Introduction to Configuration

Nishimura, N. (2018). Algorithms, Vol.11(4), 52.

2024/7/20
BinN Lab M1
Shogo Hiramatsu

Abstract / Usefulness / Reliability

Abstract

- ある配置解から別の解への遷移について、解空間を「遷移グラフ」として導入した上で、遷移グラフの接続性など構造的な観点やアルゴリズムの観点からこれまでの研究成果をまとめた
- About reconfiguration of one solution to another. She represented the solution space as a reconfiguration graph and summarize the research so far from both structural points and algorithmic ones.

Usefulness

- これまでの遷移に関する研究について網羅的であり、参照しやすい
- Comprehensive so easy to look up the research about reconfiguration

Reliability

- 数多く事例の参照
- Plenty of research referred

Outline

1. Introduction
2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs
3. Tools for Proving the Complexity of Reachability
4. Analysis Using Graph Classes for INDEPENDENT SET
5. Parameterized Complexity (Independent Set and Vertex Cover)
6. Connectivity and Diameter for k-COLORING
7. Other Structural Problems
8. Shortest Transformation
9. Labels and Colors on Tokens
10. Further Research Directions

One of the tools

Not sliding puzzles

組合せ遷移

「状態空間上での遷り変り」を数理モデル化・解析するアルゴリズム理論

- パズル（15パズルなど）
- ロボットの動きの計画
- 電力網の供給経路の切り替え
  - できるだけ少ない切り替えで目標状態へ
  - その途中で停電を起こしてはいけない

Combinatorial Reconfiguration

組合せ　遷移

Introduction to Reconfiguration

1. Introduction

遷移 / Reconfiguration

transformation between states or configurations

状態・構成間の変換

15パズル / 15-puzzle

空白部分を利用して駒を動かし、1から15までの数字が並べられた状態（目標盤面）を作り出すゲーム

- 元問題 source problem
- 元問題のインスタンス
  instance of the source problem
- 実行可能解
  Definition of feasible solution
- 実行可能解の隣接関係
  Definition of adjacency of feasible solutions

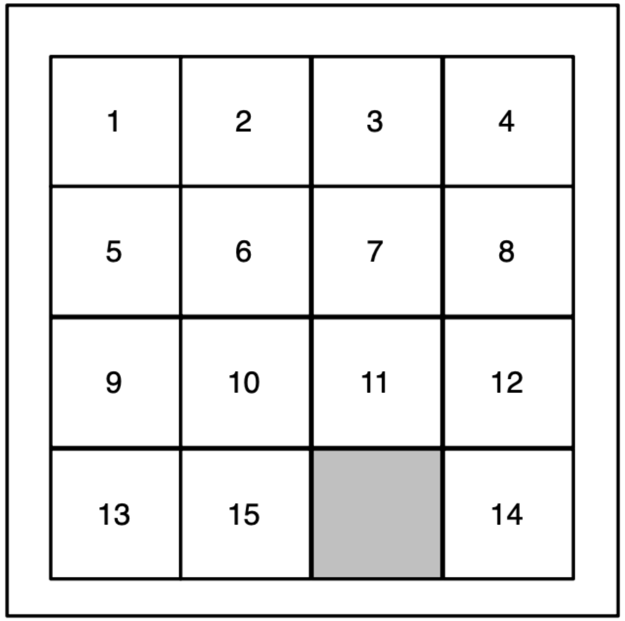
遷移のフレームワークで解く問題は様々

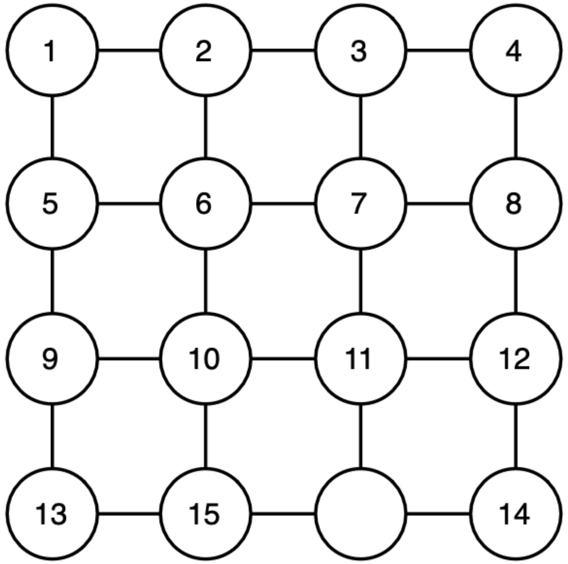
- 到達可能性 reachability
- 接続性 connectivity
- …

2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

Sliding-block puzzles (15-puzzle)

- 実行可能解：タイルの各配置
  feasible solution: each arrangement of the tiles
- 遷移のステップ：タイルを1枚移動させること
  reconfiguration step:
  movement of a single tile into an adjacent hole





View as a graph problem

- 実行可能解：4*4の格子グラフの頂点15個に（数字で）ラベル付けされたトークンの配置
  feasible solution: Placement of distinctly labeled tokens
- 遷移のステップ：トークンを隣接している頂点から空白の頂点へと移動すること
  reconfiguration step:
  moving a token to the uncovered vertex from one of its neighbors

2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

到達可能性 reachability

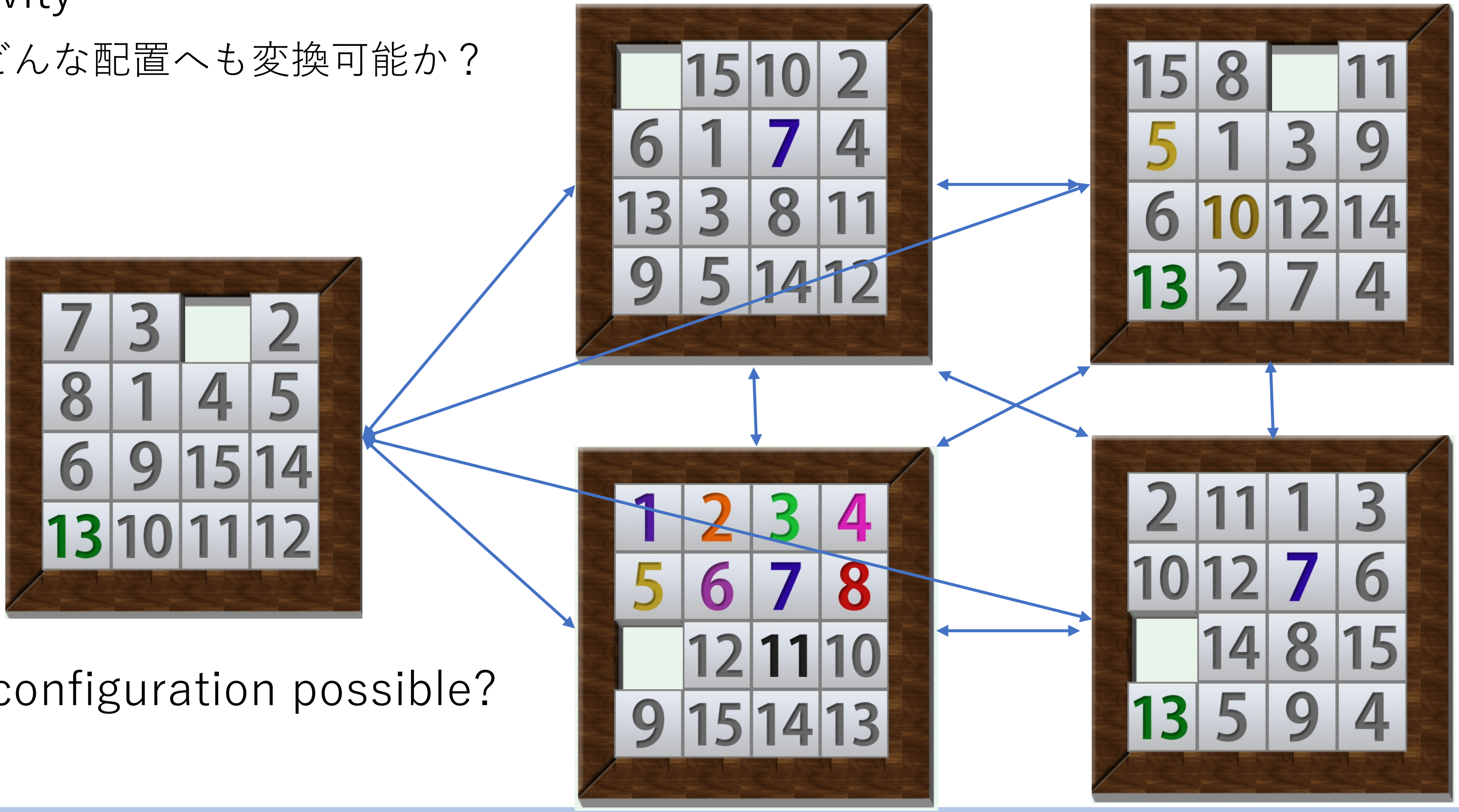
ある配置からある配置へと変換可能か？

Possible?

2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

接続性 connectivity

どんな配置からどんな配置へも変換可能か？

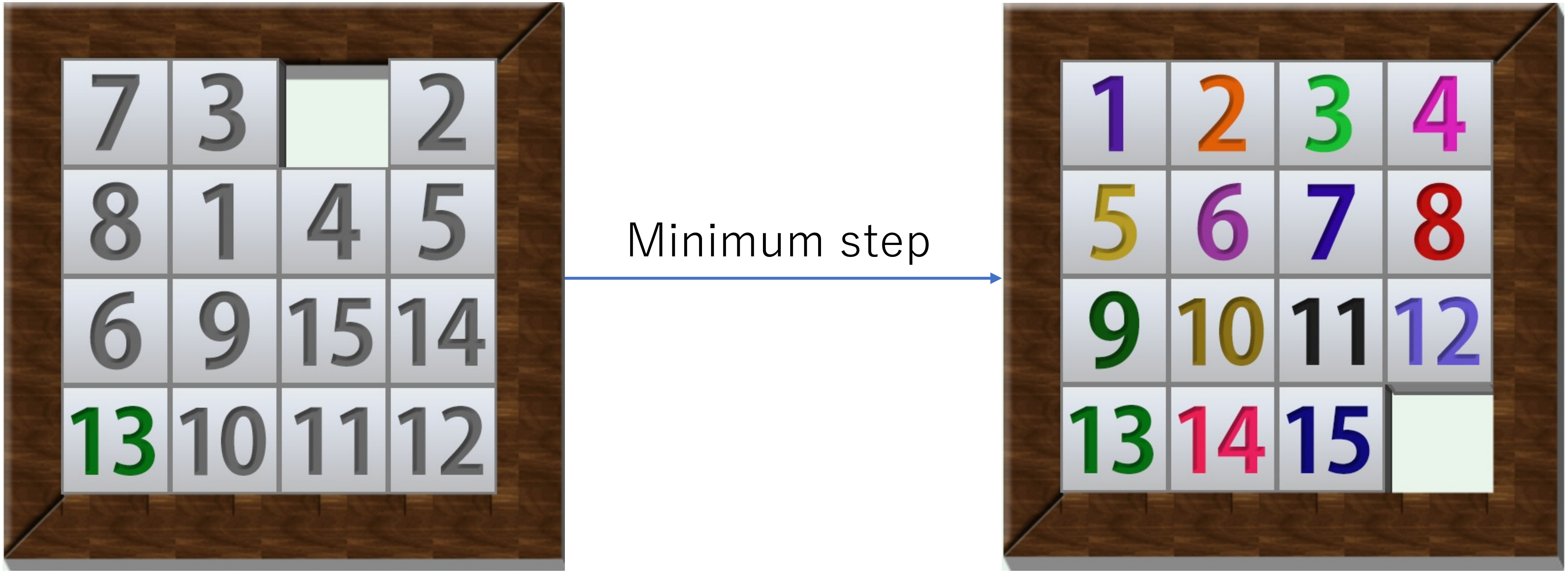


Any reconfiguration possible?
(No)

2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

最短変換 shortest transformation

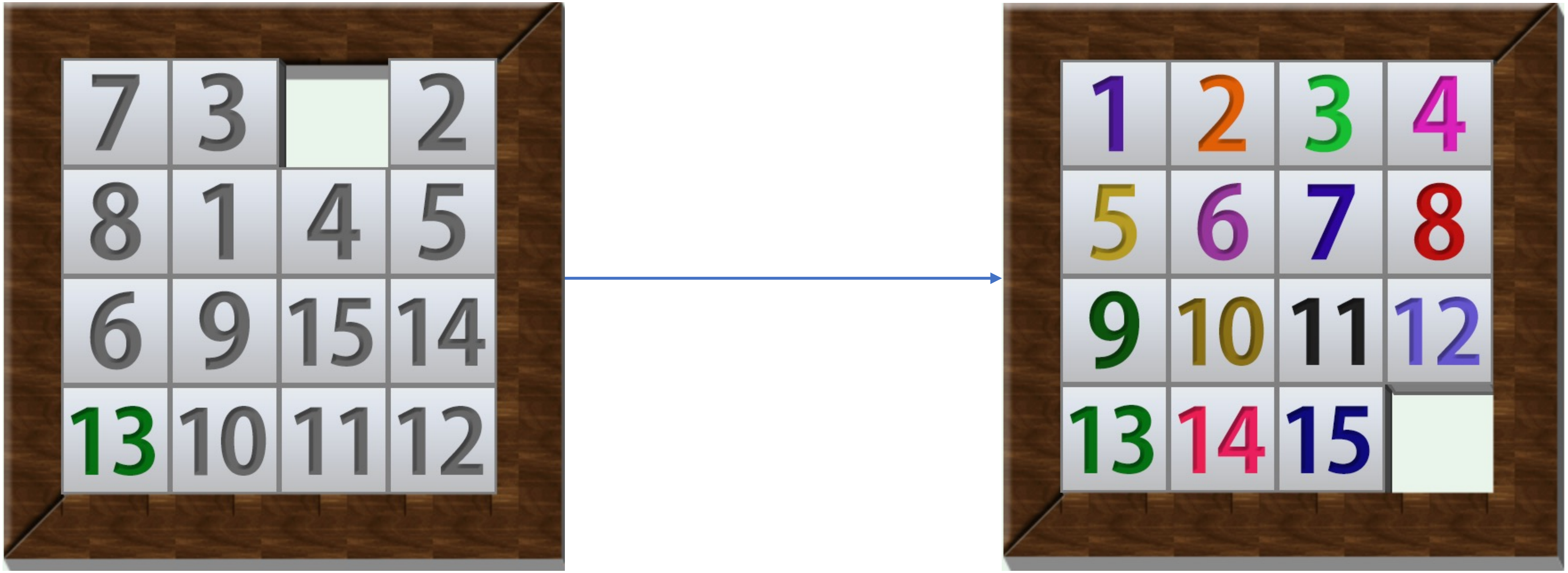
到達可能な場合、最短のステップでの遷移は？



2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

境界つき遷移 bounded reconfiguration

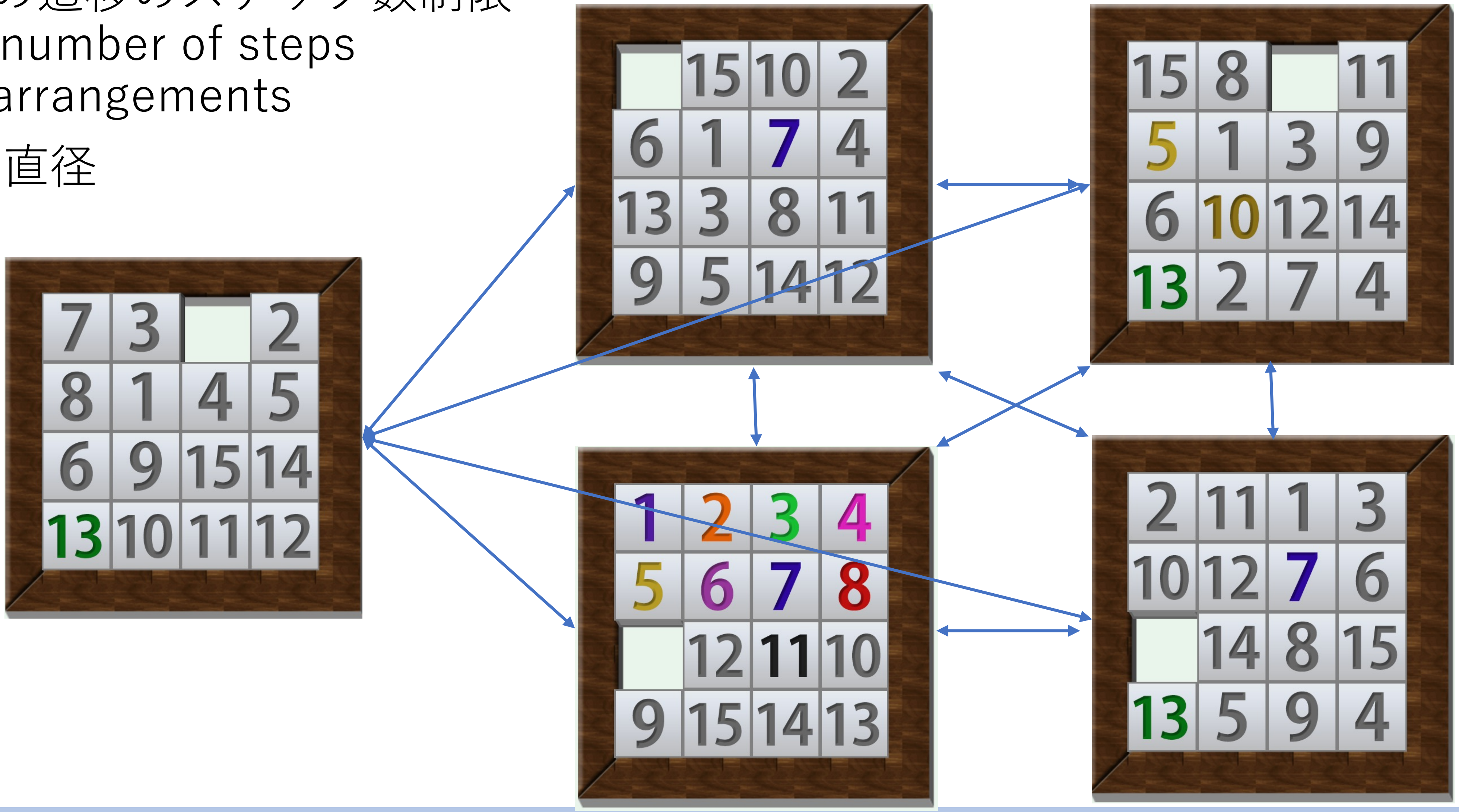
　ある配置からある配置へと一定ステップ以内で変換可能か？



2. Specifying and Analyzing Reconfiguration Graphs

任意のペア間での遷移のステップ数制限
a bound on the number of steps
for any pair of arrangements

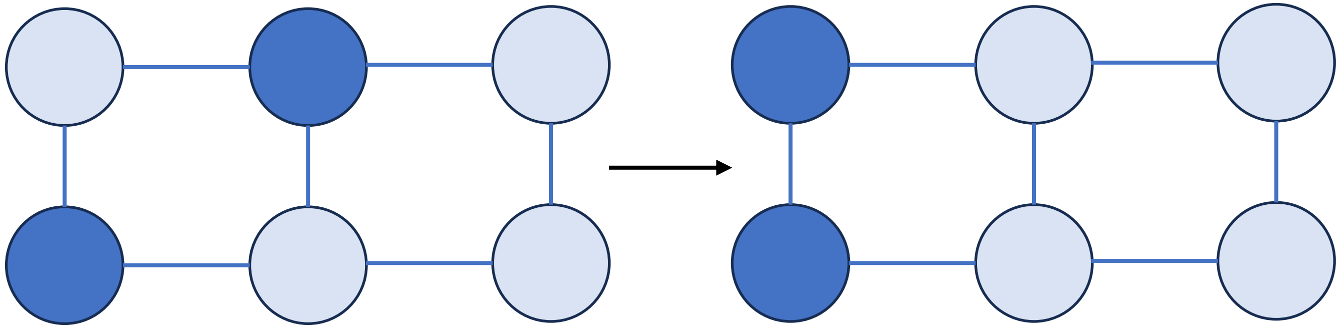
→ 遷移グラフの直径



2.1. Defining Feasible Solutions and Adjacency

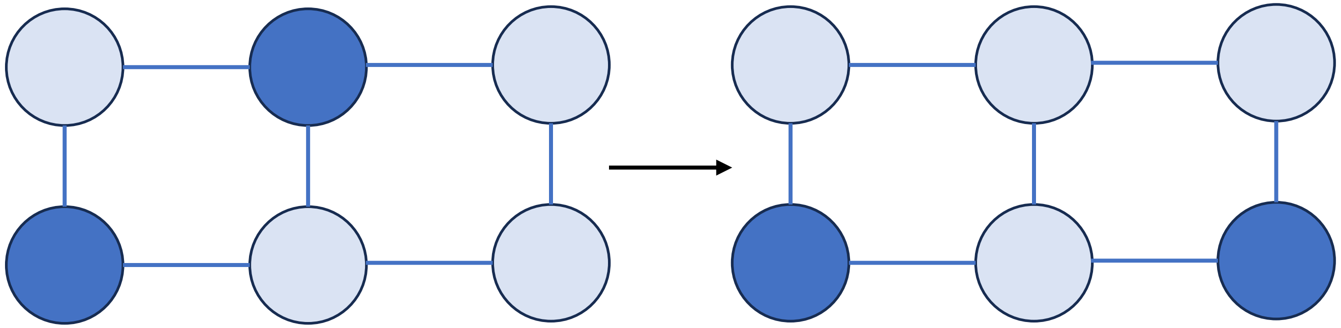
Token Sliding (TS)

ステップ：辺に沿ってトークンをスライド
step: sliding of a token along an edge



Token Jumping (TJ)

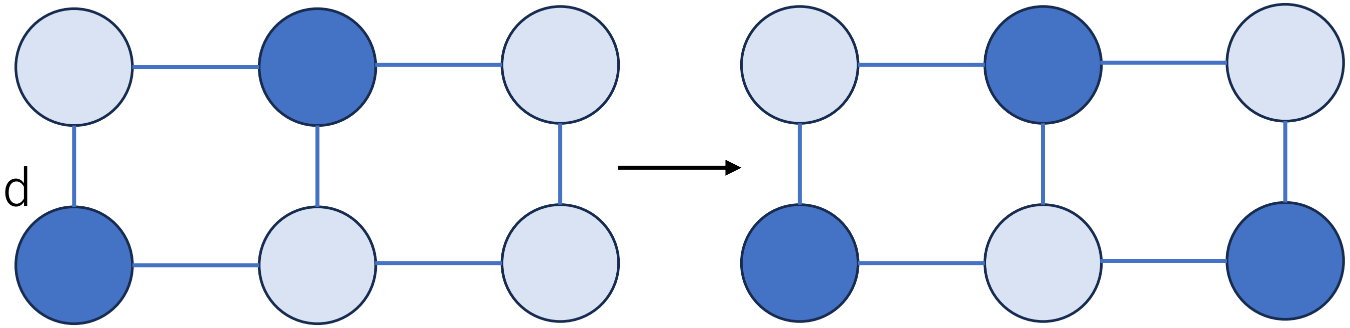
ステップ：辺に関わらずトークンを移す
step: moving a token



Token Addition / Removal (TAR)

ステップ：頂点を加えるか取り除くか
step: a token to be either added or removed

解の個数に境界を設けられることが多い



2.1. Defining Feasible Solutions and Adjacency

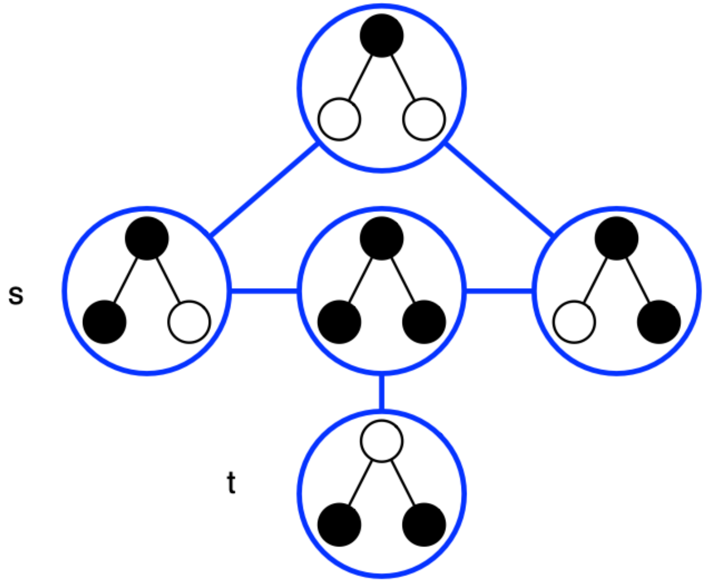
頂点被覆遷移 Vertex Cover Reconfiguration

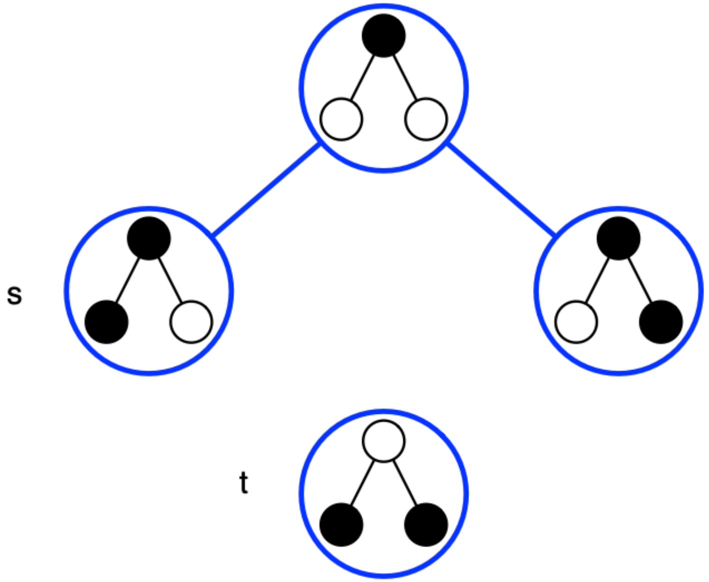
遷移の過程で、任意の辺の両端のうち片方にトークンが置かれているという制約付き

TARの解の個数に境界がない場合（左）とある（2個以下の）場合（右）

placing a bound on the size of a solution (right)

→解の個数の境界によって到達可能性が異なる





2.2. Defining Problems

前提：遷移グラフ Reconfiguration Graph

頂点：実行可能解 vertex: feasible solution

2つの実行可能解が隣接している→2つの頂点がリンクで接続されている

corresponding feasible solutions are adjacent → two vertices are joined

アルゴリズムの研究

Main Focus

遷移グラフの2解の間にパスが存在するかどうか決定すること

determine the existence of paths between solutions in the reconfiguration graph

New Direction

遷移問題の最適化に関する亜種 optimization variant

目標：与えられた解から到達可能な最適解を求める

goal: to find an optimal solution reachable from a given solution

2.2. Defining Problems

接続性に関して

遷移グラフが接続されている→到達可能性は自明

接続性に関する多くの研究→アルゴリズムよりも接続性が満たされる際の特性に焦点

変換問題

最短変換問題：与えられた2解の間の最短の遷移順序を求める問題（到達可能性の拡張）

境界付き変換問題：2解が遷移グラフ上で一定以下の長さのsequenceで接続されているかどうか

TARとReconfiguration index

遷移指数：TARの到達可能性が担保される、解の個数の境界の最小値

→決定が容易でないため、近似が主に用いられる

3. Tools for Proving the Complexity of Reachability

到達可能性問題のtractability

tractable：効率的な（多項式時間内に解く）アルゴリズムが存在すること

tractability：元問題に依存

<一般>

intractableな元問題：NP完全

intractableな到達可能性問題：PSPACE完全（多項式領域で計算できる）

<例外>

3-coloring：元問題はNP困難だが、到達可能性問題はP

最短経路問題：元問題はPだが、到達可能性問題はPSPACE完全

到達可能性問題のアルゴリズム

一般的なものはほとんど存在しない

→多くのものは特定のインスタンスに対して、
任意の入力解から正準構成までの遷移列の存在を示すことから構成される

3. Tools for Proving the Complexity of Reachability

到達可能性問題がintractableな場合のアプローチ

parameterized complexityの利用→第5章

tractableとintractableの境目を探す→第4章

パスや木のような単純なグラフでの検討

2部グラフ、平面グラフ、弦グラフ

→動的計画法の利用も

4. Analysis Using Graph Classes for INDEPENDENT SET

独立集合遷移の到達可能性について、様々なグラフ種類や遷移ステップから考える

<独立集合>
　1つのグラフ内で互いに隣接していない頂点の集合

初期の研究結果：

TSとTARの下でPSPACE完全性を確立

k個のトークンを用いたTJの遷移列が存在するのは、k-1個のトークンを用いたTARの遷移列が存在する場合に限られる

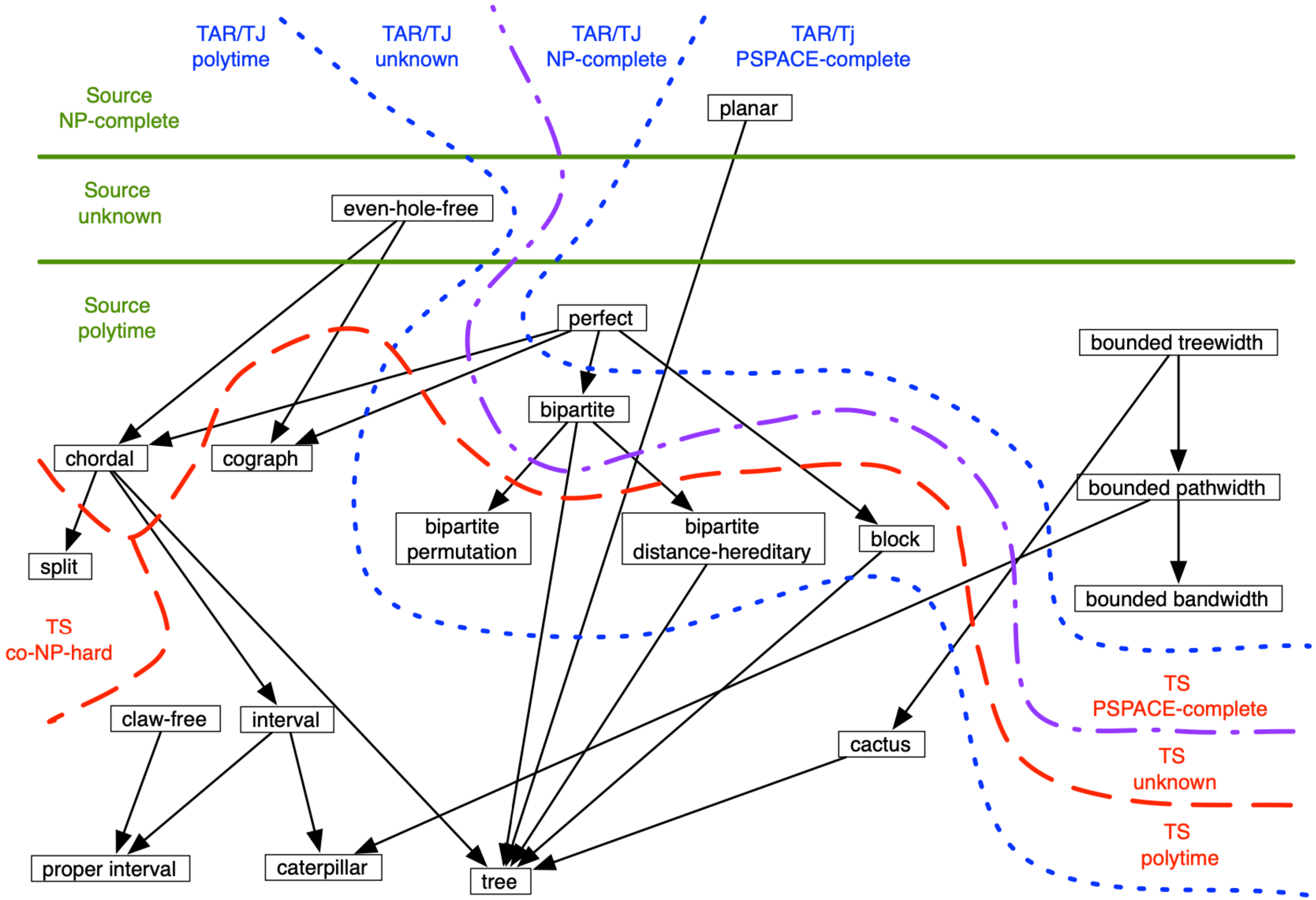
その後の研究：

様々なグラフでの元問題のtractabilityの境界に焦点を当てる

4. Analysis Using Graph Classes for INDEPENDENT SET

tractabilityの境界

- TSとTAR/TJの両方について、元問題は多項式時間で解けるが到達可能性はPSPACE完全であるグラフが存在する
→元問題と到達可能性の境界線が同じでないことを示している
- 二部グラフについて、TSとTAR/TJの結果が同じでないことを示す



5. Parameterized Complexity (Independent Set and Vertex Cover)

<Parameterized Complexity>

入力または出力のパラメータに関する固有の難しさに基づいて問題を分類する

fixed-parameter tractable (FPT)な問題：問題が$f(p)n^{O(1)}$で解ける時

n: 入力の大きさ

p: パラメータ

f: 計算可能な関数

Parameterized Complexityに着目した動機

- 遷移のParameterized Complexityと元問題のParameterized Complexityを比較するため
  パラメータ：解のサイズ、インスタンスの特性（木の幅、次数）
- 遷移グラフの直径と到達可能性の複雑さに相関がありそうだから

5. Parameterized Complexity (Independent Set and Vertex Cover)

独立集合遷移と頂点被覆遷移の結果は交換可能

独立集合と頂点被覆遷移グラフは

TJとTSのもとでは同値

一方の問題の解のサイズの上限がkでもう一方の問題の解のサイズの上限が(頂点の数)-kの場合のTARの下でも同値

カーネル化の利用

パラメータ固定で到達可能性アルゴリズムを得るために、カーネル化を利用

<カーネル化>
アルゴリズムへの入力を「カーネル」と呼ばれるより小さな入力に置き換える前処理段階によって、効率性を実現するアルゴリズム設計手法

5. Parameterized Complexity (Independent Set and Vertex Cover)

解のサイズをパラメータにした時

頂点被覆遷移：FPT

独立集合遷移：W[1]-hard（木の幅でもパラメータ化されるとFPT）

<W[l]-hard>

固定パラメータの複雑さに関してintractableである時、
その問題をある$l \geq 1$を用いてW[l]-hardと表現する

独立集合遷移がFPTなとき

次数に上限があり、平面グラフである場合

6. Connectivity and Diameter for k-COLORING

<k-COLORING>

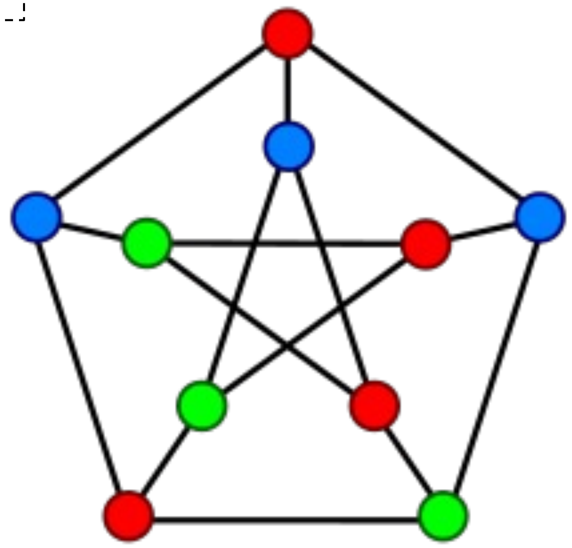
隣接する頂点同士が同じ色にならないように全頂点に彩色する問題

kが色の数を表す

$\mathrm{X}(G)$: グラフGの彩色に必要な色の数の最小値

k-彩色遷移

- 各解は、k-COLORINGの制約を満たす
- 各stepでは1つの頂点の色を変える



3-COLORING

6.1. k-COLORING RECONFIGURATION

得られた性質

- $2 \leq \mathrm{X}(G) \leq 3$の場合、 $\mathrm{k} = \mathrm{X}(G)$で遷移グラフは接続性を持たない
- 2部グラフの接続性の決定問題はcoNP完全だが、平面2部グラフに限定すると多項式時間で解ける

<coNP完全>
　ある決定問題の補問題がクラスNPに属する場合

- $k = 3$のとき、到達可能性も最短変換も多項式時間で解ける
- $k \geq 4$のとき、到達可能性はNP困難でPSPACE完全
    - 2部グラフでも同様
    - $4 \leq k \leq 6$の平面グラフでも同様
    - $k = 4$の平面2部グラフでも同様

6.1. k-COLORING RECONFIGURATION

アルゴリズムの結果

$\Delta(G)$：グラフGの最大次数
$col(G)$：グラフGの任意の部分グラフの最小次数のうち最大のもの

- 次数に上限のあるグラフでは到達可能性問題は
  - $\Delta(G) \leq k - 2$の場合に定数時間で解ける
  - $k \geq 4$かつ$\Delta(G) = k - 1$の場合に線形時間で解ける
  - $k = 3$かつ$\Delta(G) \geq 3$の場合に2次式時間で解ける
- parameterized complexityに関して
  - k+lでパラメータ化されたとき、到達可能性問題は固定パラメータでtractable
    - lは遷移列の長さ
  - lのみでパラメータ化された時はW[1]-hard
  - $k = \Delta(G) + 1$かつ$\Delta(G) \geq 1$かつ$col(G) = \Delta(G) - 1$の時、到達可能パスを見つける問題は2次式時間で解ける

6.2. Variants of Coloring

k-正則グラフの場合

< k-正則グラフ>
各頂点の隣接する頂点数が全て同じであるような頂点の次数がkのグラフ

- 遷移グラフは$k \geq 4$で接続性を持つ

リスト彩色遷移

- k彩色遷移を一般化し、各頂点vに許容される色のリストL(v)を与えたもの
- $k \leq 3$の時の到達可能性の(元々の)多項式時間アルゴリズムはこれに適応可能で、各リストのサイズが少なくとも$col(G)+2$のとき遷移グラフは接続性を持つ
- k+lでパラメータ化されたとき固定パラメータアルゴリズムが見つかっている
- 最小変換問題は、kと最小頂点被覆のサイズでパラメータ化されているとき固定パラメータアルゴリズムが見つかっている

7. Other Structural Problems

< 支配集合D>
グラフGの各頂点vについて、v自身またはvと隣接する頂点がDに含まれているような頂点集合D

最小濃度の支配集合に解が限定されない遷移グラフ

TAR下で各解が高々 kのサイズの支配集合であるような遷移グラフ「k-支配グラフ」

$<\Gamma(G)>$
グラフGの最小支配集合の最大次数

k-支配グラフの接続性は以下の場合に成り立つ

- $k \geq \min\{|V(G)| - 1, \Gamma(G) + \gamma(G)\}$
- $k \geq \Gamma(G) + 1$ の時2部グラフで弦グラフである
- k = n – μでかつ濃度のマッチングが少なくともμ + 1
- 十分に被覆されたグラフの一定クラスに対してk = Γ(G) + 1
- 完全グラフと冗長完全グラフの両方に対してk = Γ(G) + 1

8. Shortest Transformation

最短変換

遷移列の長さの下界を、解の実現可能性等を無視してシンプルに求める

- TARの場合：ソース解にあるがターゲット解にない頂点の数+ターゲット解にあるがソース解にない頂点の数
- TS/TJの場合：ソース解とターゲット解で異なる頂点の数

対称差以外の解の部分を変更する必要がある状況で最短変換は可能か？

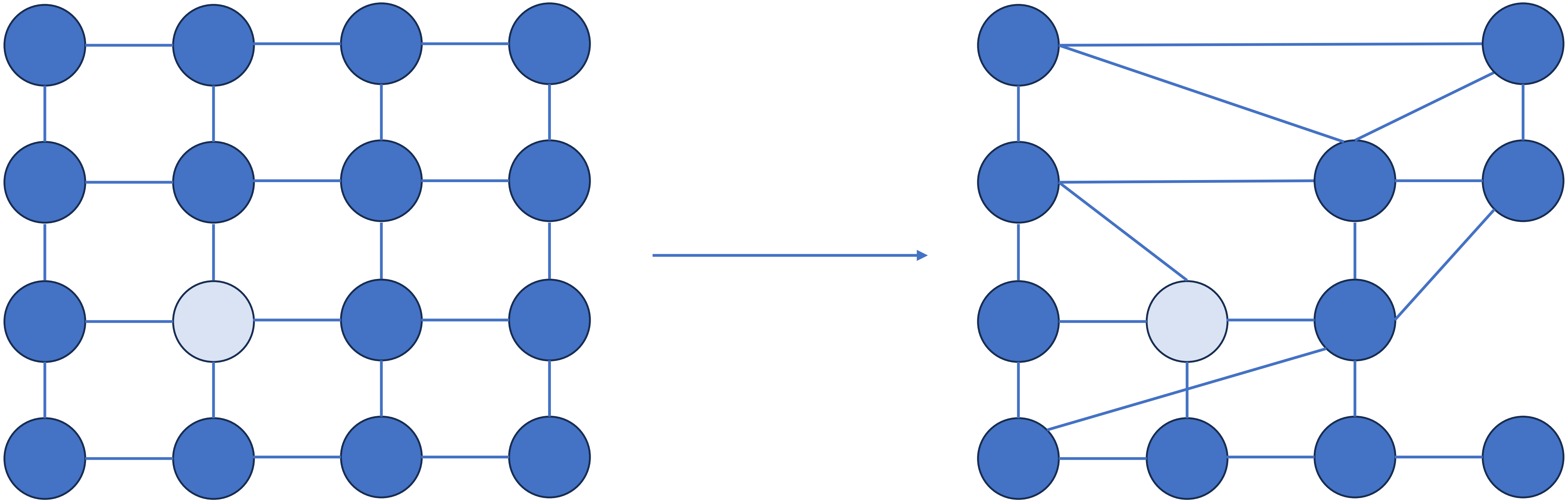
↓ 疑問提起

充足可能性遷移の分析によって回答される

9. Labels and Colors on Tokens (15パズルの話に戻る)

9.1. Generalizing the 15-Puzzle

グリッドから一般グラフへの拡張
→**複数の穴が許される**ようになる



9.2. Placing Tokens on All Vertices

トークンが全て異なる場合

- 遷移グラフは連結され、$O(n2)$ の直径を持つ
- 最短の変換列の決定方法であるToken SwappingはNP完全で近似不可能
- アルゴリズム
  - 多項式時間解法（グラフがパス、サイクル、完全グラフ…）
  - 近似アルゴリズム（グラフが四角形パス、木、一般グラフ…）
  - 固定パラメータアルゴリズム（グラフが平面グラフなど）

各トークンが指定された色を持つ場合

- 最大次数4の接続性のある平面2部グラフでも少なくとも3色でNP完全
- 2色の場合：多項式時間アルゴリズムあり
- 木の場合：線形時間アルゴリズムあり

10. Further Research Directions

- 一般的なアルゴリズムアプローチは捉えどころがない
- 到達可能性について、tractableとintractableの間の境目を決定することは進展しているが、その違いや理由を明らかにするための研究が必要
- 多くの元問題に対し、その遷移問題のほとんどがまだ着目されていない
- 近似や、parameterized complexityといったツールを用いたものはごくわずか
- グラフ問題の他にもより広範な元問題を考慮する必要がある
  - マトロイドなど

所感

- 論文全体としての主張を掴みにくかったので苦労した。
  - レビュー論文に近いタイプのものなのでやや仕方ないか。こういうタイプの論文をしっかり読んだことがなかったが、まとめるのがかなり難しかった。
- グラフ理論の問題に多く触れることができ、調べる良いきっかけになった
- 15-puzzleは面白い