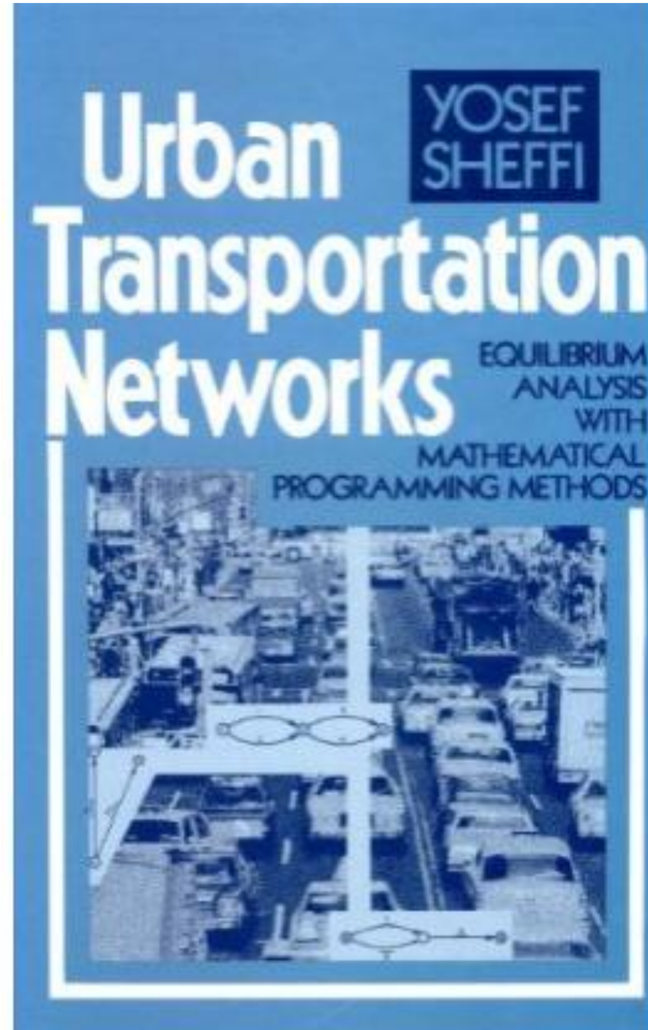
URBAN TRANSPORTATION NETWORKS

Author: Yossi Sheffi

: Prentice Hall, 2-132, October 1985



M1　今泉孝章

論文ゼミ#3-2

2013/5/3(金)

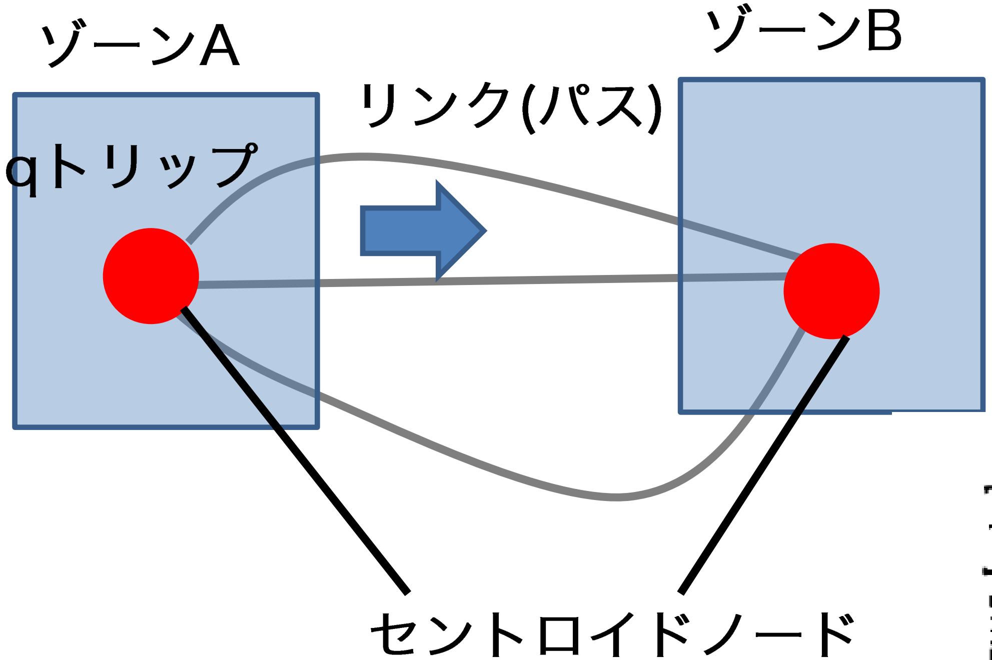
利用者均衡配分とは?
どのような状況のことを指すか

利用者均衡配分を解くには?
どのように定式化するか

定式化した問題はどうやって解くのか
数学的な最適化の基礎

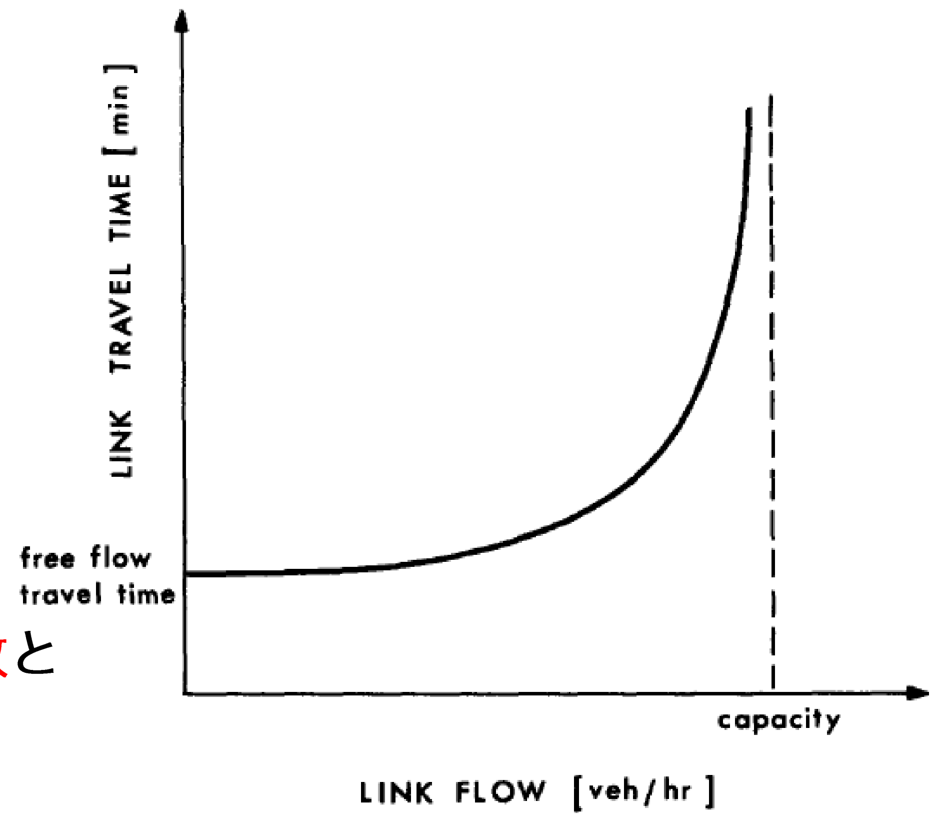
定式化した問題を解くと
利用者均衡が満たされるのか?
数学的な最適化の基礎

都市ネットワークと均衡



- 都市の交通ネットワークを表すグラフ
- リンクパフォーマンス関数
- OD間トリップ数の行列

ネットワークリンクにおけるフロー数と旅行時間を見つける

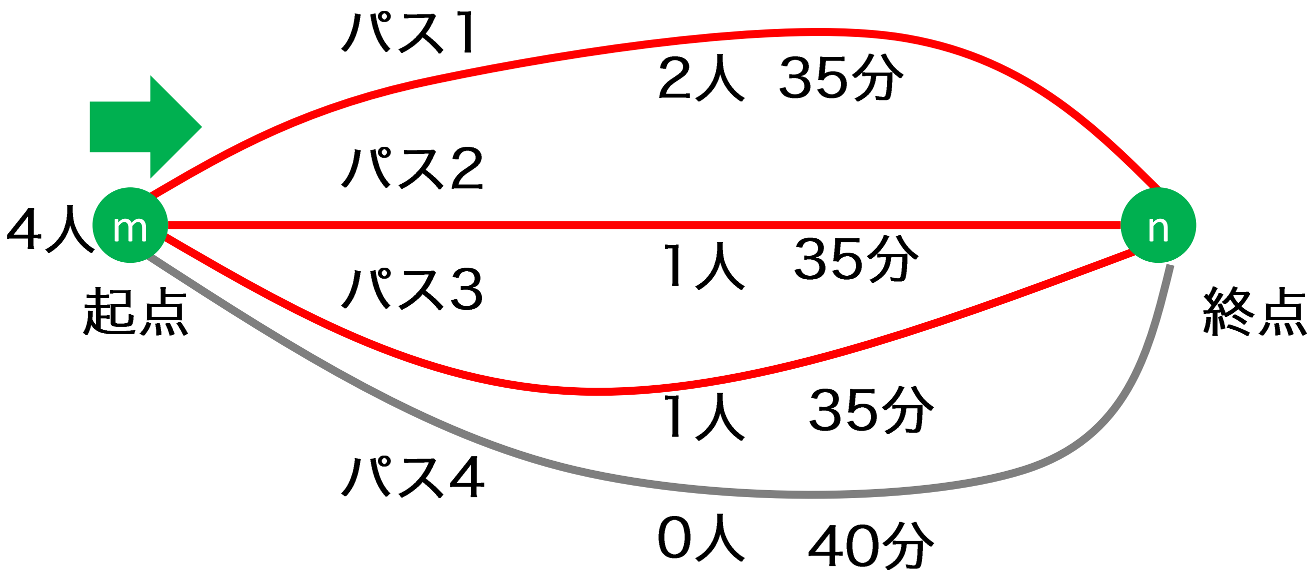


都市ネットワークと均衡

利用者均衡

全ての旅行者は自分の旅行時間を最小とするように行動する

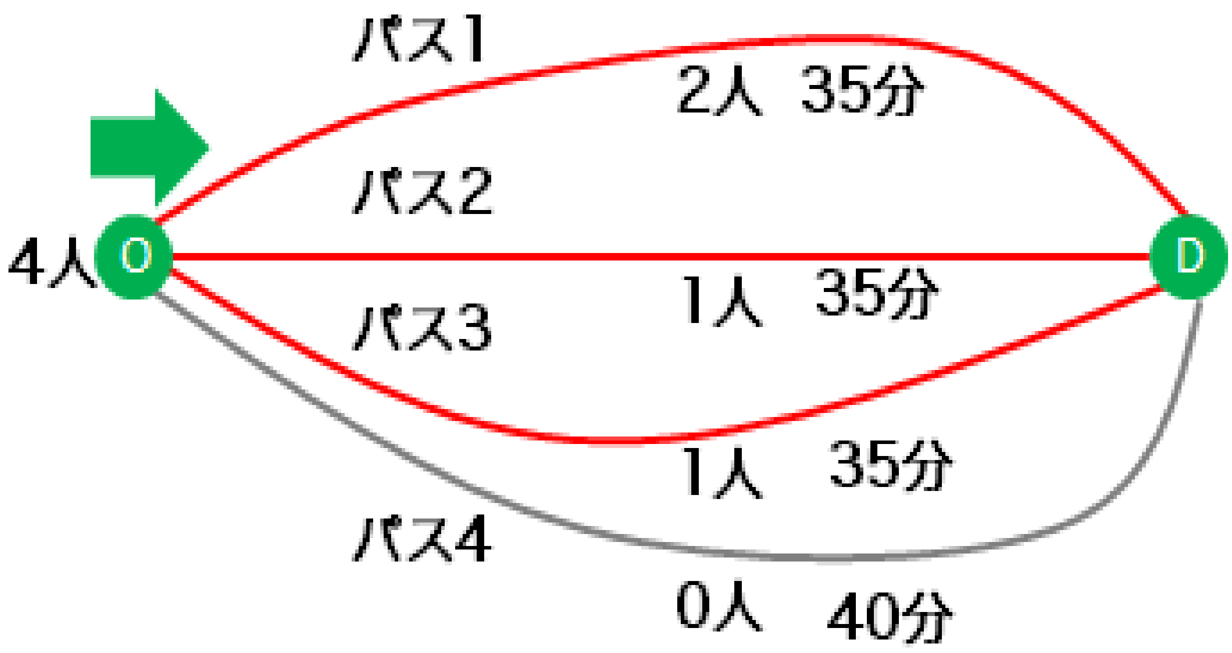
どの旅行者も経路を変えることによってこれ以上自分の旅行時間を短くすることができない(利用されている経路の旅行時間は同じで、利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ)



配分問題の数学的問題への定式化

問) リンクとノードから成るネットワークにある数の車が流れるとき、どの経路にどれだけの車がながれているときに利用者均衡条件が満たされるでしょう?

どの旅行者も経路を変えることによってこれ以上自分の旅行時間を短くすることができない(利用されている経路の旅行時間は同じで、利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ)



配分問題の数学的問題への定式化

変数の定義

a :ネットワーク上のリンク

r :起点ノード

s :終点ノード

k :OD間のパス

f_k^{rs} から導かれるもの

$\boxed{x_a}$:リンク a 上のフロー数

$\boxed{c_k^{rs}}$:起点 r と終点 s を結ぶパス k 上の旅行時間

$\boxed{\delta_{a,k}^{rs}}$:リンク a が起点 r と終点 s を結ぶパス k に含まれているとき1,そうでないとき0のダミー変数

$\boxed{q_{rs}}$:起点 r と終点 s を結ぶトリップ数

$\boxed{t_a}$:リンク a 上の旅行時間

与えられるもの

$\boxed{f_k^{rs}}$:起点 r と終点 s を結ぶパス k 上のフロー数

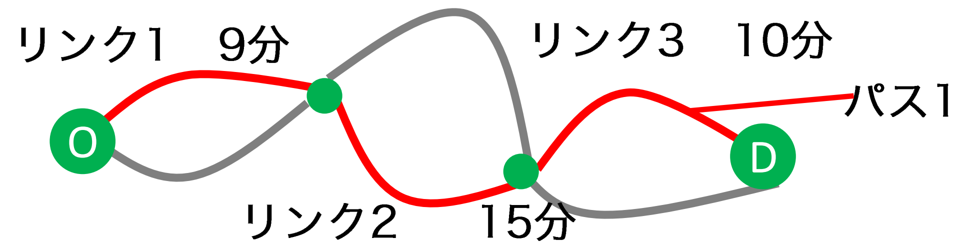
求めたいもの

配分問題の数学的問題への定式化

パス間旅行時間=パスを構成するリンク上の旅行時間の和

$$c_k^{rs} = \sum_a \boxed{t_a} \delta_{a,k}^{rs} \qquad (1.1)$$

所与

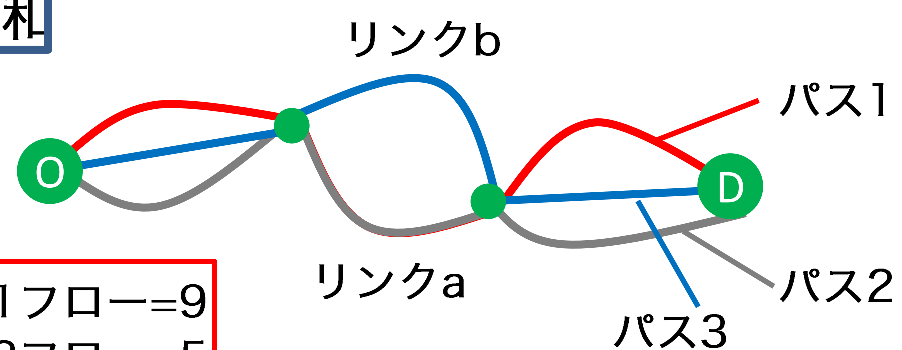


パス1総旅行時間=リンク1旅行時間+リンク2旅行時間+リンク3旅行時間
=9+15+10=34分

リンクフロー=リンクを通るパスフローの和

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k \boxed{f_k^{rs}} \delta_{a,k}^{rs} \qquad (1.2)$$

未知



パス1フロー=9
パス2フロー=5
パス3フロー=3

リンクaフロー数=(パス1フロー数)×1+(パス2フロー数)×1+(パス3フロー数)×0
=9×1+5×1+3×0=14

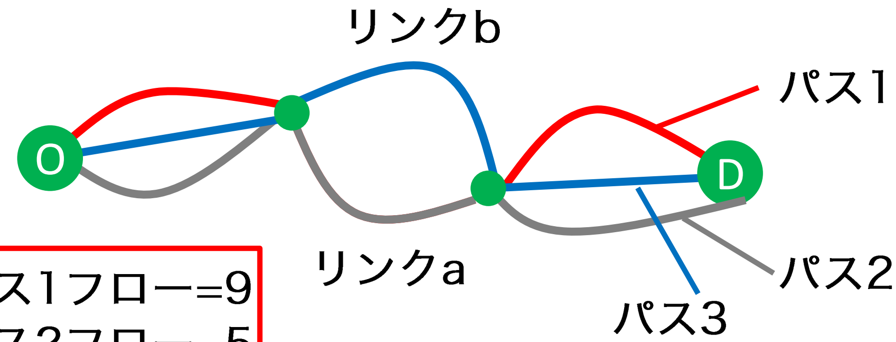
リンクbフロー数=(パス1フロー数)×0+(パス2フロー数)×0+(パス3フロー数)×1
=9×0+5×0+3×1=3

配分問題の数学的問題への定式化

OD間フロー数=ODを結ぶ全てのパスフロー数の和

$$\sum_k \boxed{f_k^{rs}} = \boxed{q_{rs}} \quad (1.3)$$

未知　所与



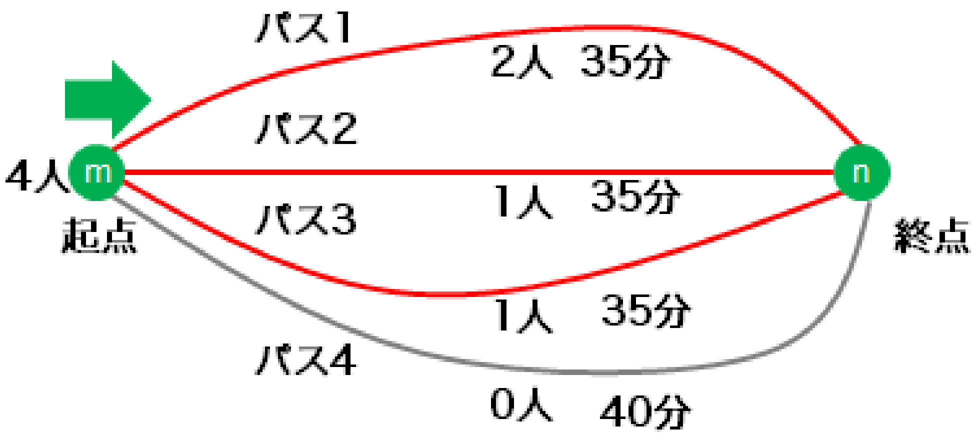
パス1フロー=9
パス2フロー=5
パス3フロー=3

OD間フロー数=パス1フロー数+パス2フロー数+パス3フロー数
=9+5+3=17

このとき q_{rs} から与えられる未知数 f_k^{rs} の入った式,(1.3)を最適な解のとき満たされているべき条件の一つの与えられた条件から得られる制約式(フロー数に関する制約)ととらえることができる

利用者均衡が満たされているときはどのような式が成り立つ?
同様に数式で表すことを目指す

配分問題の数学的問題への定式化



利用者均衡

利用されている経路の旅行時間は同じで、利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ

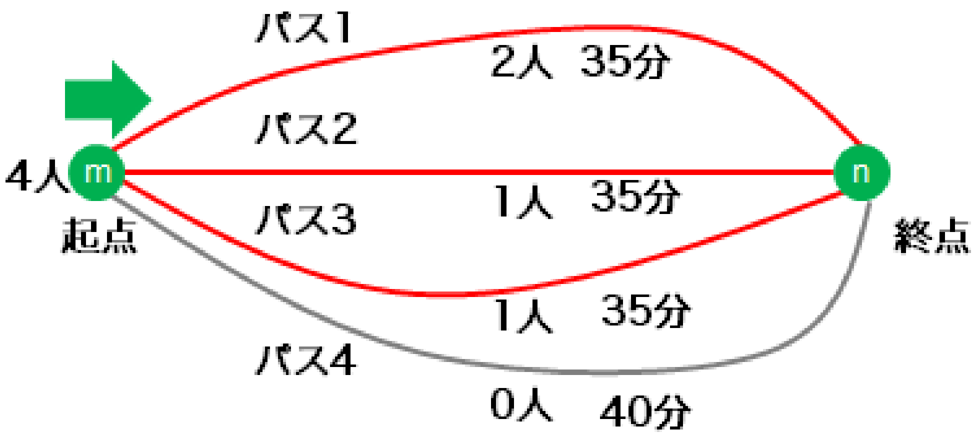
$$f_1^{mn} = 2 \qquad c_1^{mn} = 35$$

$$f_2^{mn} = 1 \qquad c_2^{mn} = 35$$

$$f_3^{mn} = 1 \qquad c_3^{mn} = 35$$

$$f_4^{mn} = 0 \qquad c_4^{mn} = 40$$

配分問題の数学的問題への定式化



利用者均衡

利用されている経路の旅行時間は同じで、利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ

利用されている経路

$$f_1^{mn} = 2$$

$$f_2^{mn} = 1$$

$$f_3^{mn} = 1$$

$$f_4^{mn} = 0$$

旅行時間は同じで最小

$$c_1^{mn} = 35$$

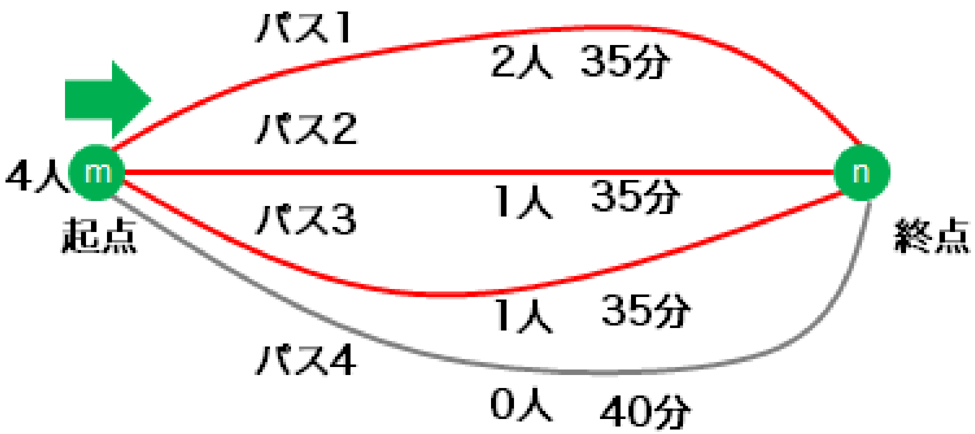
$$c_2^{mn} = 35$$

$$c_3^{mn} = 35$$

$$c_4^{mn} = 40$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{if} \quad f_k^{rs} > 0 \quad c_k^{rs} = \min\ c_l^{rs} \\ l\text{は}r - s\text{間の全てのパス} \end{array}}$$

配分問題の数学的問題への定式化



利用者均衡

利用されている経路の旅行時間は同じで、
利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ

$$f_1^{mn} = 2 \qquad c_1^{mn} = 35$$

$$f_2^{mn} = 1 \qquad c_2^{mn} = 35$$

$$f_3^{mn} = 1 \qquad c_3^{mn} = 35$$

利用されていない経路　最短経路より大きい

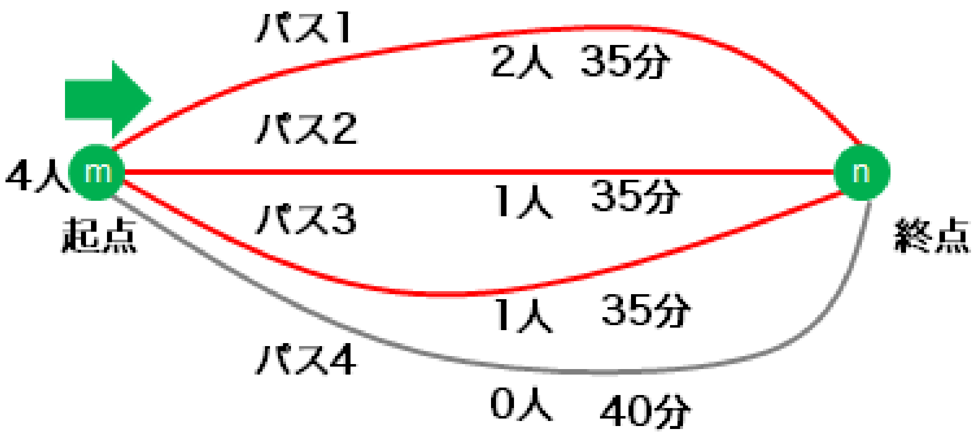
$$\boxed{f_4^{mn} = 0} \qquad \boxed{c_4^{mn} = 40}$$

$$if \quad f_k^{rs} > 0 \quad c_k^{rs} = \min \ c_l^{rs}$$

lは$r-s$間の全てのパス

$$\boxed{\begin{array}{l} if \quad f_k^{rs} = 0 \quad c_k^{rs} \geq \min \ c_l^{rs} \\ l\text{は}r-s\text{間の全てのパス} \end{array}}$$

配分問題の数学的問題への定式化



利用者均衡

利用されている経路の旅行時間は同じで、利用されていない経路の旅行時間は利用されている経路の旅行時間より大きいか、せいぜい同じ

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - c_{\min}) = 0 \qquad (1.4)$$

$$c_k^{rs} - c_{\min} \geq 0 \qquad (1.5)$$

$(c_{\min} : r - s$間最短旅行時間$)$

これが利用者均衡が成立するときの式

配分問題の数学的問題への定式化

問)リンクとノードから成るネットワークにある数の車が流れるとき、どの経路にどれだけの車がながれているときに利用者均衡条件が満たされるでしょう?

与えられている条件
→リンクパフォーマンス関数、OD間フロー数
(フロー数に応じて変わる旅行時間の関数)　(あるOとDの間を流れる車の総数)

最適な解のとき満たされているべき条件
→ 利用されているパス(経路)の旅行時間は全て同じで、利用されていない経路の旅行時間はそれより大きいか同じ+与えられた条件から得られる制約式

定式化→?

配分問題の数学的問題への定式化

問)リンクとノードから成るネットワークにある数の車が流れるとき、どの経路にどれだけの車がながれているときに利用者均衡条件が満たされるでしょう?

与えられている条件

→ t_a　q_{rs}

最適な解のとき満たされているべき条件

→

条件1(利用者均衡)

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - c_{\min}) = 0$$

$$c_k^{rs} - c_{\min} \geq 0$$

$(c_{\min} : r-s$間最短旅行時間)

条件2(フロー数制約)

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

定式化→?

配分問題の数学的問題への定式化

定式化

$$\min\ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega \quad (1.6)$$

リンクaにおけるフロー数がωのときの旅行時間

ネットワーク上の全リンクの旅行時間の和

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (1.3) \qquad f_k^{rs} \geq 0 \quad (1.7)$$

条件2(フロー数制約)

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - c_{\min}) = 0 \quad (1.4)$$

$$c_k^{rs} - c_{\min} \geq 0 \quad (1.5)$$

($c_{\min}$: $r-s$間最短旅行時間)

条件1(利用者均衡)

(1.3),(1.5)のもとで(1.4)を解く→条件2は満たされる

条件1は?→同様の問題を解くことで同時に条件1も満たされる

なぜか?

最終的に(1.6)の問題を(1.3),(1.7)の制約条件のもとで解くことを目指す

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (1.7)$$

非負制約

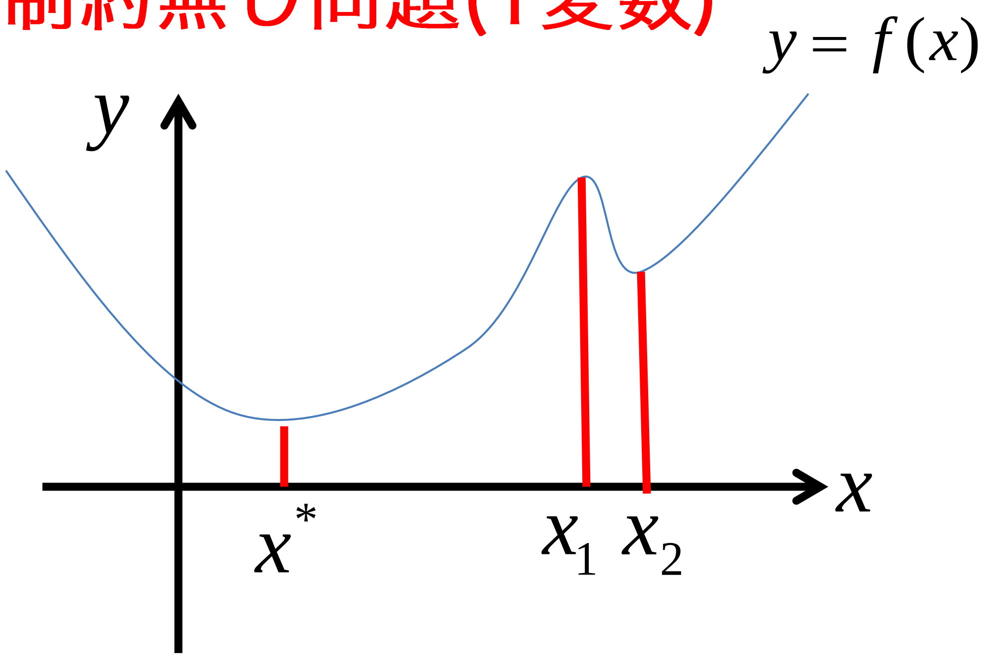
$$\min\ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \quad (1.6)$$

等式制約、非負制約が合わさった(1.6)の最適化問題ととらえる

1変数の制約無しの最適化問題から入り、最終的に多変数の制約有り問題へと拡張することで等式制約、非負制約のある多変数の最適化問題を扱えるようにする→均衡配分問題を解けるようにする

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(1変数)



最小値の候補としては…

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad (2.1)$$

停留点

(2.1)が満たされるのは左図で3点もある。極大値をとるのが x_1 、極小値をとるのが x_2 x^* である。

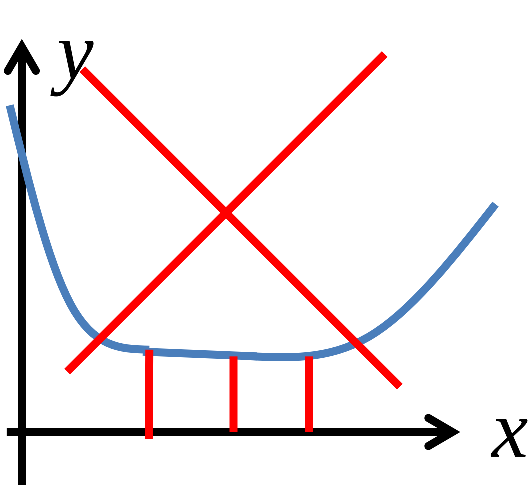
ここで極大値は最小値にはなりえない→停留点のうち極小値が最小値の候補

今回は極小値をとる点が2つだが、無数にある場合極小値をとる点のうちどれが最小値をとるか検証が困難で、複数持つ場合もありうる

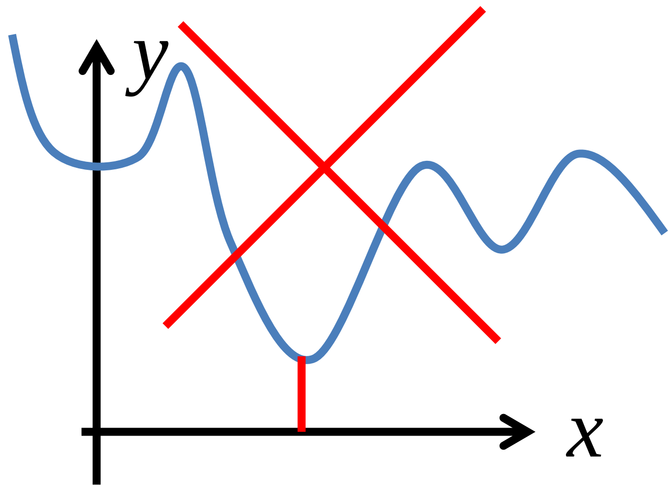
→どのような形だったら最小値が一つに定まるのか?

最小化問題の基礎概念

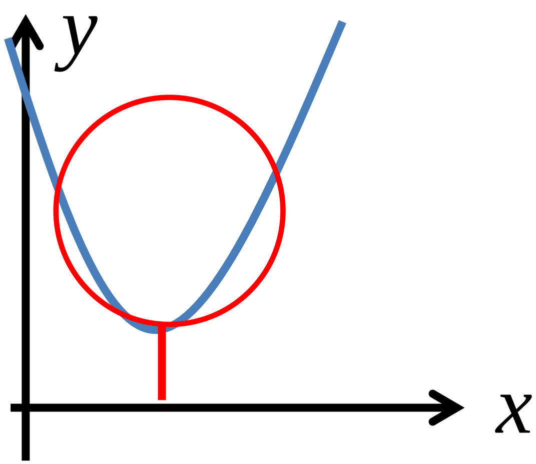
制約無し問題(1変数)



平たくなっており解が複数ある



でこぼこしており極小値が複数存在する



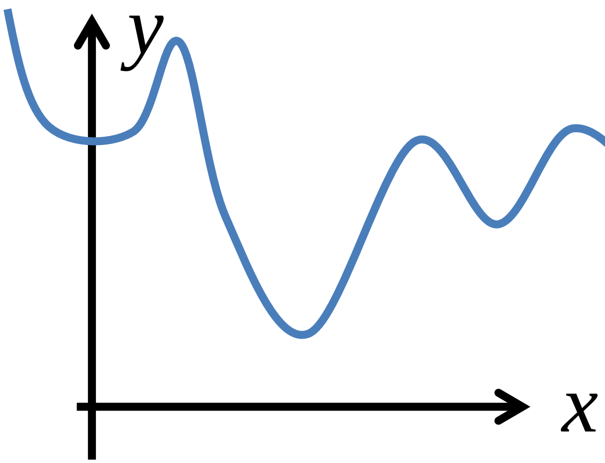
極小点が一つでそれが最小値であることが自明

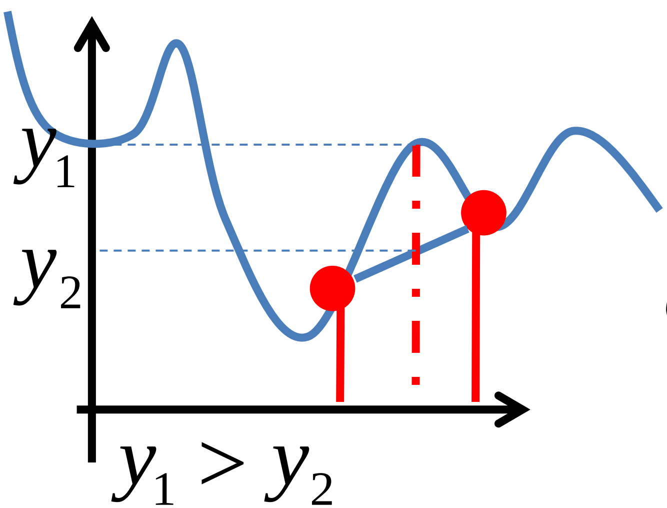
きれいなお椀形であればいい

関数がお椀形をするにはどのような条件が必要か?

最小化問題の基礎概念

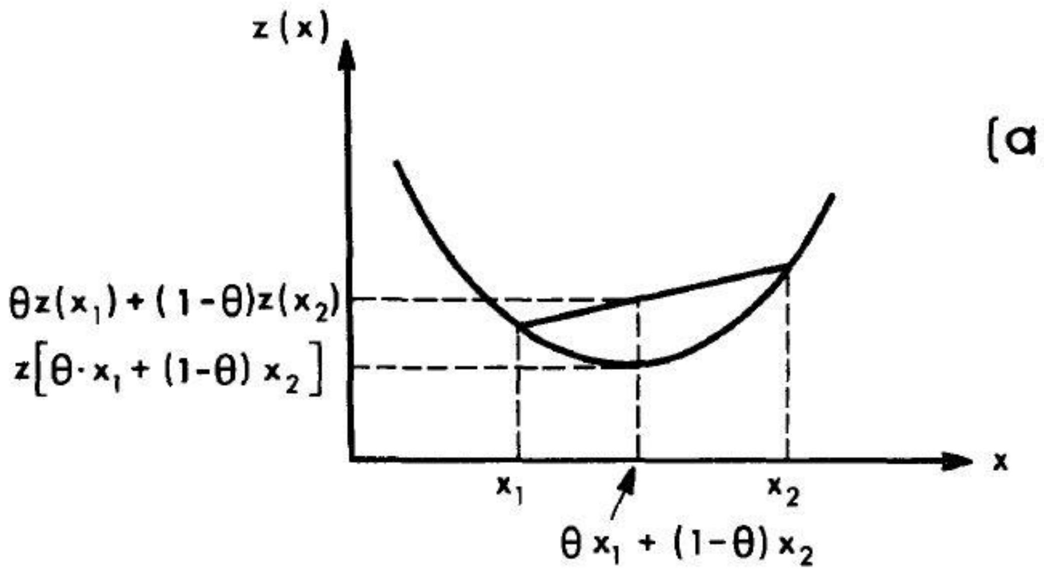
制約無し問題(1変数)





関数が全体的に下にとがってる
ところが一つであればいい

→これを**関数が凸**という

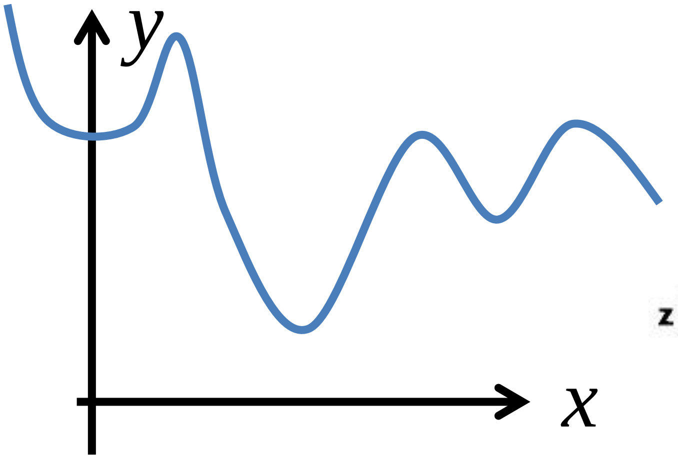


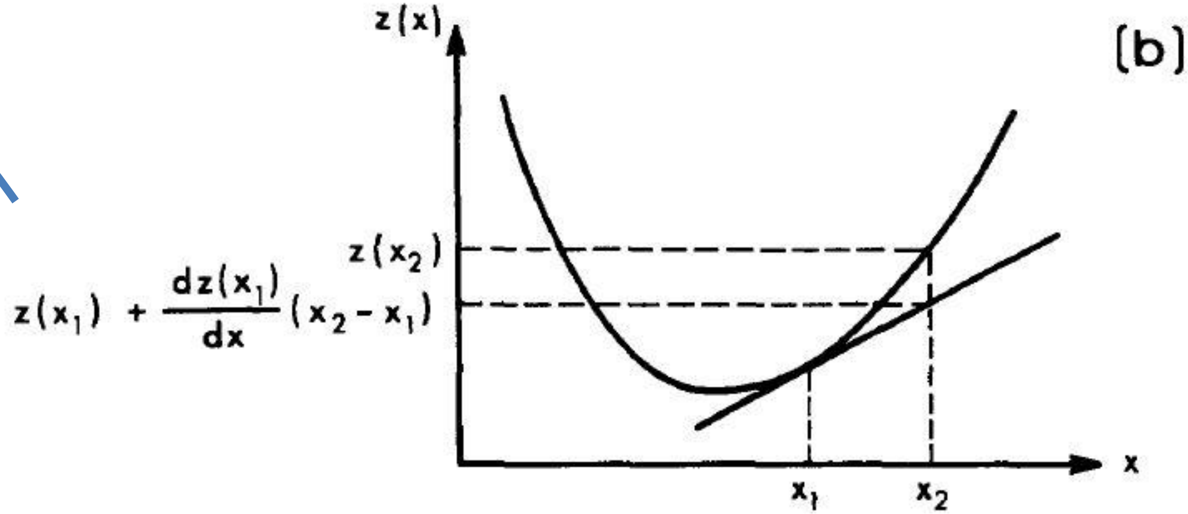
θはx_1, x_2を内分するための係数 $0<\theta<1$

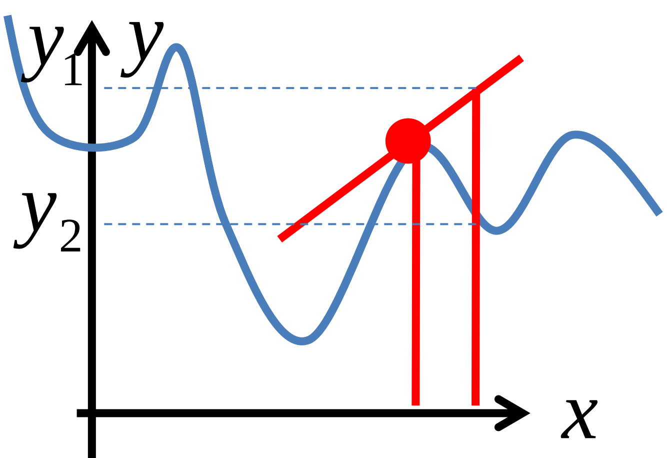
$$\boxed{\theta z(x_1)+(1-\theta)z(x_2)\geq z[\theta\cdot x_1+(1-\theta)x_2]}\quad(2.2)$$

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(1変数)







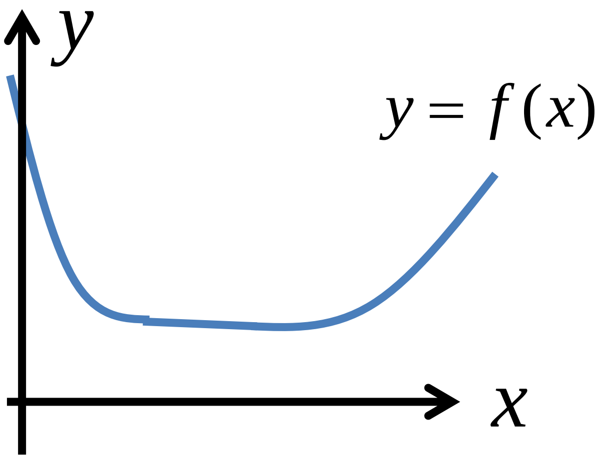
$y_1 > y_2$

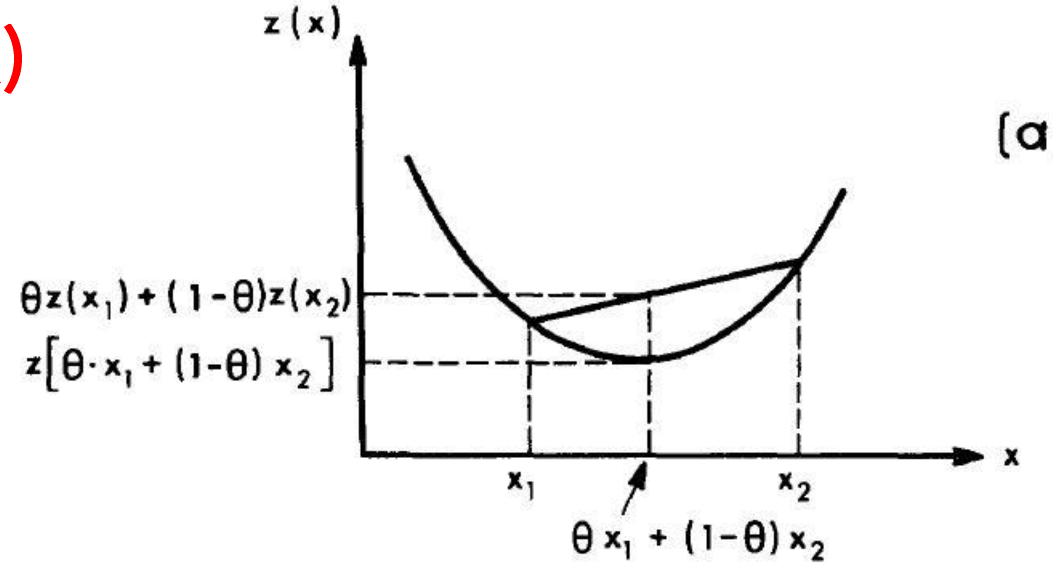
$$\boxed{z(x_2) \geq z(x_1) + \frac{dz(x_1)}{dx}(x_2 - x_1)} \qquad (2.3)$$

よって左図のような関数は(2.2),(2.3)ともに満たしておらず凸な関数とはいえない

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(1変数)

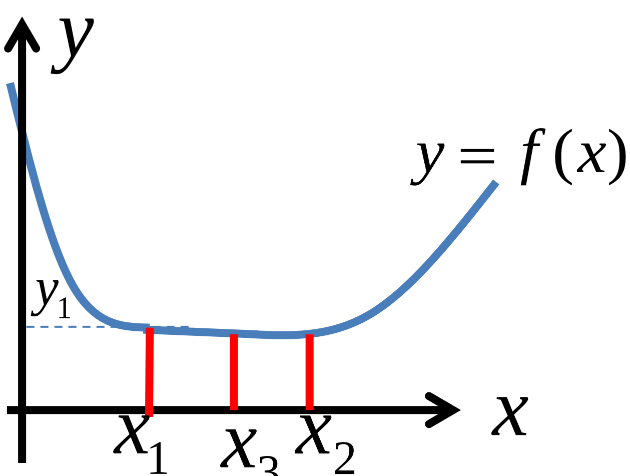




θはx_1, x_2を内分するための係数 $0 < \theta < 1$

$$\theta z(x_1) + (1-\theta) z(x_2) \geq z[\theta \cdot x_1 + (1-\theta) x_2] \tag{2.2}$$

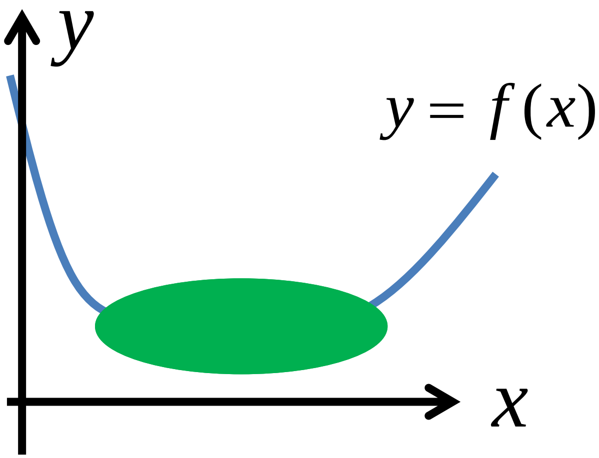
y_1 $\qquad$ $y = f(x_3) = y_1$



(2.2)は満たされているが(等号が成立するので)
解が複数存在し不適

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(1変数)



(2.2)は満たされているので、解が一つに定まりよさそうにみえるが…

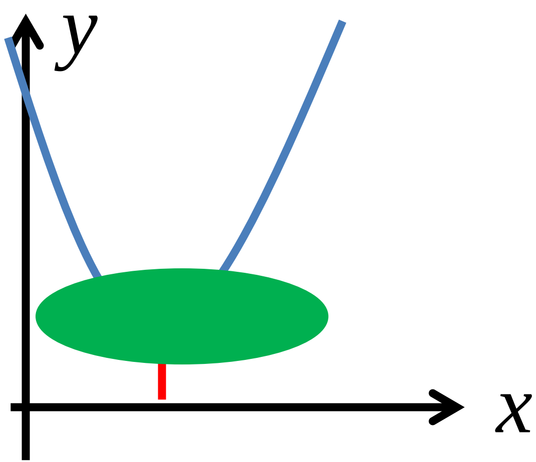
$$\theta z(x_1)+(1-\theta)z(x_2)\geq z[\theta\cdot x_1+(1-\theta)x_2] \quad (2.2)$$

緑枠のところでも、とがってなくてはいけない

→解付近で**狭義に凸**でなければいけない

→(2.2),(2.3)の等式が成立するのが$x_1=x_2$ のとき

だけであれば狭義に凸といえる



制約無し問題(1変数)

・停留点近くで関数が狭義に凸

・関数全体が凸

であれば停留点で最小値となる

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

基本的には1変数の場合と同じで候補となるのは停留点で、停留点近くで狭義に凸で、関数が凸であれば、停留点で最小値となる

最小化する関数: $z(X), X = (x_1, \ldots, x_I)$

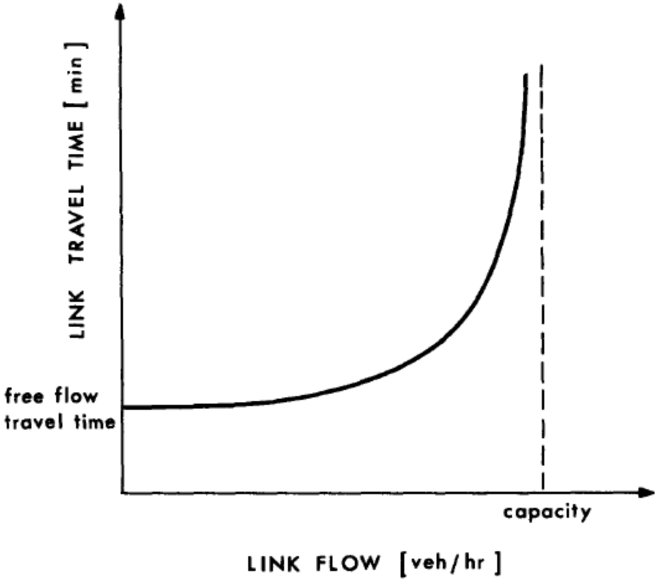
説明変数ベクトル

$$\nabla_x z(X^*) = \left(\frac{\partial z(x_1^*)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z(x_I^*)}{\partial x_I}\right) = 0$$

(2.4)

関数全体の凸性は保証されているとする
→均衡配分における目的関数はリンクパフォーマンス関数なので

このとき停留点で関数が狭義に凸であれば、停留点で関数は最小値をとるといえる
狭義に凸の条件→関数上の異なる2点で(2.2),(2.3)の不等式(等式は成り立たない)が成立すればいいが多変数なので煩雑になる…



ヘッセ行列を用いて狭義に凸であることを示す

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

ヘッセ行列:関数の二階微分の行列
均衡配分問題においてヘッセ行列は
対角行列になる※対角成分以外が0の行列

(均衡配分におけるx はリンクフロー数で
互いに影響はないと仮定しているから)

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_I} \\ \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^{\,2}} & & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I^{\,2}} \end{bmatrix}$$

このヘッセ行列が停留点で正定値で
あれば狭義に凸である

行列が正定値とは…
行列 A に対してある行列x があったときに
$x^T A x > 0$ が成り立つとき

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

一般に $Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda I$

を満たすx があるときx を A の固有ベクトル、λ を固有値という
したがって

$$x^T Ax > 0 \rightarrow \lambda(\text{固有値}) > 0$$ となれば行列A は正定値

行列にとっての固有値とは何を意味するか?

行列をベクトルにかけることで、そのベクトルが違うベクトルに変換される
例えば…

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AX = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

X が A によって違うベクトルになった

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$ ➡ 固有値 $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 9$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ としたとき

$$AX = \lambda_1 X \rightarrow (A - \lambda_1 I)X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ➡

$$AX = \lambda_2 X \rightarrow (A - \lambda_2 I)X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ➡

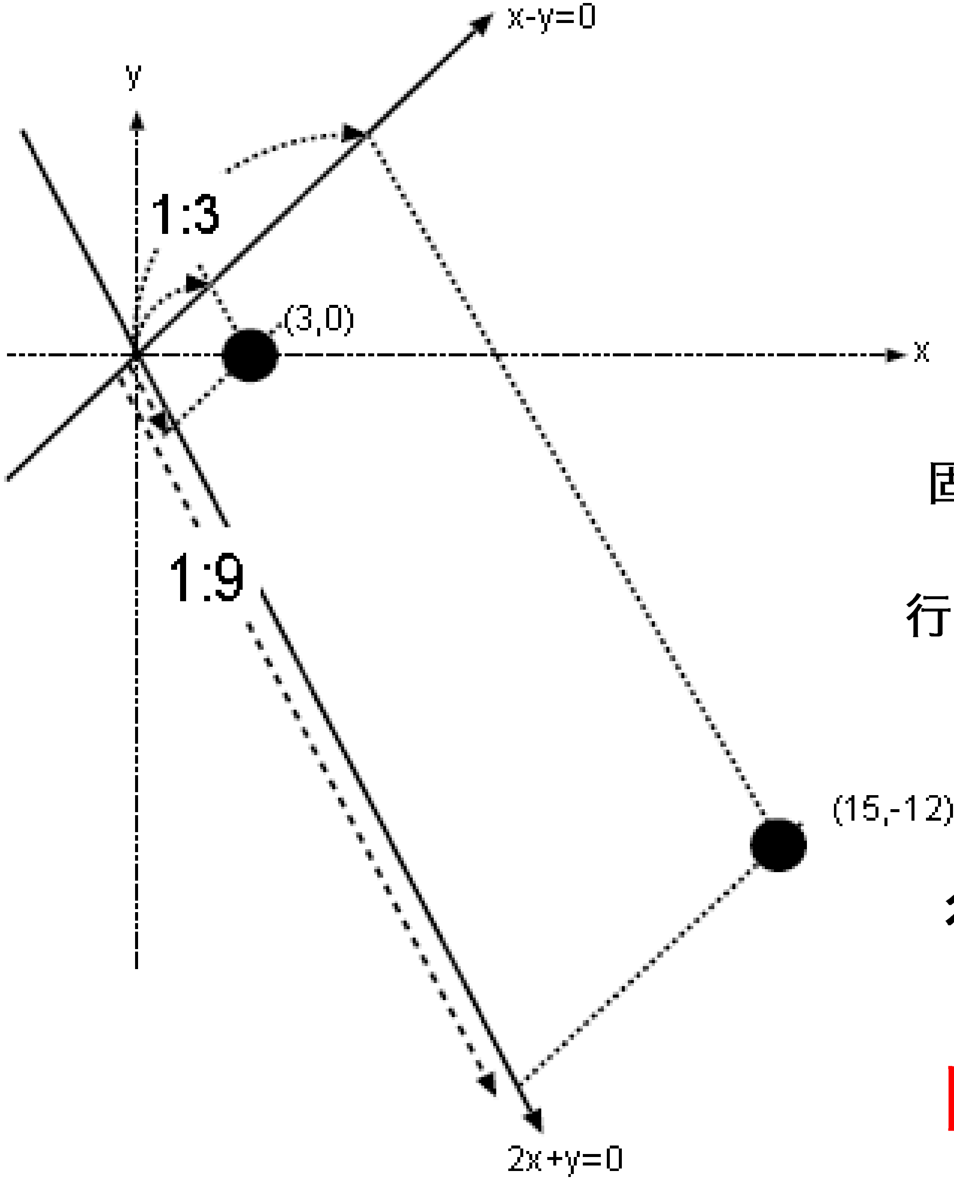
固有ベクトルの方向

$$x - y = 0$$

$$2x + y = 0$$

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)



$$X = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルの方向	対応する固有値
$x - y = 0$	$\lambda_1 = 3$
$2x + y = 0$	$\lambda_2 = 9$

行列にとっての固有値とは何を意味するか?

行列は、掛け合わせたベクトルを固有ベクトル方向に、固有値倍する

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

一般に $Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda I$

を満たすx があるときx を A の固有ベクトル、λ を固有値という
したがって

$$x^T Ax > 0 \rightarrow \lambda(\text{固有値}) > 0$$

となれば行列 A は正定値

ここでヘッセ行列を Aとするとすべての変数についての
二階微分が固有値に相当するので

$$\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_i^{\,2}} > 0 \quad i = 1,2,\ldots,I \qquad (2.5)$$

$$\nabla^2 z(x) \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^{\,2}} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^{\,2}} & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I^{\,2}} \end{bmatrix}}_{\lambda I \text{ に相当}}$$

(2.5)が成立するとき関数は狭義に凸であり、
関数は停留点で最小値となる

最小化問題の基礎概念

制約無し問題まとめ

停留点(微分値が0)が最小値となる

しかし、関数の形を考えると停留点の近くで1)関数が狭義に凸であること、2)関数が凸であることが必要となる

$$\theta z(x_1)+(1-\theta)z(x_2)\geq z[\theta\cdot x_1+(1-\theta)x_2] \quad (2.2)$$

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$\min \ z(x)=\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega \quad (1.6)$$

$$f_k^{rs}\geq 0 \quad (1.7)$$

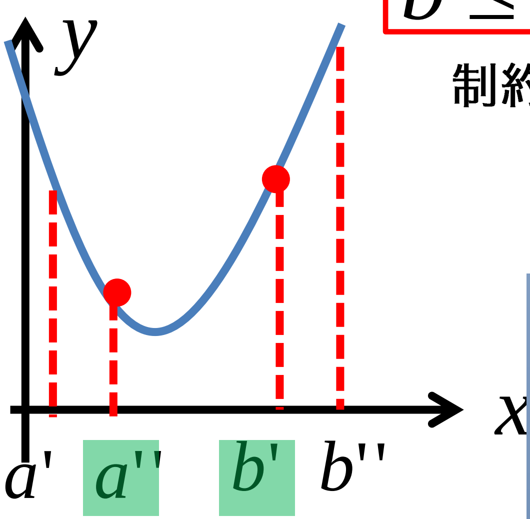
非負制約

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)

どのような制約条件でもいいのか?
何か不都合は起きないのか?

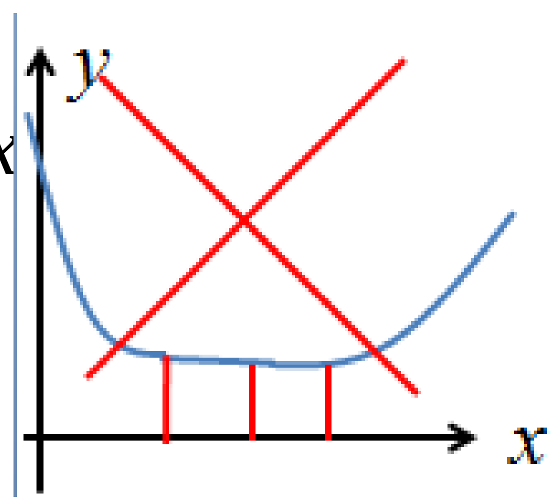
$y = f(x)$

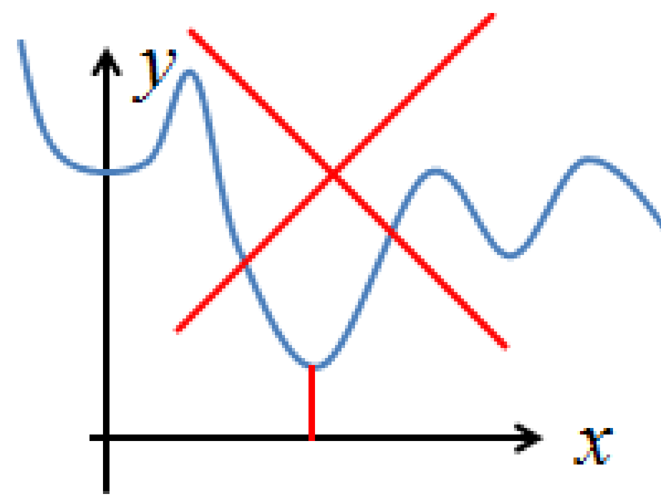


$$\boxed{\begin{array}{l} a' \le x \le a'' \\ b' \le x \le b'' \end{array}}$$

制約式

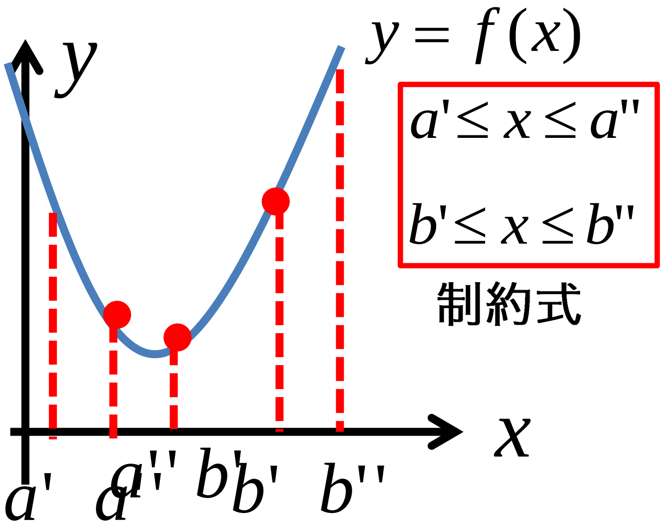
・例えば左図のように関数が制約式内で停留点をもたないとき、制約式の端点が最小値の候補点となる





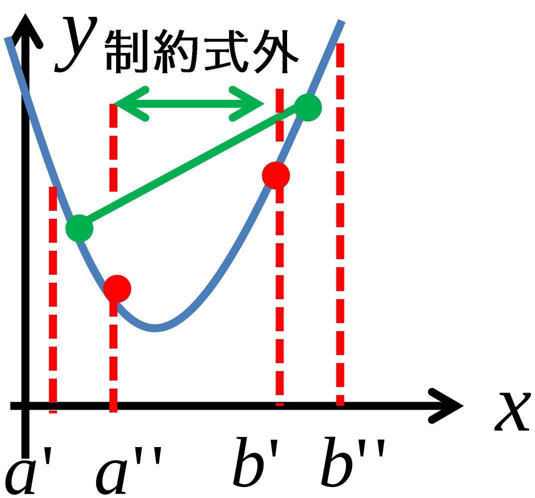
最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)



・直感的には全ての制約式が連続していればいい→$a'' = b'$

・厳密に言うと、制約式が凸集合であればいい



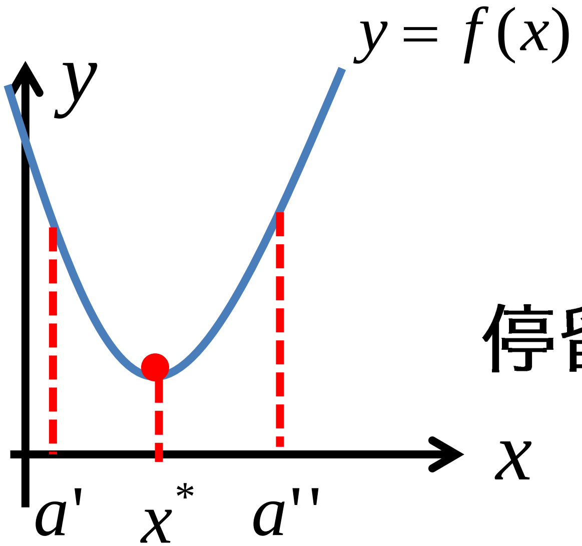
・凸集合とは?
→制約式内の任意の2点を結ぶ線分が制約式内に含まれている

ここで扱う制約式は全て凸集合だとする

最小化問題の基礎概念

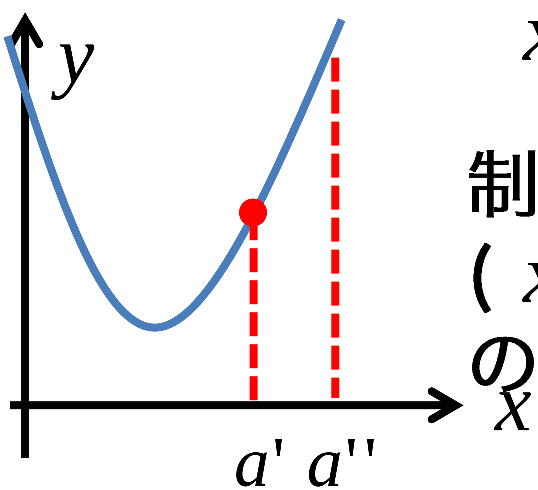
制約有り問題(1変数) → $\boxed{a' \le x \le a''}$

制約式



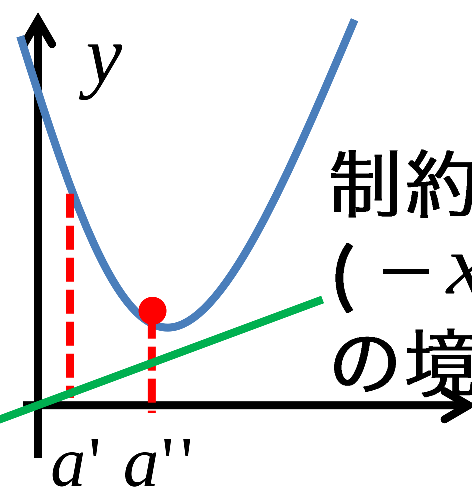
$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

停留点で最小となる



$x = a'$

制約式
($x \ge a'$)
の境界で最小



$x = a''$

制約式
($-x \ge -a''$)
の境界で最小

全ての制約式は$g(x) \ge b$の形で表せる(bは定数)

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)

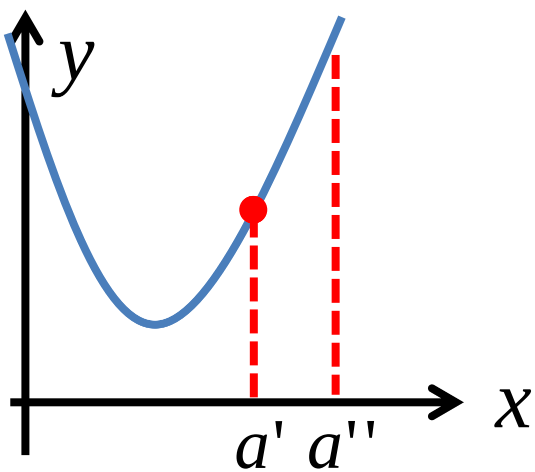
$$a' \le x \le a''$$

$$x \ge a'$$
$$-x \ge -a''$$

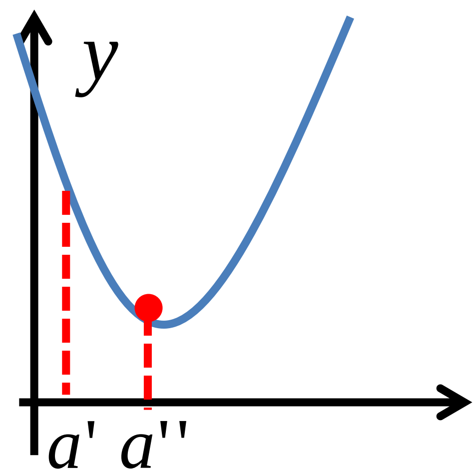
$$\underline{g_1(x) \ge b_1}$$
$$(g_1(x) = x, \quad b_1 = a')$$

$$\underline{g_2(x) \ge b_2}$$
$$(g_2(x) = -x, \quad b_2 = -a'')$$

解となる点での関数に関する微分は?



$$\frac{df(a')}{dx} > 0$$



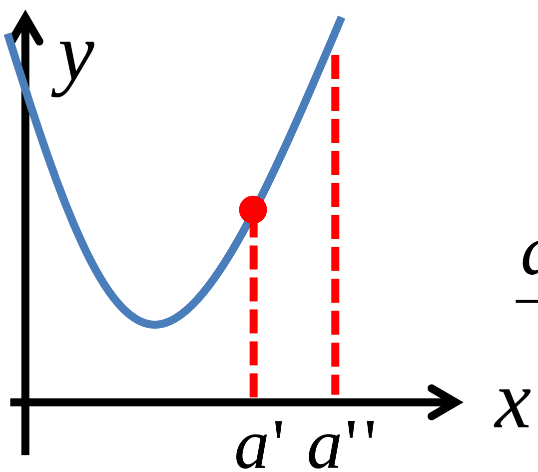
$$\frac{df(a'')}{dx} < 0$$

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)

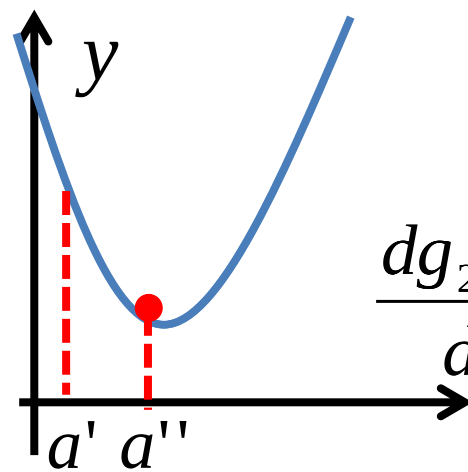
$$a' \leq x \leq a'' \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x \geq a' \\ -x \geq -a'' \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \underline{g_1(x) \geq b_1} \\ (g_1(x) = x, \quad b_1 = a') \\ \underline{g_2(x) \geq b_2} \\ (g_2(x) = -x, \quad b_2 = -a'') \end{array}$$

有効な制約式に関する微分は?



$$\frac{df(a')}{dx} > 0$$

$$\frac{dg_1(x)}{dx} = 1 > 0$$



$$\frac{df(a'')}{dx} < 0$$

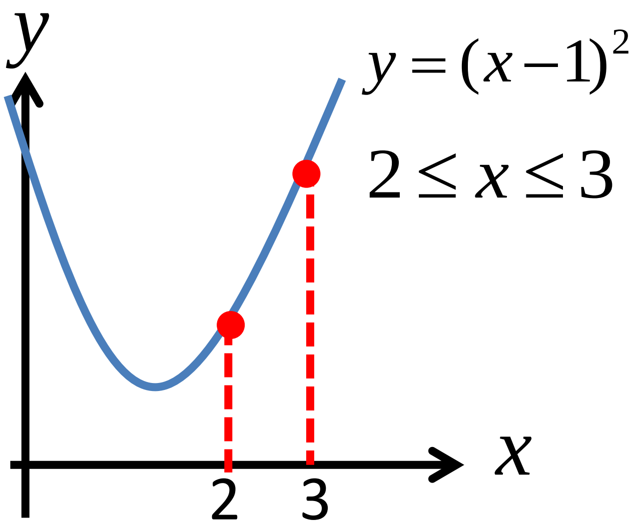
$$\frac{dg_2(x)}{dx} = -1 < 0$$

解での微分値と有効な制約式の微分値の正負が一致している

→解での微分値は制約式の非負の定数倍の和となる

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)



$$2 \le x \le 3$$

$$x \ge 2$$
$$(g_1(x) \ge b_1)$$

$$-x \ge -3$$
$$(g_2(x) \ge b_2)$$

このとき解は $x=2$ のところなので
有効な制約式は $x \ge 2$ である

$$\frac{df(2)}{dx}=2$$

関数に関する微分

$$\frac{dg_1(2)}{dx}=1$$

$$\frac{dg_2(2)}{dx}=-1$$

制約式に関する微分

$$\frac{df(2)}{dx}=2\cdot\frac{dg_1(x)}{dx}+0\cdot\frac{dg_2(x)}{dx}$$

非負の定数

$g_1(x)=b_1$ → 定数は正

$g_2(x)\ne b_2$ → 定数は0

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)

	具体例	一般化
目的関数 →	$y=(x-1)^2$	$y=f(x)$
制約式 →	$2 \le x \le 3$	$g_j \ge b_j,\ \ j=1,\dots,J$
	$x \ge 2$, $-x \ge -3$ $\left(\begin{array}{l} g_1(x) \ge b_1 \\ g_2(x) \ge b_2 \end{array}\right)$	
解となる点 →	$x=2$	$x=x^*$
解となる点で満たされる条件 →	$\dfrac{df(2)}{dx} = 2\cdot\dfrac{dg_1(x)}{dx} + 0\cdot\dfrac{dg_2(x)}{dx}$	$\boxed{\dfrac{df(x^*)}{dx} = \sum_j u_j \dfrac{dg_j(x^*)}{dx}}$
	$g_1(x)=b_1 \rightarrow$ 係数= $2>0$	$u_j[b_j - g_j(x^*)]=0$
	$g_2(x)\ne b_2 \rightarrow$ 係数= 0	$u_j \ge 0$

最小化問題の基礎概念

制約有り問題(1変数)まとめ

$$y = f(x)$$
$$g_j \geq b_j, \quad j = 1, \dots, J$$

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \sum_j u_j \frac{dg_j(x^*)}{dx}$$
$$u_j [b_j - g_j(x^*)] = 0 \qquad (2.6)$$
$$u_j \geq 0$$
$$g_j \geq b_j, \quad j = 1, \dots, J$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad (1.3)$$

等式制約

$$\min \; z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \qquad (1.6)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad (1.7)$$

非負制約

最小化問題の基礎概念

等式制約有り問題(多変数)

具体例

$$z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

目的関数

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = 4}$$

制約式

・目的関数を制約式のもとで最小化する

・一般にこのような等式制約有り最小化問題をとくときに利用されるのがラグランジュの未定乗数法である

まず実際に、どのように解かれるのかやってみる

最小化問題の基礎概念

等式制約有り問題(多変数)

$$z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \longrightarrow g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{L(x_1, x_2, \lambda)} = x_1 + 2x_2 - \boxed{\lambda} \cdot g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

ラグランジュ関数　　　ラグラジュ乗数

最小値の条件

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.9)$$

・全ての変数についてのラグランジュ関数の微分が0になる

・全てのラグランジュ乗数についてのラグランジュ関数の微分が0になる

最小化問題の基礎概念

等式制約有り問題(多変数)

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - \lambda \cdot g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0 \longrightarrow 1 - 2x_1\lambda = 0 \quad ①$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0 \longrightarrow 2 - 2x_2\lambda = 0 \quad ②$$

$$(x_1, x_2) = (\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}})$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow -(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0 \quad ③$$

①～③を3変数の連立方程式として解くことで解を得る

→一般化した場合はどうなるか?

最小化問題の基礎概念

等式制約有り問題(多変数)

	具体例	一般化
目的関数 →	$z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$	$z(X) = z(x_1, x_2, \ldots, x_I)$
制約式 →	$x_1^2 + x_2^2 = 4$ $\left(g_1(x_1, x_2) = b_1\right)$	$g_1(x_1,\ldots x_I) = b_1$ $g_2(x_1,\ldots x_I) = b_2$ $\vdots$ $g_J(x_1,\ldots x_I) = b_J$ → $g_j(X) = b_j \quad j = 1, \ldots, J$
ラグランジュ関数 →	$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$	$L(x_1, x_2, \ldots, x_I, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_J) = z(X) - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j (g_j(X) - b_j)$
解となる点で満たされる条件 →	$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0$ $\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0$ $\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0$	$\frac{\partial L(x_1^*, \ldots, x_I^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_J^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, I$ $\frac{\partial L(x_1^*, \ldots, x_I^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_J^*)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, J$

最小化問題の基礎概念

等式制約有り問題(多変数)

$$L(x_1,x_2,\dots,x_I,\lambda_1,\lambda_2,..\lambda_J)=z(X)-\sum_{j=1}^{J}\lambda_j(g_j(X)-b_j)=z(X)-\sum_{j=1}^{J}(\lambda_j g_j(X)-\lambda_j b_j)$$

$$\frac{\partial L(x_1,..,x_I,\lambda_1,..,\lambda_J)}{\partial x_i}=0 \quad i=1,2,\dots,I \longrightarrow \boxed{\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \quad i=1,2,\dots,I}$$

$$\frac{\partial L(x_1,..,x_I,\lambda_1,..,\lambda_J)}{\partial \lambda_j}=0 \quad j=1,2,\dots,J \longrightarrow \boxed{g_j(X)=b_j \quad j=1,\dots,J}$$

(2.7)

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$\min\ z(x)=\sum\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega \quad (1.6)$$

$$f_k^{rs}\ge 0 \quad (1.7)$$

非負制約

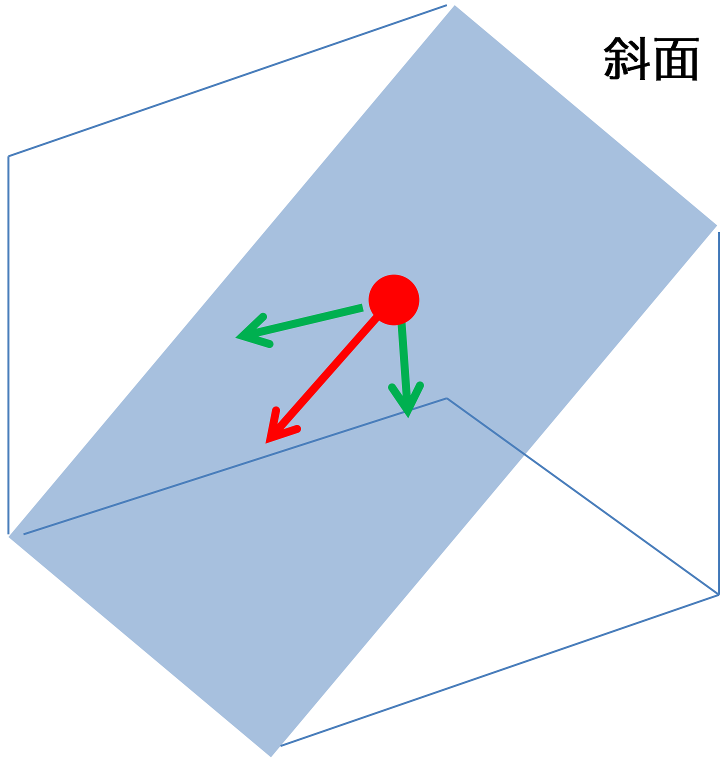
$$g_j\ge b_j,\quad j=1,\dots,J$$

不等式

非負制約の一般形式である不等式制約問題について考える

最小化問題の基礎概念

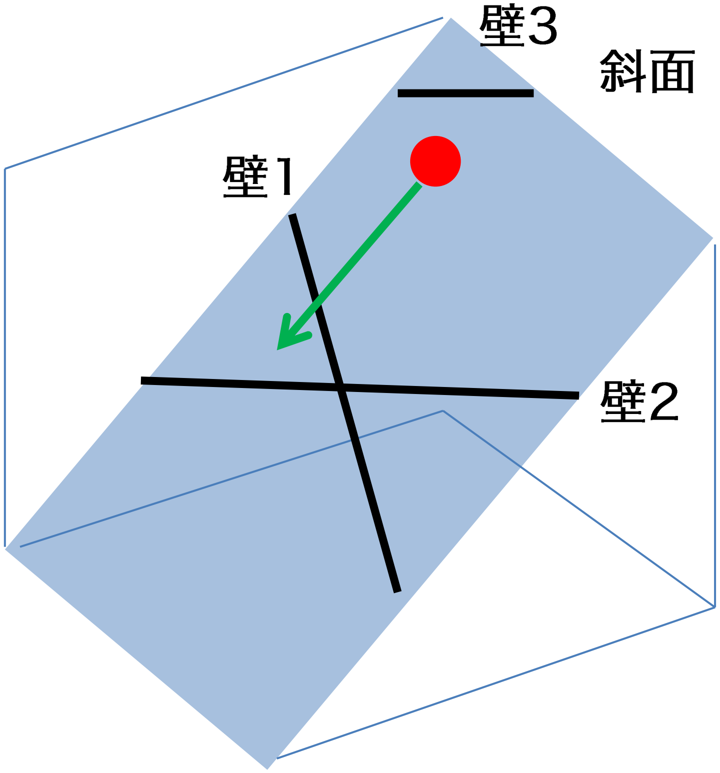
不等式制約有り問題(多変数)



- どの方向が一番下にいけるか?
- 赤矢印が最も下にいける方向である

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)

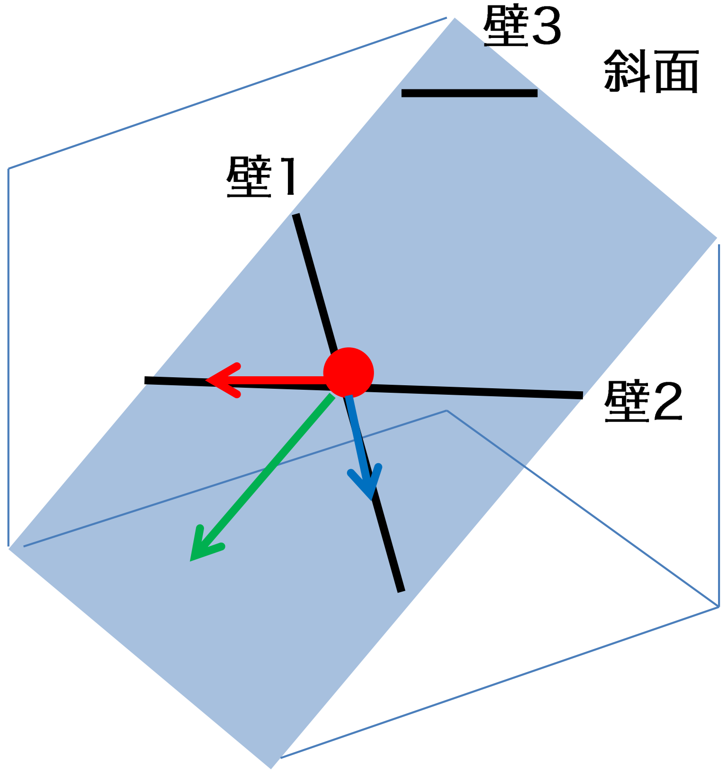


斜面上にいるとき
どの方向が一番下にいけるか?

壁がないとき
→緑矢印が最も下にいける方向

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)



壁があるときの一番下にあるとき
どの方向が一番下にいけるか?

壁1について
→赤矢印が最も下にいける方向

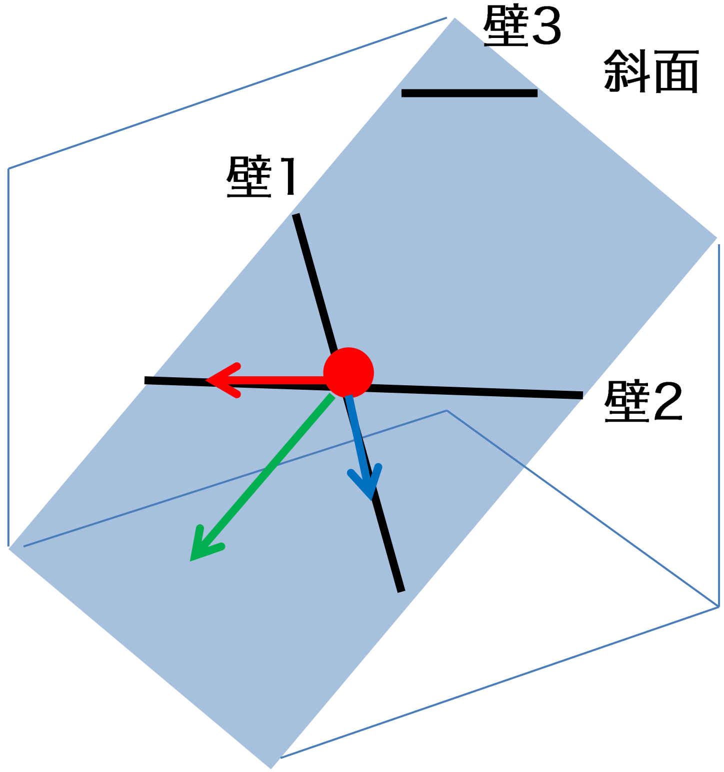
壁2について
→青矢印が最も下にいける方向

壁がないとき
→緑矢印が最も下にいける方向

緑矢印は赤矢印と青矢印に挟まれる

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)



斜面=目的関数

$$z(X) = z(x_1, x_2, \ldots, x_I)$$

壁=不等式制約

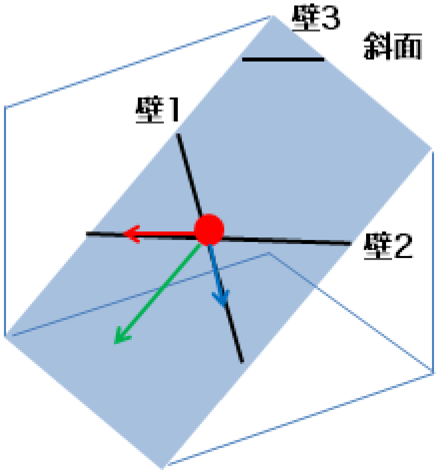
$$g_j(X) = b_j \quad j = 1, \ldots, J$$

有効な制約式=壁1,2
有効でない制約式=壁3

矢印=勾配ベクトル
→目的関数の傾き具合
→目的関数の微分

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)



緑矢印は赤矢印と青矢印に挟まれる

最小値での目的関数の勾配ベクトル
=最小値での<u>有効な</u>制約式の勾配ベクトルの和

最小値での目的関数の勾配ベクトル

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} \quad i = 1,2,.., I$$

最小値での<u>有効な</u>制約式の勾配ベクトルの和

$$\sum_{j=1}^{J} \boxed{u_j} \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \qquad \underline{u_j[b_j - g_j(X^*)] = 0} \quad j = 1,2,..., J$$

定数

有効な制約式のとき　$b_j - g_j(X^*) = 0$ で、$u_j > 0$

有効でない制約式のとき　$b_j - g_j(X^*) \neq 0$ で、$u_j = 0$

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)

$$\min \quad z(X) = z(x_1, x_2, \ldots, x_I)$$

$g_j(X$

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \sum_j u_j \frac{dg_j(x^*)}{dx}$$

$$u_j[b_j - g_j(x^*)] = 0 \qquad (2.6)$$

$$u_j \geq 0$$

$$g_j \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, J$$

双対定数

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{J} \boxed{u_j} \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \qquad i = 1,2,..,I$$

$$u_j \geq 0 \quad u_j[b_j - g_j(X^*)] = 0 \;\; g_j(X) \geq b_j \quad j = 1,2,..,J \qquad (2.8)$$

これを**KKT条件**(Karush Kuhn Tucker)という

最小化問題の基礎概念

不等式制約有り問題(多変数)

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{J} u_j \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \quad i = 1,2,.., I$$

$$u_j \geq 0 \quad u_j[b_j - g_j(X^*)] = 0 \;\; g_j(X) \geq b_j \quad j = 1,2,.., J$$

(2.8)

$g_j(X) = b_j \quad j = 1,2,.., J$ のとき(2.8)式は

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{J} \boxed{u_j} \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \quad i = 1,2,.., I$$

$$u_j \geq 0 \qquad g_j(X) = b_j \quad j = 1,2,.., J$$

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{J} \boxed{\lambda_j} \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} \quad i = 1,2,..., I$$

$$g_j(X) = b_j \quad j = 1,..., J$$

(2.7)

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (1.7)$$

非負制約

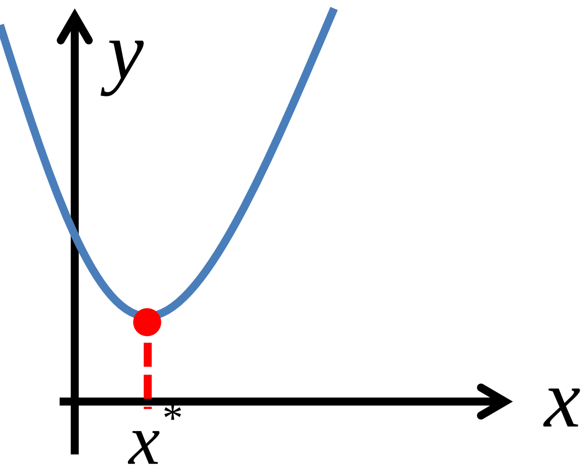
$$\min \; z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

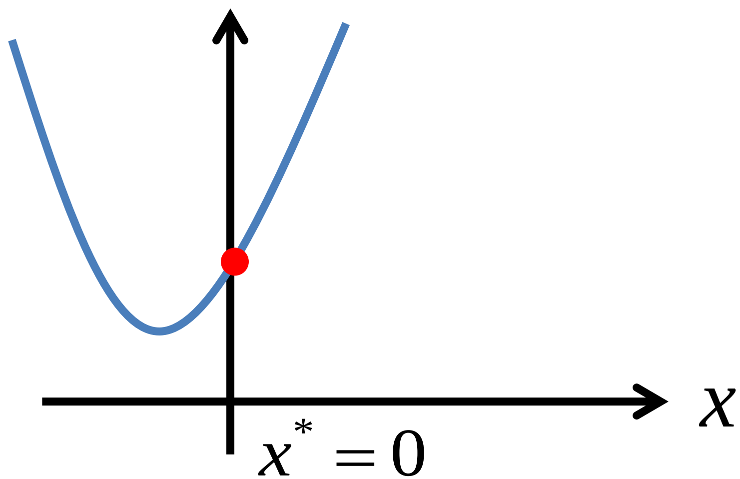
(1.6)

最小化問題の基礎概念

非負制約問題

$$\min \quad z(X)=z(x_1,x_2,..,x_I) \quad x_i \geq 0 \;\; i=1,...I$$





$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i}=0$$

・解は停留点 or$X^*=0$
・解の右側では必ず右上がりの曲線になる

$$x_i^*\frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i}=0 \;\; and \;\; \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i}\geq 0$$

$$i=1,2,..,I \qquad (2.9)$$

最小化問題の基礎概念

非負制約+等式制約

$$\min\ z(X) = z(x_1, x_2, .., x_I)$$

$$\sum_i h_{ij} x_i = b_j \quad j = 1, \dots J \quad (h_{ij}\text{は定数})$$

等式制約

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots I$$ 非負制約

$$L(x_1, x_2, \dots, x_I, u_1, u_2, .., u_J)$$
$$= z(X) - \sum_{j=1}^{J} u_j \left(\sum_{i=1}^{I} h_{ij} x_i - b_j \right)$$

各制約式についての
ラグランジュ乗数

非負制約の最小化条件

$$x_i^* \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad and \quad \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i} \geq 0$$

$$i = 1, 2, .., I$$

ラグランジュ関数に非負制約が
ついたと考えると

等式制約の最小化条件

$$\frac{\partial L(x_1^*, .., x_I^*, u_1^*, .., u_J^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, .., x_I^*, u_1^*, .., u_J^*)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \tag{2.10}$$

$$x_i^* \frac{\partial L(X^*, U^*)}{\partial x_i} = 0 \quad and \quad \frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} \geq 0 \qquad i = 1, 2, .., I \quad U = (u_1, .., u_J) \tag{2.11}$$

最小化問題の基礎概念

非負制約+等式制約

(2.10),(2.11)を合わせると

$$L(x_1, x_2, ..., x_I, u_1, u_2, .., u_J) = z(X) - \sum_{j=1}^{J} u_j (\sum_{i=1}^{I} h_{ij} x_i - b_j)$$

$$x^* \cdot \frac{\partial L(X^*, U^*)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.12) \qquad \frac{\partial z(X^*, U^*)}{\partial x_i} \geq 0 \quad (2.13) \qquad \frac{\partial L(X^*, U^*)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (2.14)$$

$$x_i^* (\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} - \sum_j u_{ij} h_{ij}) = 0$$

(2.12)より

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

(1.6)

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (1.7)$$

非負制約

$$x_i^* \geq 0 \quad (2.15)$$

配分問題の数学的問題への定式化

(1.2)よりリンクフローはパスフローの関数として表せるので

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$$\frac{\partial x_a(f)}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} = \delta_{a,l}^{mn} \quad (3.1)$$

m:起点ノード n:終点ノード l:パス

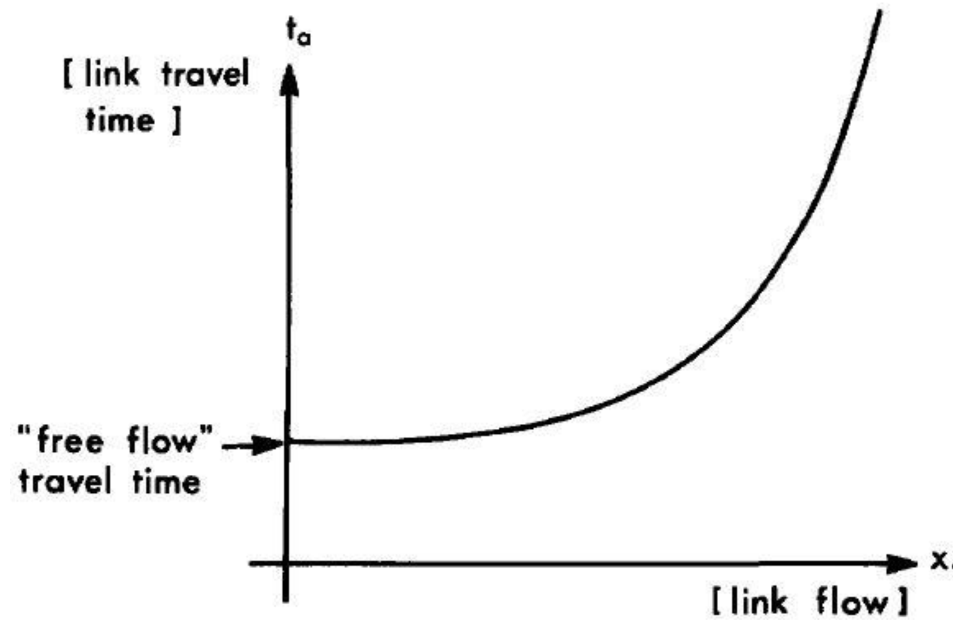
$$\because \partial f_k^{rs} \big/ \partial f_l^{mn} = 0 \quad if\ r-s \neq m-n \ \ or\ k \neq l$$

あるリンクフローは別のリンクフローに影響を受けない、リンクパフォーマンス関数が下図のような形(凸関数)だとすると(3.2)が成立する

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_b} = 0 \quad a \neq b$$

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} > 0$$

(3.2)



配分問題の数学的問題への定式化

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (1.3)$$

等式制約

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (1.7)$$

非負制約

$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

(1.6)

このとき(2.15)

$$x_i^* \left(\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} - \sum_j u_{ij} h_{ij} \right) = 0$$

$$\frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} - \sum_j u_{ij} h_{ij} \geq 0$$

$$\sum_i h_{ij} x_i^* = b_i$$

$$x_i^* \geq 0$$

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(f,u)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial L(f,u)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \quad (3.12)$$

(3.3)をパスフローで微分

$$\frac{\partial L(f,u)}{\partial u_{rs}} = 0 \quad (3.13)$$

(3.3)を双対係数で微分

配分問題の数学的問題への定式化

(3.9)をパスフローで微分

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} L(f,u) = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} z[x(f)] + \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} z[x(f)] = \sum_b \frac{\partial z(x)}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial f_l^{mn}} \qquad b: \text{リンクを表す}(a\text{と同様}) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b} \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega = t_b \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial x_b}{\partial f_l^{mn}} = \delta_{b,l}^{mn} \quad \because (3.1) \quad (3.17)$$

(3.14)に(3.16)、(3.17)を代入して

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} z[x(f)] = \sum_b t_b \delta_{b,l}^{mn} = c_l^{mn} \quad \because (3.1) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right) = -u_{mn} \quad \because q_{rs}\text{は定数で}, u_{rs}\text{は}f_l^{mn}\text{の関数でない} \quad (3.19)$$

配分問題の数学的問題への定式化

(3.12)に(3.16),(3.17)を代入して

$$\frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} L(f,u) = c_l^{mn} - u_{mn} \quad (3.20)$$

(3.12)を双対係数で微分すると

$$\frac{\partial L(f,u)}{\partial u_{rs}} = q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \quad (3.21)$$

(3.11)～(3.13)に(3.20),(3.21)を代入すると

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad (3.22)$$

$$c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (3.24)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad (3.25)$$

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(f,u)}{\partial f_k^{rs}} = 0$$

$$\frac{\partial L(f,u)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$\frac{\partial L(f,u)}{\partial u_{rs}} = 0$$

配分問題の数学的問題への定式化

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0$$

$$c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

フロー数制約

$$f_k^{rs} \geq 0$$

最適化問題の解

以上から均衡配分問題を右のように定式化すれば、その解は利用者均衡配分を満たしていることを証明できた

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - c_{\min}) = 0$$

$$c_k^{rs} - c_{\min} \geq 0$$

$(c_{\min} : r - s$間最短旅行時間)

利用者均衡のとき満たされていなければいけない式

$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

$$\boxed{\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad f_k^{rs} \geq 0}$$

制約式