

2024/06/20  
理論談話会 #13

# **Bottleneck congestion and distribution of work start times: The economics of staggered work hours revisited**

---

Yuki Takayama

Transportation Research Part B: Methodological

Volume 81, Part 3, November 2015, Pages 830-847

M1 手代木祐可子

# Abstract

## 時差出勤の効果について / Effects of **staggered working hours**

Henderson(1981)以降, 時差出勤の効果を検討した研究は多い

- 負の混雑外部性と正の生産外部性のトレードオフを考慮する始業時刻選択モデル

Work start time choice models considering the trade-off between negative congestion externalities and positive production externalities

## This study

✓ ボトルネックでの混雑を考慮 / Considers congestion in a bottleneck

✓ 始業時刻選択モデル: **ポテンシャルゲーム**の特性を利用 / utilizes the characteristics of **potential games**

- 均衡の一般特性 (一意性・安定性) をポテンシャルゲームを用いて理論的に分析

Theoretically analyzes the general properties (uniqueness and stability) of equilibrium using potential games

- ピグー政策を行った場合の均衡状態についての検証

Examines the equilibrium state under Pigouvian policies

# 1. Introduction

---

# Related literature

## ➤ Henderson(1981)

- すべての労働者：共通の住宅地→共通の中心業務地区（CBD）に単一の道路で通勤すると仮定

Assumes all workers commute from a common residential area to a common Central Business District (CBD) via a single road

- 労働者の生産性が時間によって変化する

Workers' productivity varies over time



Based on Akamatsu et al. (2015),

本研究では、**ボトルネックでの混雑**を考慮するモデルに**ポテンシャルゲーム**を適応する。

This study applies potential games to a model considering congestion in a bottleneck.

→均衡の特性(一意性/安定性)を特徴づけることを目指す / Aims to characterize the properties of equilibrium.

- ✓ Wilson(1992), Arnott et al.(2005)  
労働者の居住地選択+企業の異質性
- ✓ Mun and Yonekawa(2006)  
ボトルネックの渋滞を定式化，企業と労働者が固定/フレックスを選択  
→複数均衡の可能性ありだが均衡の安定性の検討は不十分
- ✓ Fosgerau and Small(2014)  
ボトルネックの渋滞+仕事と余暇を考慮した生産性効果  
⇔労働者が始業時刻を決定するという前提  
→全ての企業がフレックス
- ✓ Akamatsu et al. (2015)  
ポテンシャル関数のアプローチを適応  
→均衡の安定性や最適性を解析的に分析可能に

# The flow of this study

次の3つをモデル化する / Model the following three:

- 労働者の到着時刻選択 / Workers' arrival time choice
- 労働者の企業選択 / Workers' firm choice
- 企業の始業時刻選択 / Firms' work start time choice

## 短期で均衡する / Short-run equilibrium

労働者は、企業と始業時刻を所与とするもとで企業への到着時刻を選択する。  
Workers choose their arrival time at the firm given the firm and its work start time.

## 長期で均衡する / Long-run equilibrium

**ポテンシャルゲーム**のアプローチを利用 / Utilizes the **potential game approach**

→長期均衡状態がポテンシャルゲームのNash均衡状態とみなせる

Long-term equilibrium state can be regarded as the Nash equilibrium of a potential game

# What is Potential game?

## 集団ゲーム、ポテンシャルゲームと対称外部性

### ● $r$ 個の連続なプレイヤーの集団を持つ集団ゲーム

- 集団の集合:  $P = \{1, \dots, r\}$  ( $r \geq 1$ ), 集団 $p$ の大きさ:  $m^p$ ,  $p$ にとっての戦略集合:  $S^p = \{1, \dots, n^p\}$ , 純粋戦略の総数:  $n = \sum_p n^p$
- $p \in P$ の戦略分布集合:  $X^p = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^{n^p} : \sum_i x_i^p = m^p\}$ , 全体の戦略分布集合:  $X = \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^r) \in \mathbf{R}_+^n : \mathbf{x}^p \in X^p\}$
- 行動が $X$ 内の点で記述されるとき,  $\bar{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^n : m^p - \varepsilon \leq \sum_i x_i^p \leq m^p + \varepsilon \forall p \in P\}$  ( $\varepsilon$ は正の定数)上の利得を定義
  - $\bar{X}$ には各集団の大きさが $m^p$ から $\varepsilon$ 以内に収まるときに生じうる戦略集合が含まれている
  - 新規参入者の限界効果を議論するには有用だが,  $X$ 上で定義しても同様の結果が成り立つ
- 戦略 $i \in S^p$ の利得関数:  $F_i^p: \bar{X} \rightarrow \mathbf{R}$  (連続を仮定),  $p$ の利得関数 $F^p: \bar{X} \rightarrow \mathbf{R}^{n^p}$ , 全体の利得関数 $F: \bar{X} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 
  - $p$ における戦略の利得は $p$ の戦略分布自体に依存する

### ● 条件(P)が成立するとき, $F$ はポテンシャルゲームである

条件(P)

任意の $\mathbf{x} \in \bar{X}, i \in S^p, p \in P$ に対して,  $\frac{\partial f}{\partial x_i^p} = F_i^p(\mathbf{x})$ なる $C^1$ 級関数 $f: \bar{X} \rightarrow \mathbf{R}$ が存在する

- 勾配が利得関数に等しい連続で微分可能な関数(ポテンシャル関数) $f(\mathbf{x})$ が存在するということ

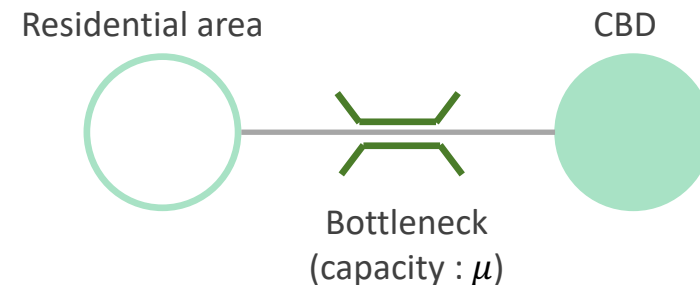
## 2. The model

---

# Assumptions

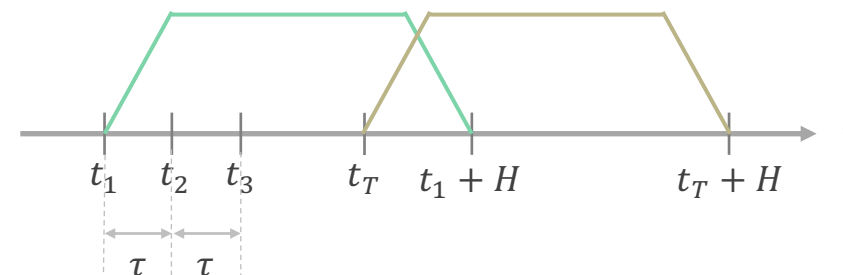
- CBD(central business district)と居住地が1つの道路で結ばれた都市 / A city where the CBD (central business district) and residential areas are connected by a single road.

- 容量 $\mu$ の単一のボトルネック / A single bottleneck with capacity  $\mu$ 
  - ボトルネックの地点への到着率が容量を超えると待ち行列が発生  
If the arrival rate at the bottleneck point exceeds the capacity, a queue forms.
  - Point queue(車両の物理的な長さは0)
  - FIFO(first in, first out : 先入先出法)



- 企業 / Firms
  - 各企業は始業時刻を $t_1 \sim t_T$ の中で選択する. ( $t_1 \sim t_T$ は間隔 $\tau$ )  
Each firm selects its work start time from  $t_1 \sim t_T$  (with intervals  $\tau$ )
  - 全企業において, 勤務時間は同一かつ固定で $H$   
Working hours are the same and fixed across all firms, denoted as  $H$
  - $t_T < t_1 + H$

始業時刻 $t_i$ の企業 = 企業  $i$  と呼ぶ  
A firm with a work start time  $t_i = \text{Firm } i$





# Behavior of workers

長期的

短期的

➤ 効用を最大化するように始業時刻 $t_i$ (= 企業 $i$ )とCBDの到着時刻 $t$ を選択する。

Choose Firm  $i$  and arrival time at the CBD  $t$  to maximize utility

始業時刻 $t_i$ で働く労働者(= 労働者 $i$ )の効用  $u_i(t)$  / Utility of worker  $i$  (= working at start time  $t_i$ )  $u_i(t)$

$$u_i(t) = w_i - c_i(t) \quad w_i : \text{企業}i\text{の賃金} / \text{Wage of Firm } i \quad c_i(t) : \text{通勤コスト} / \text{Commuting cost}$$

通勤コスト $c_i(t)$  / Commuting cost  $c_i(t)$

$$c_i(t) = q(t) + s(t - t_i) + c_f$$

$$c_f = 0 \quad s(x) \text{は微分可能, } s(0) = 0 \text{ と設定}$$

$q(t)$  : ボトルネックでの渋滞待ち時間 / Queue time

$s(t - t_i)$  : スケジュールコスト / Schedule cost

早くつけば負, 遅刻すると正

$c_f$  : 固定の旅行時間 / Schedule cost

## 短期的 Short-run

✓ 始業時刻 $t_i$ は決まっているものとしてCBDの到着時間 $t$ を選択

Considering the work start time  $t_i$  as fixed, choose the arrival time at the CBD  $t$ .

$$\min_t c_i(t) = q(t) + s(t - t_i)$$

## 長期的 Long-run

✓ 始業時間 $t_i$ つまり企業 $i$ を選択

Choose Firm  $i$

$$\max_i u_i = w_i - \bar{c}_i$$

$\bar{c}_i$  : 短期均衡における労働者 $i$ の通勤コスト  
the commuting cost for worker  $i$  in short-run equilibrium

# Behavior of firms

## □生産性 / Productivity

ある時点 $t$ での労働者一人当たりの生産性は、時点 $t$ において全企業で勤務している労働者の総数 $N(t)$ に比例する。  
 The productivity per worker at a certain time  $t$  is proportional to the total number of workers  $N(t)$  working across all firms at time  $t$ .

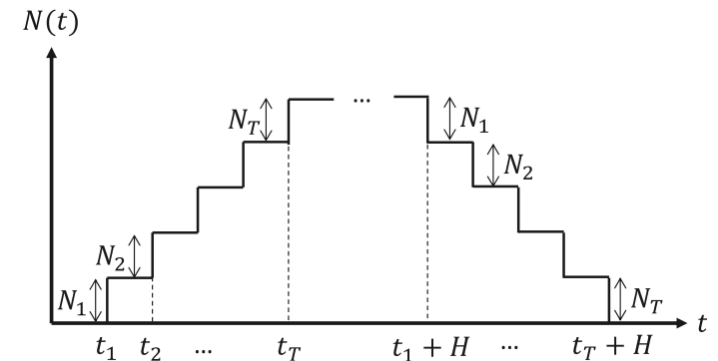
ある企業の時刻 $t$ での瞬間的生産量 $f(t)$  / Instantaneous production quantity  $f(t)$  for a certain firm at time  $t$

$$f(t) = \alpha N(t)$$

$\alpha$  : 正の定数 / Positive constant

$N_i$  : 企業  $i$  の総労働者数  
 Total number of workers for Firm  $i$

$$N(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^j N_k & \text{if } t \in [t_j, t_{j+1}) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T-1\}, \\ N & \text{if } t \in [t_T, t_1 + H), \\ \sum_{k=j+1}^T N_k & \text{if } t \in (t_j + H, t_{j+1} + H] \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T-1\}, \end{cases}$$



企業 $i$ の労働者1人当たりの1日の生産量 $F_i$  / Daily production quantity  $F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t) dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k$

- 企業は労働者1人あたりの利益を最大化するように始業時刻を選択する  
 Firms choose their work start times to maximize profit per worker.

$$\max_i \pi_i = F_i - w_i$$

$w_i$  : 企業 $i$ の賃金 / Wage of Firm  $i$

$\pi_i$  : 企業 $i$ の利益 / Profit of Firm  $i$

# Short-run equilibrium conditions

$$c_i(t) = q(t) + s(t - t_i)$$

## ➤ 短期的：労働者はCBDへの到着時間 $t$ を選択

- 企業は所与のもと選択するので、企業に雇用される労働者の数  $\mathbf{N} = (N_i)_{i \in I}$  は所与となる

短期均衡状態が満たす均衡条件は以下の3条件

$$\begin{cases} c_i^* - \{q(t) + s(t - t_i)\} = 0 & \text{if } n_i(t) > 0 \\ c_i^* - \{q(t) + s(t - t_i)\} \leq 0 & \text{if } n_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t, \forall i \in I,$$

$$\begin{cases} \mu - \sum_{k \in I} n_k(t) = 0 & \text{if } q(t) > 0 \\ \mu - \sum_{k \in I} n_k(t) \geq 0 & \text{if } q(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t,$$

$$\int n_i(t) dt = N_i \quad \forall i \in I,$$

$n_i(t)$ : 時刻  $t$  に CBD に到着する労働者  $i$  の数  
 $c_i^*$ : 労働者  $i$  の均衡通勤コスト



①②③より短期均衡状態での  $n_i(t), q(t), c_i^*$  が定まる



$n_i(t), q(t), c_i^*$  は  $\mathbf{N}$  の関数として書くことができる

## Wardropの第1原則と同じ考え方

### ① CBD到着時刻選択の無裁定条件

短期均衡状態ではどの労働者も自らのCBD到着時刻を変更するインセンティブを持たない

### ② ボトルネックの容量制約

時刻  $t$  でボトルネックに渋滞が発生する場合、ボトルネック流出者数は容量  $\mu$  に等しく、渋滞がないときの流出者数は容量  $\mu$  以下

### ③ フロー保存則

# Long-run equilibrium conditions

$$u_i(t) = w_i - c_i(t)$$
$$\pi_i = F_i - w_i$$

➤ 長期的：労働者は企業を選択，企業は始業時刻を選択

長期均衡状態が満たす均衡条件は以下の3条件

$$\begin{cases} u^* - \{w_i - c_i^*\} = 0 & \text{if } N_i > 0 \\ u^* - \{w_i - c_i^*\} \geq 0 & \text{if } N_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

①労働者の企業選択の均衡条件

各労働者が一方的に企業を変更するインセンティブがない

$$\begin{cases} \pi^* - \{F_i - w_i\} = 0 & \text{if } N_i > 0 \\ \pi^* - \{F_i - w_i\} \geq 0 & \text{if } N_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

②企業の始業時刻選択の均衡条件

企業*i*が労働者を雇用している場合，企業は均衡利益 $\pi^* = 0$ を得ることを意味し，そうでない場合は利益は0未満でなければならない

$$\sum_{k \in \mathcal{I}} N_k = N,$$

③労働者数の保存則

$u^*$ ：労働者の均衡効用

$\pi^*$ ：企業の均衡利潤 ← 本モデルでは完全競争化のため0となる

$$\begin{cases} u^* - \{F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N})\} = 0 & \text{if } N_i > 0 \\ u^* - \{F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N})\} \geq 0 & \text{if } N_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \dots \textcircled{4}$$

③④より長期均衡での $\mathbf{N}^*, u^*$ が得られる

# 3. Characteristics of Equilibrium

---

# Short-run equilibrium

## Proposition 1

- 短期均衡は一意に決定される
- 労働者は始業時刻と同じ順番でボトルネックに到着・ボトルネックから出発する  
→先着順に勤務開始するという法則が妥当である

Proof : Smith(1984), Daganzo(1985), Kuwahara(1990), Lindsey(2004)

## Lemma 1

短期均衡通勤コスト  $\mathbf{c}(\mathbf{N}) = (c_i^*(\mathbf{N}))_{i \in I}$  のヤコビ行列  $\nabla \mathbf{c}(\mathbf{N})$  は対称であり半正定値である

Proof : Appendix A.1.

半正定値行列( $A$ )  
任意の実ベクトル  $x$  に対して  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  が成立

# Long-run equilibrium -Potential game-

$$F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t)dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k$$

$$\sum_{k \in I} N_k = N,$$

$$\begin{cases} u^* - \{F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N})\} = 0 & \text{if } N_i > 0 \\ u^* - \{F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N})\} \geq 0 & \text{if } N_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in I,$$

集団ゲーム  $G (G = \{S, I, u\})$  とする  
 プレイヤーの集合  $S \equiv [0, N]$   
 戦略集合  $I \equiv \{1, 2, \dots, T\}$   
 利得関数  $u(\mathbf{N}) = (F_i(\mathbf{N}) - c_i^*(\mathbf{N}))_{i \in I}$

長期均衡はこのゲームのNash均衡となる

Monderer and Shapley(1996), Sandholm(2001)よりゲーム  $G$  がポテンシャルゲームとなるには、次の条件を満たす**連続微分可能な関数  $P$  (ポテンシャル関数)**が存在する必要がある

$$\frac{\partial P(\mathbf{N})}{\partial N_i} = u_i(\mathbf{N}) \quad \forall \mathbf{N} \in \Delta \equiv \left\{ \mathbf{N} \in \mathbb{R}_+^T \mid \sum_{k \in I} N_k = N \right\}, \quad \forall i \in I,$$

$u(\mathbf{N})$  が連続微分可能の場合

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u_i(\mathbf{N})}{\partial N_j} = \frac{\partial u_j(\mathbf{N})}{\partial N_i} \quad \forall \mathbf{N} \in \Delta, \forall i, j \in I. \quad (\text{Sandholm(2001)より})$$

“externality symmetry”

$$F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t)dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k \quad \text{より}$$

$$u(\mathbf{N}) = F(\mathbf{N}) - c(\mathbf{N}) = \alpha \{HE - \tau D\} \mathbf{N} - c(\mathbf{N})$$

$E$ : 全要素が1の  $T \times T$  行列

$D$ :  $(i, j)$  が  $|i - j|$  の  $T \times T$  の対称テプリッツ行列

Lemma 1

$u(\mathbf{N})$  のヤコビ行列  $\nabla u(\mathbf{N})$  は対称

Externality symmetry が成り立ち、ゲーム  $G$  はポテンシャルゲームである！

# Long-run equilibrium -Potential game-

$$F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t)dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k$$

## Proposition 2

ゲーム  $G$  は次のポテンシャル関数を持つポテンシャルゲームである

$$P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N})$$

$$\nabla P_1(\mathbf{N}) = \mathbf{F}(\mathbf{N}), \quad \nabla P_2(\mathbf{N}) = \mathbf{c}(\mathbf{N})$$

Proof : Appendix A.2.

$P_1(\mathbf{N})$  : 生産性効果による正の外部性を表す凸関数

$P_2(\mathbf{N})$  : 混雑による負の外部性を表す凸関数

$$F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t)dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k \quad \text{より積分して} \quad P_1 = \frac{1}{2} \sum_{k \in I} F_k(\mathbf{N}) N_k$$

ポテンシャルゲームの均衡はポテンシャル関数の最大化問題を解けばいい

$$\max_{\mathbf{N}} P(\mathbf{N}) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k \in I} N_k = N, \quad N_i \geq 0 \quad \forall i \in I. \quad \dots \star$$

ゲーム  $G$  の均衡集合 =  $\star$  の KKT 点の集合



# Long-run equilibrium -Uniqueness-

$$P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N})$$

$$\nabla P_1(\mathbf{N}) = \mathbf{F}(\mathbf{N}), \quad \nabla P_2(\mathbf{N}) = \mathbf{c}(\mathbf{N})$$

$$\max_{\mathbf{N}} P(\mathbf{N}) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k \in \mathcal{I}} N_k = N, N_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad \dots \star$$

★のKKT点の集合が長期均衡

→ポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ の形状による

- $P(\mathbf{N})$ が単峰なら均衡は一意，多峰なら一意ではない

$P_1(\mathbf{N}), P_2(\mathbf{N})$ の凸性から $P(\mathbf{N})$ は一般的に単峰ではない

**Lemma 2** 長期均衡は一般に一意ではない

# Long-run equilibrium -Stability-

## 長期均衡の局所的な漸近安定性

均衡状態への調整ダイナミクス  $\dot{N} = V(N)$  を定義

特に次の条件を満たす *admissible dynamics* を考える.

- $V(N) \cdot u(N) > 0$  whenever  $V \neq 0$ ,  
positive correlation : 調整ダイナミクスと利得関数が正の相関をもつ
- $V(N) = 0$  の場合,  $N$  はゲーム  $G$  の Nash 均衡  
調整ダイナミクスの定常状態がゲーム  $G$  の Nash 均衡と一致する

*admissible dynamics* : best response dynamic, Brown-von Neumann-Nash dynamic, projection dynamic を含む一般的なダイナミクス

ポテンシャルゲームの均衡

→ポテンシャル関数を局所的に最大化する場合 (Nash 均衡) は, *admissible dynamics* の元で漸近的に安定. 局所的に最小化する場合は不安定 (Sandholm(2001)).

均衡状態の安定性はポテンシャル関数の形状から確認することができる!

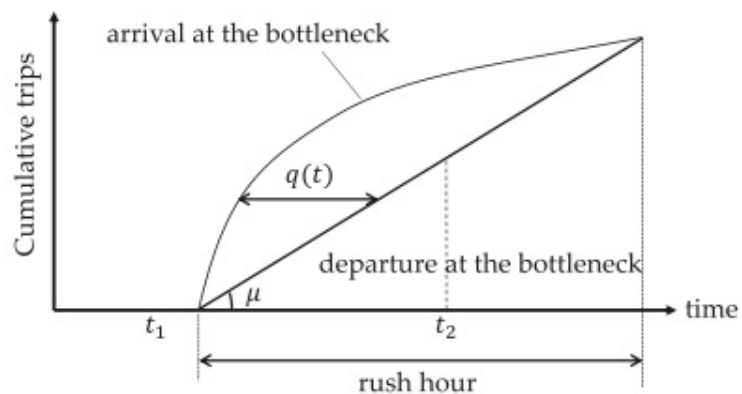
漸近安定性

- 定常状態からずれても, 時間の経過とともに元の状態に戻ることができること

$\dot{N}$  :  $N$  の変化速度

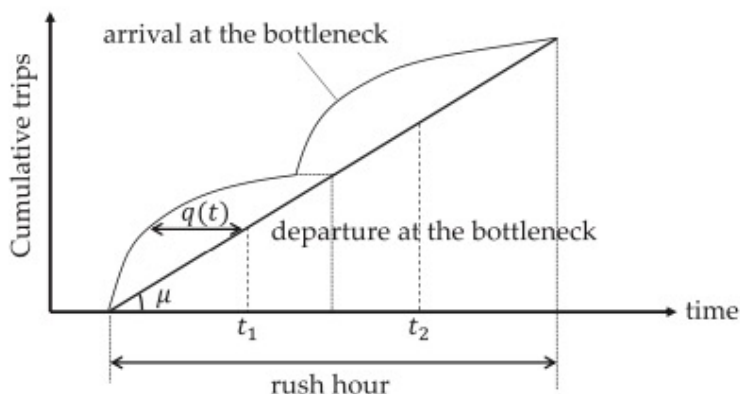
# A simple example

- $T = 2$ (始業時刻が2種類),  $s(x) = \beta x^2$  ( $\beta$ :正の定数項)
- FIFOを満たすために  $\beta N \leq \mu$  とする



(a) Pattern 1

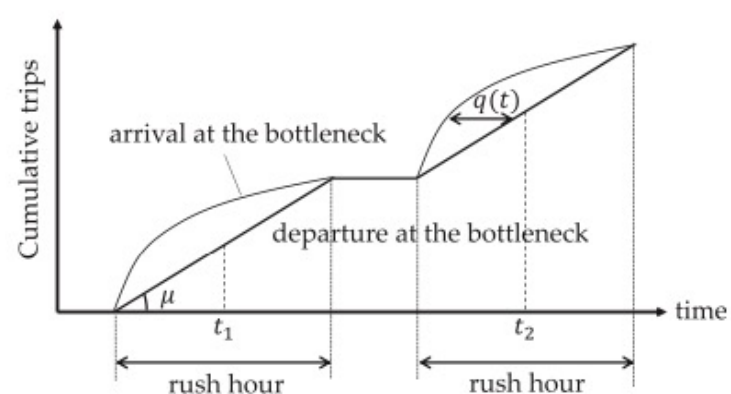
全ての企業で始業時刻が同一



(b) Pattern 2.1

時差出勤が実現  
渋滞が発生する時間帯(rush hour)が1区間

$$\tau \leq \frac{N}{2\mu} \text{ の場合成立}$$



(c) Pattern 2.2

時差出勤が実現  
渋滞が発生する時間帯(rush hour)が2区間

$$\tau > \frac{N}{2\mu} \text{ の場合成立}$$

# A simple example

$$P(N_1) = P_1(N_1) - P_2(N_1),$$

$$P_1(N_1) = \alpha \left\{ \frac{HN^2}{2} - \tau N_1(N - N_1) \right\},$$

$$P_2(N_1) = \begin{cases} \frac{\beta N^3}{12\mu^2} + \beta\tau \left( \frac{\tau}{N} - \frac{1}{\mu} \right) N_1(N - N_1) & \text{if } \tau \leq \frac{N}{2\mu}, \\ \frac{\beta N}{12\mu^2} \left\{ N^2 - 3N_1(N - N_1) \right\} & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}. \end{cases}$$

## 安定性

ポテンシャル関数を局所的に最大化する場合は、*admissible dynamics*の元で漸近的に安定な長期均衡( $N^s$ )。局所的に最小化する場合は不安定な長期均衡( $N^u$ )。

ポテンシャル関数 $P(N_1)$ を微分して局所最大or最小を考える

$$\begin{cases} N_1^s = 0, N, N_1^u = \frac{N}{2} & \text{if } \left\{ \tau > \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau > N \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}, \\ N_1^s = \frac{N}{2} & \text{if } \left\{ \tau \leq \frac{\beta N}{4\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau \leq N \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}. \end{cases}$$

$\tau, \mu$ が小さいほど始業時刻に均等に労働者が分かれる時差出勤の状態が安定均衡状態として実現しやすい

Proposition2より

$$P(N) = P_1(N) - P_2(N)$$

$$\nabla P_1(N) = F(N), \quad \nabla P_2(N) = c(N)$$

$$\leftarrow F_i = \int_{t_i}^{t_i+H} f(t) dt = \alpha \sum_{k \in I} \{H - \tau|i - k|\} N_k \text{ を積分}$$

$$c_1^*(N_1) = \begin{cases} \beta \left( \frac{N}{2\mu} - \tau \frac{N-N_1}{N} \right)^2 & \text{if } \tau \leq \frac{N}{2\mu}, \\ \frac{\beta}{4\mu^2} N_1^2 & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}, \end{cases} \quad c_2^*(N_1) = \begin{cases} \beta \left( \frac{N}{2\mu} - \tau \frac{N_1}{N} \right)^2 & \text{if } \tau \leq \frac{N}{2\mu}, \\ \frac{\beta}{4\mu^2} (N - N_1)^2 & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}. \end{cases}$$

を所与(おそらく)とする  $\rightarrow$  積分

# A simple example

ボトルネックの容量を拡張する場合  
( $\mu \rightarrow 1.5\mu$ )

- pattern2.2  $\rightarrow$  pattern1 に変化

$$\frac{\beta N}{9\alpha} \frac{1}{\mu^2} < \tau < \frac{\beta N}{4\alpha} \frac{1}{\mu^2} \quad \text{and} \quad \tau \geq \frac{N}{2\mu}.$$

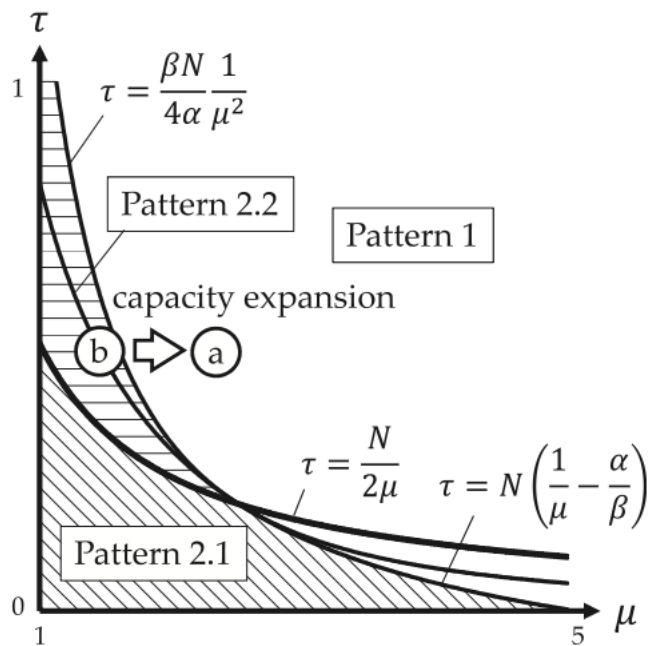


Fig. 4. Parameters and the stable equilibrium ( $N = 1.0, \alpha = 0.2, \beta = 1.0$ ).

総待ち時間コスト  $Q^b$  (before),  $Q^a$  (after)

$$\begin{aligned} Q^b &= \int_{t_1^f}^{t_1^i} n_1(t) q(t) dt + \int_{t_2^f}^{t_2^i} n_2(t) q(t) dt = \mu \int_{t_1^f}^{t_1^i} c_1^* - s(t - t_1) dt + \mu \int_{t_2^f}^{t_2^i} c_2^* - s(t - t_2) dt \\ &= \{N_1 c_1^* + N_2 c_2^*\} - \frac{2\mu\beta}{3} \left\{ \left(\frac{N_1}{2\mu}\right)^3 + \left(\frac{N - N_1}{2\mu}\right)^3 \right\} = \frac{\beta N^3}{24\mu^2}, \end{aligned}$$

$$Q^a = \int_{t_i^f}^{t_i^i} n_i(t) q(t) dt = 1.5\mu \int_{t_i^f}^{t_i^i} c_i^* - s(t - t_i) dt = N c_i^* - \mu\beta \left(\frac{N}{3\mu}\right)^3 = \frac{2\beta N^3}{27\mu^2},$$

$Q^b < Q^a$  となり、ボトルネックの容量拡張が混雑を悪化させている

## 4. Social optimum

---

# Social optimum

- Stable equilibrium

各労働者がそれぞれ到着時刻や企業を決める，企業はそれぞれ始業時刻を決める結果の状態

- First-best optimum

社会的最適状態(労働者の総効用最大の状態)→必ず渋滞が完全に解消される場合

- Second-best optimum

政策立案者が労働者の短期的な行動をコントロールできない場合の社会的最適状態．つまりボトルネックでの渋滞を取り除くことができない場合の最適解．

# First-best optimum

$$c_i(t) = q(t) + s(t - t_i)$$

$$u_i(t) = w_i - c_i(t)$$

- 社会的最適状態：労働者の総効用最大化の場合と定義

$$\max_{\{n_i(t)\}, \mathbf{N}} W(\{n_i(t)\}, \mathbf{N}) = W_1(\mathbf{N}) - W_2(\{n_i(t)\})$$

$$\text{s.t. } \mu - \sum_{k \in \mathcal{I}} n_k(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \int n_i(t) dt = N_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad n_i(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\mathbf{N} \in \Delta,$$

$n_i(t)$  : 時刻  $t$  に CBD に到着する労働者  $i$  の数

$W_1$  : 労働者の総賃金

$W_2$  : 総通勤コスト

$$W_1(\mathbf{N}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} F_k(\mathbf{N}) N_k = 2P_1(\mathbf{N}),$$

生産の正の外部性

$$W_2(\{n_i(t)\}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \int n_k(t) \{q(t) + s(t - t_k)\} dt.$$

混雑の負の外部性

ボトルネックでの待ち行列は社会的最適状態では0になる(Vickrey (1969) など)

$$\blacktriangleright \tilde{W}_2(\{n_i(t)\}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \int n_k(t) s(t - t_k) dt,$$

短期では  $F_k(\mathbf{N}), N_k$  は固定なので

$$\min_{\{n_i(t)\}} \tilde{W}_2(\{n_i(t)\}) \quad \text{s.t.} \quad \mu - \sum_{k \in \mathcal{I}} n_k(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \int n_i(t) dt = N_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad n_i(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

短期均衡での  $n_i(t)$  を得る



# First-best optimum

**Lemma 4**  $Z(\mathbf{N}) = \min_{\{n_i(t)\}} \tilde{W}_2(\{n_i(t)\})$  s.t.  $\mu - \sum_{k \in \mathcal{I}} n_k(t) \geq 0 \forall t, \int n_i(t) dt = N_i \forall i \in \mathcal{I}, n_i(t) \geq 0 \forall t, \forall i \in \mathcal{I},$

$$\nabla Z(\mathbf{N}) = \mathbf{c}(\mathbf{N})$$

Proof. Appendix A.4.

$\nabla P_2(\mathbf{N}) = \mathbf{c}(\mathbf{N})$  (Proposition 2) より  $P_2(\mathbf{N}) = Z(\mathbf{N})$  となる

**Lemma 5** 社会的最適状態における始業時刻の分布  $\mathbf{N}^0$  は次の式を解くことで得られる

$$\max_{\mathbf{N}} P(\mathbf{N}) + P_1(\mathbf{N}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{N} \in \Delta.$$



生産性効果の影響が強まるので、同じ時間帯の労働者を増やす方向に流れる

$$P(\mathbf{N}) = P_1(\mathbf{N}) - P_2(\mathbf{N})$$
$$\max_{\{n_i(t)\}, \mathbf{N}} W(\{n_i(t)\}, \mathbf{N}) = \underbrace{W_1(\mathbf{N})}_{=2P_1(\mathbf{N})} - \underbrace{\min_{\{n_i(t)\}} W_2(\{n_i(t)\})}_{=P_2(\mathbf{N})}$$

短期均衡

## Proposition 4

社会的最適状態での始業時刻分布  $\mathbf{N}^0$  は、安定均衡状態での始業時刻  $\mathbf{N}^s$  よりも集中している

# Second-best optimum

$$c_i(t) = q(t) + s(t - t_i)$$

- 第二最適：政策立案者が労働者の短期的な行動を制御できない場合  
(理想的な短期均衡が成立していない状態：渋滞を排除できない)

第二最適における始業時刻の分布 $\widehat{N}_0$ は以下の解で定義される

$$\max_{\mathbf{N}} \widehat{W}(\mathbf{N}) = \widehat{W}_1(\mathbf{N}) - \widehat{W}_2(\mathbf{N}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{N} \in \Delta,$$

$\widehat{W}_1$ : 労働者の総賃金  
 $\widehat{W}_2$ : 総通勤コスト

$$\widehat{W}_1(\mathbf{N}) = W_1(\mathbf{N}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} F_k(\mathbf{N}) N_k,$$
$$\widehat{W}_2(\mathbf{N}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} c_k^*(\mathbf{N}) N_k.$$

## 第二最適と安定均衡の比較

$$\nabla^2 \widehat{W}(\mathbf{N}) = 2\nabla^2 P(\mathbf{N}) - \sum_{k \in \mathcal{I}} N_k \nabla^2 c_k^*(\mathbf{N}),$$

### Proposition 5

- $\sum_{k \in \mathcal{I}} N_k \nabla^2 c_k^*(\mathbf{N})$ が正定値：第二最適の始業時刻の分布は安定均衡よりも集中（クラスター化）
- $\sum_{k \in \mathcal{I}} N_k \nabla^2 c_k^*(\mathbf{N})$ が負定値：第二最適の始業時刻の分布は安定均衡よりも分散

$s(x)$ が上に凸なので、 $c_k^*(\mathbf{N})$ は負定値

一般的には第二最適における始業時刻の分布 $\widehat{N}_0$ は安定均衡における始業時刻の分布 $\mathbf{N}^s$ より分散する  
→分散させる政策の有効性が示唆された

# Pigouvian policies : First-best optimum

社会的最適状態のためのピグー政策 $p$

$$p = F(N^0) = \alpha\{HE - \tau D\}N^0$$

ゲーム $G^p = \{S, I, u^p\}$  ( $u^p(N) = u(N) + p$ ) とみなせる

ポテンシャル関数 $P^p(N) : P^p(N) = P(N) + p \cdot N$

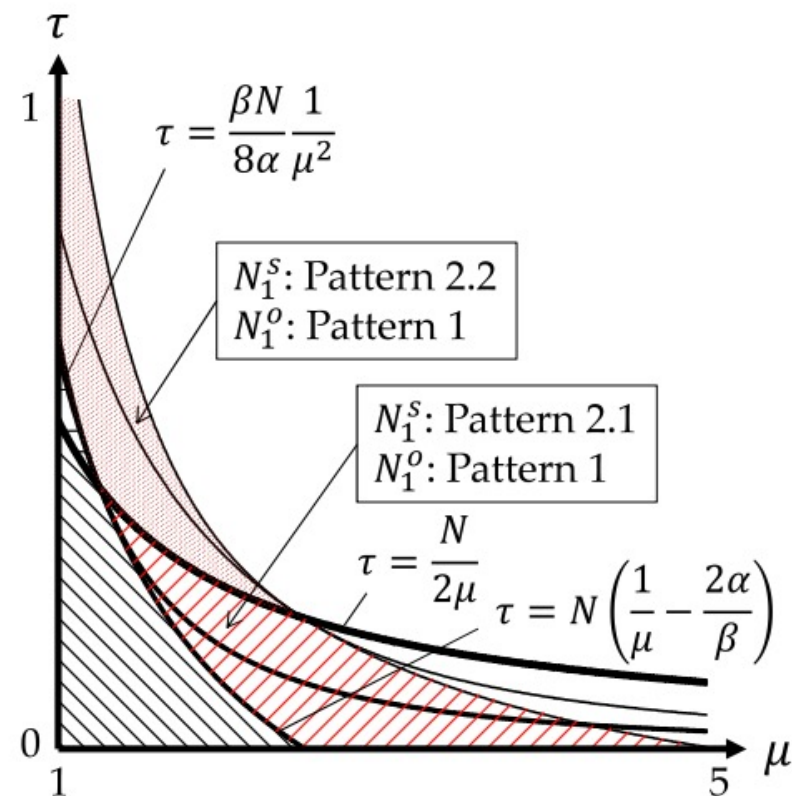
$\nabla p^p(N)$ は負定値より、ピグー税政策のもとでは社会的最適状態 $N^0$ は安定均衡となる。 (Proposition 6)

3章の数値実験で確認

$$W(N_1) = 2P_1(N_1) - P_2(N_1),$$

$$\begin{cases} N_1^0 = 0, N & \text{if } \left\{ \tau > \frac{\beta N}{8\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau > N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}, \\ N_1^0 = \frac{N}{2} & \text{if } \left\{ \tau \leq \frac{\beta N}{8\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau \leq N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}, \end{cases}$$

始業時刻の分布がクラスター化  
(Proposition 4を満たす)



(a) Pigouvian first-best policy

# Pigouvian policies : Second-best optimum

第二最適状態のためのピグー政策 $\hat{P}$

$$\hat{p} = \frac{1}{2} \{c(\hat{N}^0) - \nabla c(\hat{N}^0) \hat{N}^0\}$$

ゲーム $\hat{G}^p = \{S, I, \hat{u}^p\}$  ( $\hat{u}^p(N) = u(N) + \hat{p}$ ) とみなせる

ポテンシャル関数 $\hat{P}^p(N) : \hat{P}^p(N) = P(N) + \hat{p} \cdot N$

## Proposition 7

ピグー政策 $\hat{P}$ のもとで、次の条件を満たす場合にのみ第二最適状態の均衡 $\hat{N}^0$ は安定

$$(\hat{N} - \hat{N}^0)^\top \{ \nabla^2 \hat{W}(\hat{N}^0) \} (\hat{N} - \hat{N}^0) < (\hat{N} - \hat{N}^0)^\top \left\{ - \sum_{k \in I} \hat{N}_k^0 \nabla^2 c_k^*(\hat{N}^0) \right\} (\hat{N} - \hat{N}^0) \quad \forall \hat{N} \in \Delta \setminus \{ \hat{N}^0 \};$$

# Pigouvian policies : Second-best optimum

3章の数値実験を用いる

$$\hat{W}(N_1) = 2P_1(N_1) - \hat{P}_2(N_1),$$

$$\hat{P}_2(N_1) = \begin{cases} \frac{\beta N}{4\mu^2} \{N^2 - 3N_1(N - N_1)\} & \text{if } \tau > \frac{N}{2\mu}, \\ \frac{\beta N^3}{4\mu^2} - \frac{2\beta\tau}{N} \left(\frac{N}{\mu} - \frac{\tau}{2}\right) N_1(N - N_1) & \text{if } \tau \leq \frac{N}{2\mu}. \end{cases}$$

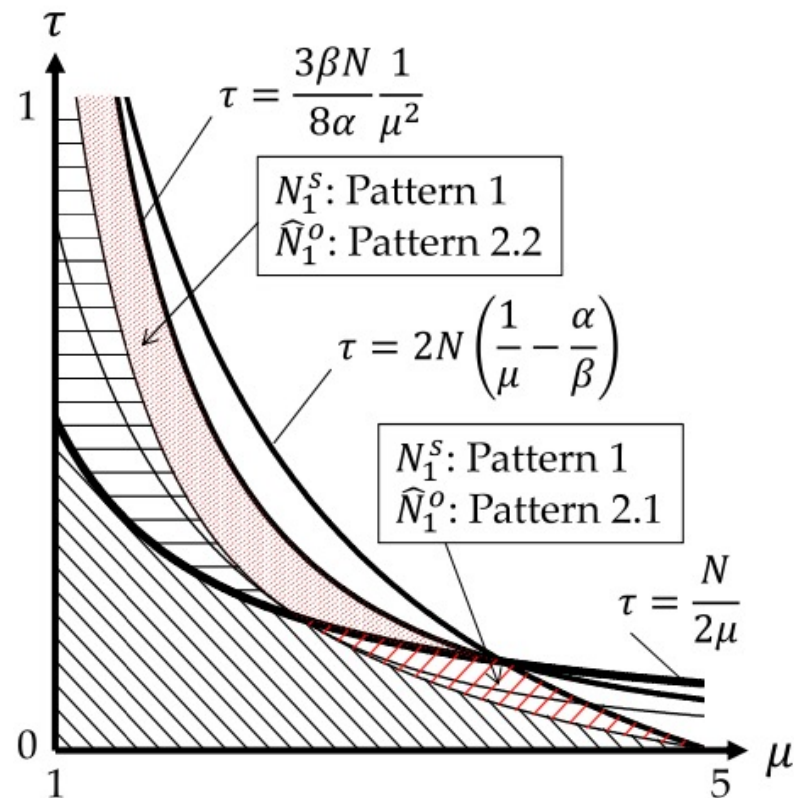


$$\begin{cases} \hat{N}_1^o = 0, N & \text{if } \left\{ \tau > \frac{3\beta N}{8\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau > 2N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}, \\ \hat{N}_1^o = \frac{N}{2} & \text{if } \left\{ \tau \leq \frac{3\beta N}{8\alpha\mu^2} \text{ and } \tau > \frac{N}{2\mu} \right\} \text{ or } \left\{ \tau \leq 2N\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \text{ and } \tau \leq \frac{N}{2\mu} \right\}. \end{cases}$$

$\tau$ によっては  $\hat{N}_1^o = N_1^u$  (不安定な均衡) となる

→第二最適状態の均衡解は不安定になる場合がある

始業時刻の分布が分散している  
(Proposition 5を満たす)



(b) Pigouvian second-best policy

# Conclusions

## 1.2.3章

### ボトルネックでの渋滞を考慮する始業時刻選択モデル + ポテンシャルゲームを利用した解法の提案

- 始業時刻の均衡分布が一意ではない
- 均衡の安定性はポテンシャル関数の形状からわかる
- ボトルネックの容量拡大が混雑を悪化させる可能性がある

## 4章

### ピグー政策の効果の確認

- ボトルネックでの渋滞を排除できない場合、ピグー政策(税/補助金)によって最適な状態に持っていくことができない場合がある

## 展望

- 始業時刻選択以外のモデルにも適応できる：Arnott(1998)のような場所選択モデルなど

# 所感

- 2年連続でポテンシャルゲームの論文を読んだので、3章の均衡までは結構理解できたと思う。
- 4章での均衡と最適の違いは相変わらず苦手で難しかった。