nt}|u, y_{n,t-1}, x_{nt}, \alpha_n^u, \beta, \lambda_\varepsilon, \rho) f_{\tilde{u}_{nt}}(u|y_{n,t-1}, \alpha_n^u, \tilde{x}_{nt}) du, \quad (45)$$

④現時点の効用の密度関数を次の時点の計算のために準備:  $f_{\tilde{u}_{nt}}(u|y_{nt}, \alpha_n^u, \tilde{x}_{nt})$

# 6. Links to existing models

1. Introduction
2. The point of view of the decision maker
3. The point of view of the analyst
4. A general parametric model and estimation
5. Habitual behaviour and learning
- 6. Links to existing models**
7. Conclusion

# 6. Links to existing models

これまでで示したモデルの一般形をどのように個別のモデルに適用しているか

構成

6.1 Forward looking models

6.2 Markov models

6.3 Hidden Markov models

# 6. Links to existing models

## 6.1 Forward looking models

- Rust(1987)：バスエンジン交換のタイミングの連続選択
- Aguirregabiria and Mira(2010)：より一般性の高い想定

- 効用

$$U_i'(\tilde{X}_{ns}(t)) = V_i'(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^u + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T \quad (21)$$

$$= V_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \rho_n W_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^u + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T$$

$$\alpha_{in}^u = 0$$

$$\lambda_\varepsilon^{s-t} = 1$$

$$U_i'(\tilde{X}_{ns}(t)) = V_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \rho_n W_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T. \quad (53)$$

- 確率密度関数

$$f_{\tilde{X}_{n,s+1}(t)}(x|y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t), \alpha_n^x) = \frac{1}{\lambda_v^{s+1-t}} f_v \left( \frac{x - h(y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t); \theta_h) - \alpha_n^x}{\lambda_v^{s+1-t}}; \theta_v \right). \quad (20)$$

$$\alpha_n^x = 0$$

$$\lambda_v = 0$$

$$f_{\tilde{X}_{n,s+1}(t)}(x|y_{ns}, \tilde{X}_{ns}(t)) = \theta e^{\theta(x_{s+1} - (1-y_s)x_s)} \quad t \leq s < T. \quad (55)$$

# 6. Links to existing models

## 6.1 Forward looking models

- 動的離散選択モデルの推定は計算負荷が高いが、適用に成功した例が多く見られる
- Rust(1987)は 選択行動の分析と予測というよりも逆最適化(エンジン交換時期の最適化)に主眼を置いている
- ←→ 1人の選択行動の分析・予測を目的とした適用は様々見られる：
  - 年金システム(Karlstrom et al, 2004)
  - 持久財の所有選択...車の所有選択(Gillingham et al, 2015)、洗剤の買い溜め(Ching and Osborne, 2020)
- 構造経済学(SE)の動的離散選択モデルと逆強化学習(IRL)のアルゴリズムには多くの類似点があるが、大きくかけ離れたものとして記述されがち
  - SEは推論と反実予想 ←→ IRLは予想

# 6. Links to existing models

## 6.2 Markov models

近視眼的な選択( $U'_i = U_i, V'_i = V_i$ )に適用されることが多い

$$\begin{aligned} U'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) &= V'_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^U + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins} \\ &= V_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \rho_n W_i(\tilde{X}_{ns}(t)) + \alpha_{in}^U + \lambda_\varepsilon^{s-t} \varepsilon_{ins}, \quad t \leq s \leq T \end{aligned}$$

$\rho_n = 0$   
 $\lambda_\varepsilon^{s-t} = 1$

$U'_i(\tilde{x}_{nt}) = V_i(\tilde{x}_{nt}) + \eta_i y_{n,t-1} + \alpha_{in}^U + \varepsilon_{int}, \quad t \leq T, \quad (56)$

• 例：Wooldridge(2005)：労働組合会員の継続性

• 効用

$U'(\tilde{x}_{nt}) = \beta_x x'_{nt} + c_t + \beta_0 + \eta y_{n,t-1} + \alpha_U y_{nt_b} + b_U^T x_n + \zeta_n^U + \varepsilon_{nt}. \quad (57)$

$x_{nt}$  : 結婚しているかどうか(binary)

$y_{nt}$  : 会員かどうか(binary)

$\varepsilon_{nt}$  : 誤差項は平均0、分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う

$\alpha_{in}^U = a_U y_{n,t_b} + b_U^T x_n + \zeta_{in}^U$ , where  $\zeta_{in}^U \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$

# 6. Links to existing models

## 6.2 Markov models

- その他の適用例：
  - 組織レベルの輸出入の決断(Muûls and Pisu, 2009)
  - 車の所有選択(Nolan, 2010)
  - マルチクラス問題...大学内のケータリング場所の選択(前の行動の場からの距離、朝食か昼食か、等を考慮) (Danalet et al, 2016)
- マルコフ仮定を緩和し、高次のラグ付き変数を許容したもの：
  - 直近10個の選択に重み付けを課した経路選択学習(Bogers et al, 2007)
- 序数モデルへの適用：
  - 自己測定健康状態の順序ロジットモデル(Contoyannis, 2004)

# 6. Links to existing models

## 6.3 Hidden Markov models

2通りに分類できる：

1. 効用関数の特定において、連続の自己回帰型潜在変数を含むモデル
2. 離散潜在クラスの有限値の間の遷移をマッピングするモデル

# 6. Links to existing models

## 6.3 Hidden Markov models

### 1. 効用関数の特定において、連続の自己回帰型潜在変数を含むモデル

- 例： Heiss(2008)：自己申告の健康診断に関するモデル
  - 潜在的な連続agent effectsは過去の価値に基づき時間変化→**隠れマルコフモデル**

$$U'_i(\tilde{x}_{nt}) = V_i(\tilde{x}_{nt}) + \eta_i y_{n,t-1} + \alpha_{in}^u + \varepsilon_{int}, t \leq T, \quad (56)$$

- agent effects  $\alpha_{int}^u$  は確率密度関数  $f_{\alpha_i^u}(\alpha_{int}^u | \tilde{x}_{nt}, \alpha_{in,t-1}^u)$  に従って時間変化：  $\alpha_{int}^u = \kappa \alpha_{in,t-1}^u + \varepsilon_{int}^\alpha$  (58)  
( $\kappa$  はデータから推定される修正パラメタ、 $\varepsilon_{int}^\alpha$  は正規分布)
- 過去の選択が効用に影響しない： $\eta_i = 0 \forall i$

$$U'(\tilde{x}_{nt}) = V(\tilde{x}_{nt}) + \kappa \alpha_{n,t-1}^u + \varepsilon'_{nt}, t \leq T. \quad (59)$$

# 6. Links to existing models

## 6.3 Hidden Markov models

### 2. 離散潜在クラスの有限値の間の遷移をマッピングするモデル

- 例：Netzer et al(2008)：同窓会への寄付に関するモデル
  - 出身校との潜在的な関係を2~4の状態に分類。関係は時間的に変化して良いものとする
- 例：Xiong et al(2015)：5つの交通モードから選択するモデル
  - 10年分のパネルデータ
  - 2つの潜在的な選好をスイッチする
- 例：Xiong et al(2018)：動的車所有モデル
  - マルコフ仮定を緩和し、高次のラグ付き変数を許容：  
2次(t-2)と3次(t-3)のラグ付き変数が、2or3つの潜在クラスを持つ1次モデルと比較される
  - → 2次のラグ付変数が最小のベイズ情報量基準(BIC)

\*ベイズ情報量基準：回帰モデルが多くの項を含みすぎることにペナルティを課す基準。(Wikipedia)

# 7. Conclusion

- 動的選択モデルは2通りに分類できる：
  1. forward-looking models(先を見据えた計画)  
(←ベルマンの最適性原理) (dependent on **the choices**)
  2. habitual behaviour and learning models(習慣行動・学習モデル)  
(←マルコフモデル) (dependent on **their values**)
  
- 論文の意義：実用の幅を拡張
  - 1と2を1つの一般的なフレームワークの下に統合
  - 将来説明変数と習慣行動・学習モデルにおけるマルコフ仮定について議論
  - 効用関数と将来説明変数の予測の両者にagent effectsを内包
  - 効用関数と将来説明変数の予測の両者における分散拡大を誤差項にて説明