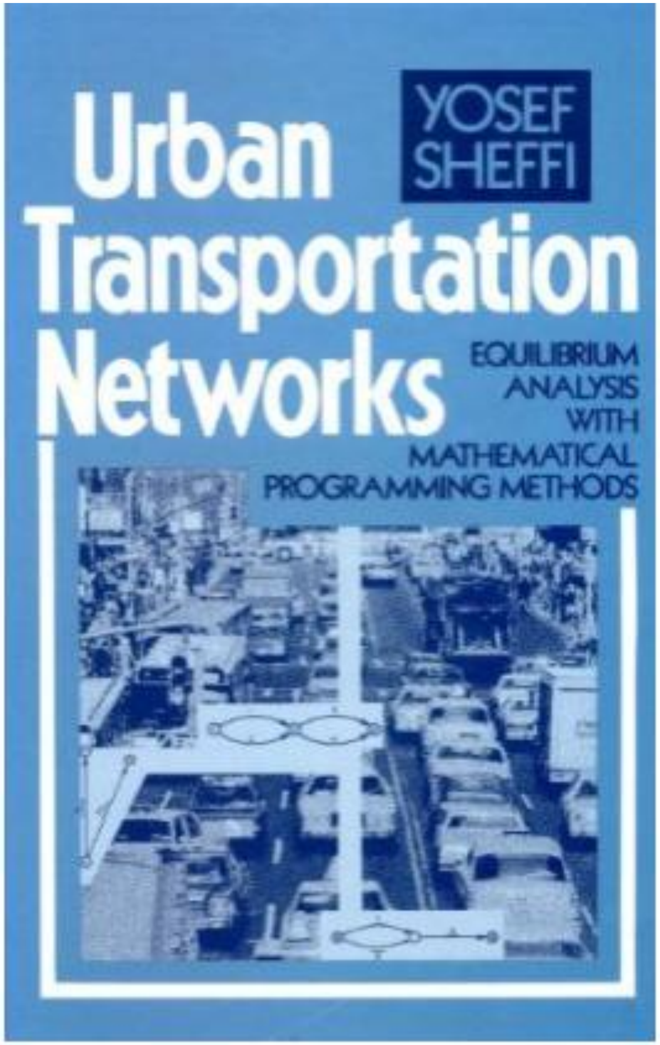
URBAN TRANSPORTATION NETWORKS

Author: Yossi Sheffi

: Prentice Hall, October 1985



M1　今泉孝章

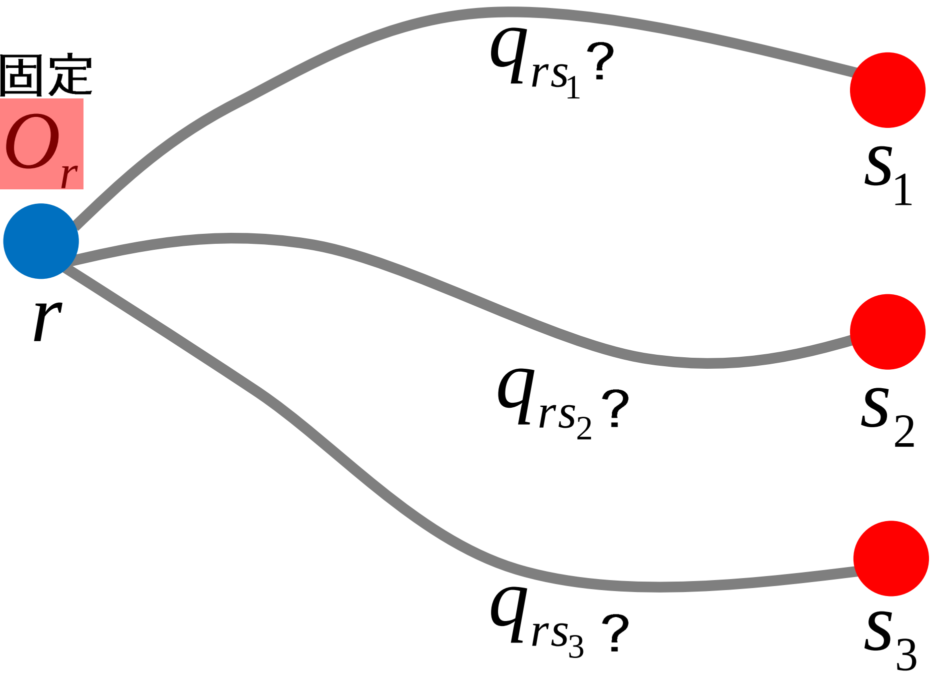
Sheffiゼミ

2013/5/21(火)

トリップ分布/配分モデル

各出発地 r から出発する旅行者数が固定(一定)されている場合を考える

r から O_r 人の旅行者が出発する



a :ネットワーク上のリンク

r :起点ノード

s :終点ノード

k :OD間のパス

x_a :リンク a 上のフロー数

c_k^{rs} :起点 r と終点 s を結ぶパス k 上の旅行時間

$\delta_{a,k}^{rs}$:リンク a が起点 r と終点 s を結ぶパス k に含まれているとき1,そうでないとき0のダミー変数

q_{rs} :起点 r と終点 s を結ぶトリップ数

t_a :リンク a 上の旅行時間

f_k^{rs} :起点 r と終点 s を結ぶパス k 上のフロー数

$$\underline{O_r = q_{rs_1} + q_{rs_2} + q_{rs_3}}$$

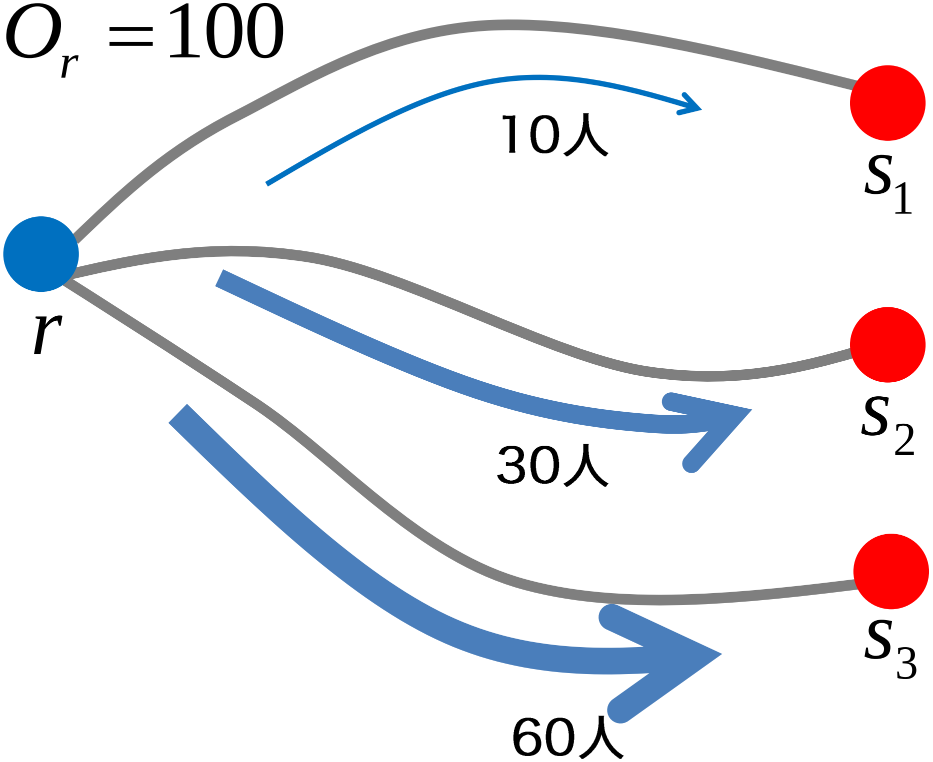
➡

$$O_r = \sum_s q_{rs} \quad (7.1)$$

出発地 r から全ての到着地 S への旅行者数の合計が O_r のときに各到着地へ何人の人が向かうのか?

トリップ分布/配分モデル

$O_r = 100$



全く混雑のない状態で

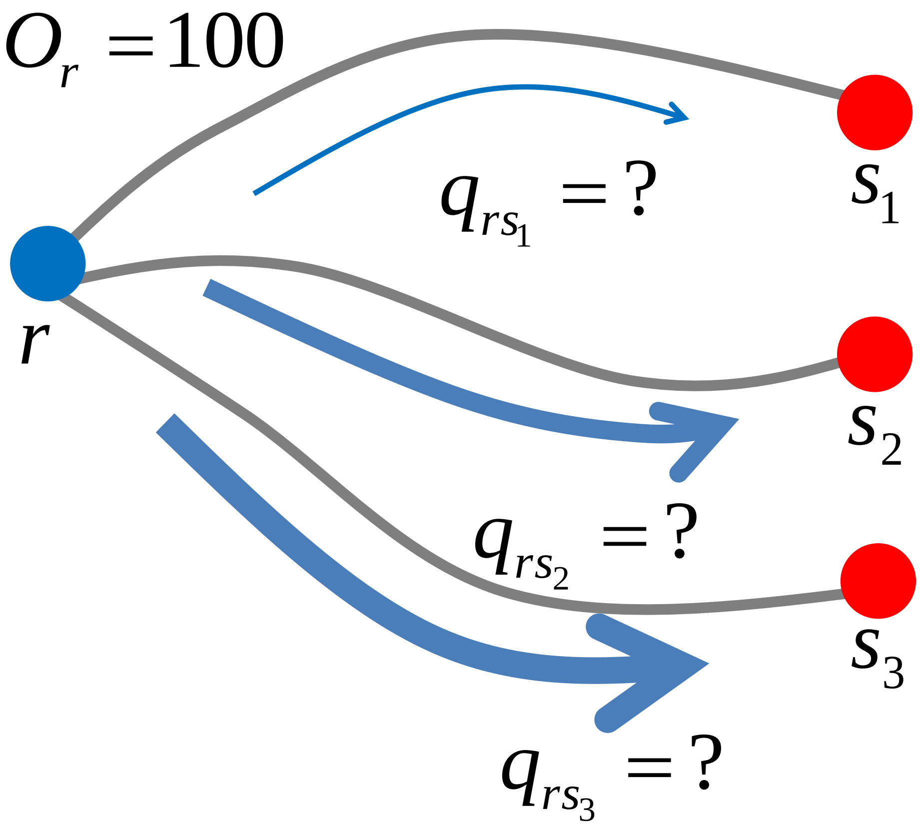
$r \rightarrow s_1$ 100分

$r \rightarrow s_2$ 30分

$r \rightarrow s_3$ 10分

時間がかかるところにはそんなに人は行かない

トリップ分布/配分モデル



$r \rightarrow s_1$ 50分 $P_{rs_1}(50) = 1/5$

$r \rightarrow s_2$ 30分 $P_{rs_2}(30) = 3/10$

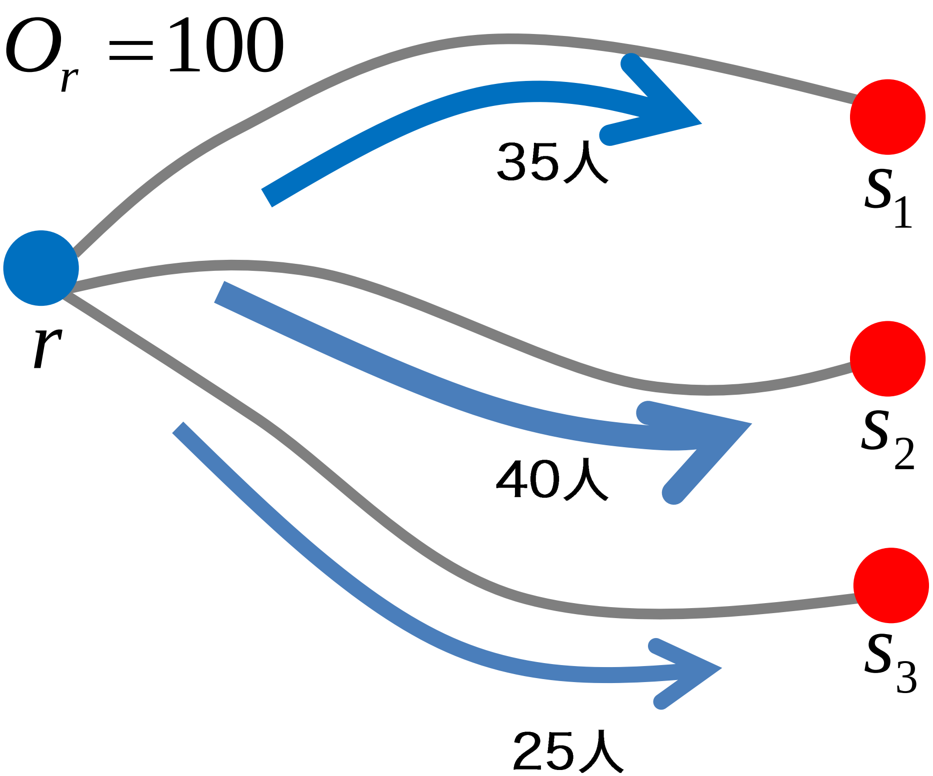
$r \rightarrow s_3$ 20分 $P_{rs_3}(20) = 1/2$

$$q_{rs_1} = 100 \cdot P_{rs_1}(50) = 20$$

$$q_{rs_2} = 100 \cdot P_{rs_2}(30) = 30$$

$$q_{rs_3} = 100 \cdot P_{rs_3}(20) = 50$$

トリップ分布/配分モデル



全く混雑のない状態で

$r \to s_1$ 100分　ディズニーランド

$r \to s_2$ 30分　高島屋

$r \to s_3$ 10分　コンビニ

時間がかかっても魅力がある場所には人は集まる
→時間と、到着地の魅力によって人数が決定する
→時間-魅力を考慮して行動している?

トリップ分布/配分モデル

定式化

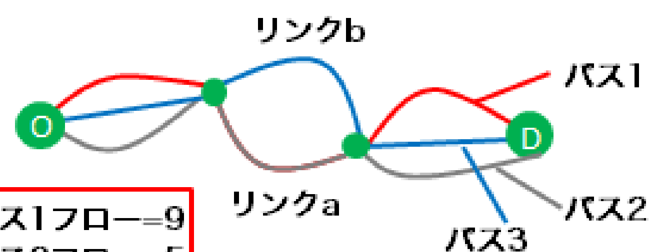
各到着地 S の魅力度を M_s とする

$$\min\ z(x,q)=\underbrace{\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega}_{\text{ネットワーク上の全リンクの旅行時間の和}}-\underbrace{\sum_{rs}M_s q_{rs}}_{\text{全ての旅行者の消費する魅力の総和}} \qquad (7.2)$$

$$\boxed{\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \qquad\qquad f_k^{rs}\geq 0 \qquad (1.7)}$$

$$\sum_k \boxed{f_k^{rs}} = \boxed{q_{rs}} \qquad (1.3)$$

未知　所与



パス1フロー=9
パス2フロー=5
パス3フロー=3

OD間フロー数=パス1フロー数+パス2フロー数+パス3フロー数
=9+5+3=17

トリップ分布/配分モデル

実際に解いてみる

・まず等式制約(1.7),(7.1)があるので、ラグランジュの未定乗数法によりラグランジュ関数をつくる

$$L(X,Q,U,\mathrm{M}) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$$+ \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}\right) + \sum_r \mu_r\left(O_r - \sum_s q_{rs}\right)$$

u_{rs}：(1.7)に対応するラグランジュ乗数

μ_r：(7.1)に対応するラグランジュ乗数

$$\boxed{\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, \ldots, x_i) \\ Q &= (q_1, q_2, \ldots, q_{r\cdot s}) \\ U &= (u_1, u_2, \ldots, u_{r\cdot s}) \\ \mathrm{M} &= (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r\cdot s}) \end{aligned}}$$

$$\boxed{f_k^{rs} \geq 0 \quad q_{rs} \geq 0}$$ 非負制約

このラグランジュ関数を非負制約の下で最小化する

最小化問題の基礎概念

非負制約+等式制約

$$\min\ z(X) = z(x_1, x_2, .., x_I)$$

$$\sum_i h_{ij} x_i = b_j \quad j = 1,...J \quad (h_{ij}\text{は定数})$$

等式制約

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,...I$$

非負制約

$$L(x_1, x_2, ..., x_I, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_J)$$

$$= z(X) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{I} h_{ij} x_i - b_j \right)$$

各制約式についての
ラグランジュ乗数

等式制約の最小化条件

$$\frac{\partial L(x_1^*, .., x_I^*, u_1^*, .., u_J^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,..., I$$

$$\frac{\partial L(x_1^*, .., x_I^*, u_1^*, .., u_J^*)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad j = 1,2,..., J$$

(2.10)

非負制約の最小化条件

$$x_i^* \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad and \quad \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i} \geq 0$$

$$i = 1,2,.., I$$

ラグランジュ関数に非負制約が
ついたと考えると

$$x_i^* \frac{\partial L(X^*, U^*)}{\partial x_i} = 0 \quad and \quad \frac{\partial z(X^*)}{\partial x_i} \geq 0 \qquad i = 1,2,.., I \quad U = (u_1, ..., u_J)$$

(2.11)

トリップ分布/配分モデル

$$L(X,Q,U,\mathrm{M}) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$$+ \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}\right) + \sum_r \mu_r\left(O_r - \sum_s q_{rs}\right)$$

(1.7)に対応する
ラグランジュ乗数

(7.1)に対応する
ラグランジュ乗数

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$$
$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{r\cdot s})$$
$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_{r\cdot s})$$
$$\mathrm{M} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r\cdot s})$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad q_{rs} \geq 0$$ 非負制約

先の式中のx_i が今回の場合 f_k^{rs} ,$q_{r\cdot s}$ に対応し、λ_j が $u_{r\cdot s}$, $\mu_{r\cdot s}$ に対応する

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad (7.3) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \quad (7.4)$$

$$q_{rs} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} = 0 \quad (7.5) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} \geq 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}} = 0 \quad (7.7) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r} = 0 \quad (7.8)$$

トリップ分布/配分モデル

$$L(X,Q,U,\mathrm{M}) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$$+ \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}) + \sum_r \mu_r(O_r - \sum_s q_{rs})$$

(1.7)に対応する
ラグランジュ乗数

(7.1)に対応する
ラグランジュ乗数

$$\boxed{\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, \ldots, x_i) \\ Q &= (q_1, q_2, \ldots, q_{r\cdot s}) \\ U &= (u_1, u_2, \ldots, u_{r\cdot s}) \\ \mathrm{M} &= (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r\cdot s}) \end{aligned}}$$

$$\boxed{f_k^{rs} \geq 0 \quad q_{rs} \geq 0}$$ 非負制約

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} = c_k^{rs} - u_{rs}$$ ((3.20)より)

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} = -M_s + u_{rs} - \mu_r$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}} = q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r} = O_r - \sum_s q_{rs}$$

代入

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad (7.3) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \quad (7.4)$$

$$q_{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} = 0 \quad (7.5) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} \geq 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}} = 0 \quad (7.7) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r} = 0 \quad (7.8)$$

トリップ分布/配分モデル

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad (7.9) \qquad c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0 \quad (7.10)$$

$$q_{rs}[(u_{rs} - M_s) - \mu_r] = 0 \quad (7.11) \qquad (u_{rs} - M_s) - \mu_r \geq 0 \quad (7.12)$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad (7.13) \qquad \sum_s q_{rs} = O_r \quad (7.14) \qquad f_k^{rs} \geq 0 \quad (7.14)$$

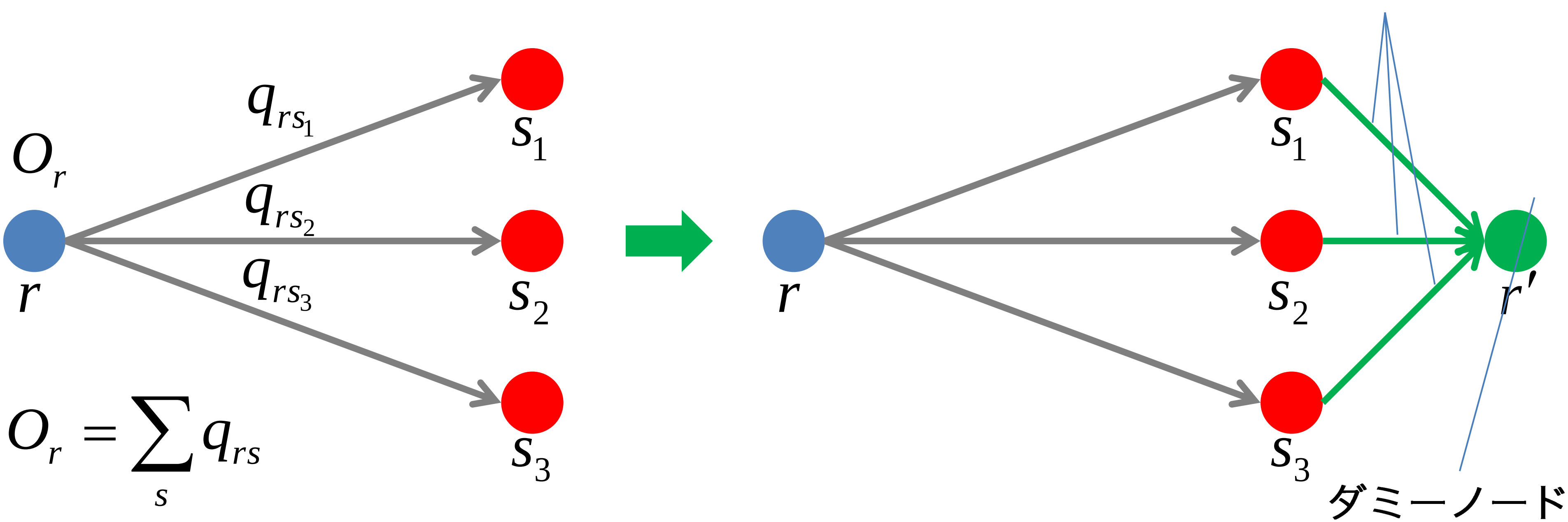
(7.9),(7.10)は通常の均衡配分問題のときと同様
→使用パス旅行時間は不使用パス旅行時間以上

(7.12)によれば $(u_{rs} - M_s) \geq \mu_r$ で $u_{rs} - M_s$ は(旅行時間-魅力度)の旅行抵抗
→(7.11)と合わせて考えれば人が行ってない到着地($q_{rs} = 0$)ではその旅行抵抗は必ず最小値 μ_r 以上で、人が行っている到着地($q_{rs} \geq 0$)ではその旅行時間は最小値 μ_r となる

旅行時間と同様に旅行抵抗についても利用者均衡配分と同様な状態の時に均衡に達している

トリップ分布/配分モデル

ネットワーク表現による解法



各ダミーリンクの旅行時間 $r - s_1 \rightarrow -Ms_1$

$r - s_2 \rightarrow -Ms_2$

$r - s_3 \rightarrow -Ms_3$

このとき r から r' へ向かう旅行者数は明らかに O_r

$$\min \ z(x,q) = \overbrace{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega}^{\text{通常ネットワーク}} - \overbrace{\sum_{rs} M_s q_{rs}}^{\text{ダミーネットワーク}}$$

$$O_r = \sum_s q_{rs} \quad \sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad f_k^{rs}, q_{rs} \geq 0$$

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分

需要変動型のようにOD間フロー数を旅行時間の関数で表現

$$q_{rs} = D_{rs}(u_{rs}) \quad (7.15)$$

かつ各出発地 r から出発する旅行者数が固定(一定)されている場合を考える

$$\underset{\text{固定}}{O_r} = \sum_s q_{rs} = \sum_s D_{rs}(u_{rs}) \quad (7.16)$$

$O_r \geq q_{rs}$ は常に成り立っていな

$$q_{rs} = O_r P_{rs}(u_r)$$

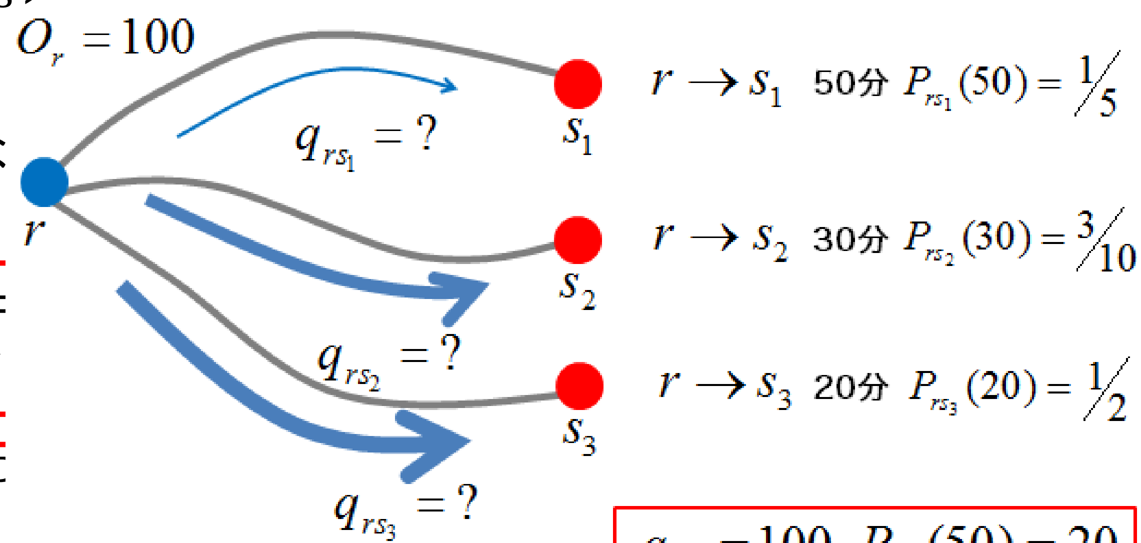
$u_r =$
OD間

$0 \leq P$

旅行時
r ー

一般的に

$$q_{rs} = O_r \frac{e^{-\gamma(u_{rs}-M_s)}}{\sum_{\forall m} e^{-\gamma(u_{rm}-M_m)}} \quad (7.17)$$



$$q_{rs_1} = 100 \cdot P_{rs_1}(50) = 20$$
$$q_{rs_2} = 100 \cdot P_{rs_2}(30) = 30$$
$$q_{rs_3} = 100 \cdot P_{rs_3}(20) = 50$$

トリップ分布/配分モデル

$$q_{rs} = O_r P_{rs}(u_r) \quad \Rightarrow \quad q_{rs} = O_r \boxed{\frac{e^{-\gamma(u_{rs}-M_s)}}{\sum_{\forall m} e^{-\gamma(u_{rm}-M_m)}}}$$

m :全ての目的地
M_s:目的地 s の魅力度
γ :パラメータ

定式化した問題を解いたときに

このとき**目的地需要関数を用いた分布/配分問題**を(7.17)のように定式化する

$$\min z(X,Q) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega + \boxed{\frac{1}{\gamma}\sum_{rs}(q_{rs}\ln q_{rs} - q_{rs})} - \sum_{rs} M_s q_{rs} \quad (7.18)$$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$

$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{r\cdot s})$

γ :パラメータ

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_k f_k^{rs} &= q_{rs} \\ \sum_s q_{rs} &= O_r \\ f_k^{rs} &\geq 0 \end{aligned}}$$

制約式

問題を解いたときに利用者均衡条件、発生フロー数制約が満たされていればよい

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分

$$L(X,Q,U,\mathrm{M}) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega + \frac{1}{\gamma}\sum_{rs}(q_{rs}\ln q_{rs} - q_{rs}) - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$$+\sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}) + \sum_r \mu_r (O_r - \sum_s q_{rs}) \quad (7.19)$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$$
$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{r\cdot s})$$
$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_{r\cdot s})$$
$$\mathrm{M} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r\cdot s})$$

$$L(X,Q,U,\mathrm{M}) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$$+\sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_{rs} f_k^{rs}) + \sum_r \mu_r (O_r - \sum_s q_{rs})$$

u_{rs}：(1.7)に対応するラグランジュ乗数

μ_r：(7.1)に対応するラグランジュ乗数

$$f_k^{rs} \ge 0 \quad q_{rs} \ge 0$$ 非負制約

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad (7.3) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}} \ge 0 \quad (7.4)$$

$$q_{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} = 0 \quad (7.5) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}} \ge 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}} = 0 \quad (7.7) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r} = 0 \quad (7.8)$$

新しく入った項は変数はq_{rs}のみ→(7.5),(7.6)以外は変化なし

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}}=0 \quad (7.3) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}}\geq 0 \quad (7.4)$$

$$q_{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}}=0 \quad (7.5) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}}\geq 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}}=0 \quad (7.7) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r}=0 \quad (7.8)$$

利用者均衡は満たされている

$$f_k^{rs}(c_k^{rs}-u_{rs})=0 \quad (7.9) \qquad c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0 \quad (7.10)$$

$$q_{rs}[(u_{rs}-M_s)-\mu_r]=0 \quad (7.11) \qquad (u_{rs}-M_s)-\mu_r\geq 0 \quad (7.12)$$

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \quad (7.13) \qquad \sum_s q_{rs}=O_r \quad (7.14) \qquad f_k^{rs}\geq 0 \quad (7.14)$$

フロー数制約は満たされている

$$L(X,Q,U,\mathrm{M})=\sum_a\int_0^{t_a}t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\gamma}\sum_{rs}(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs})-\sum_{rs}M_sq_{rs}$$
$$+\sum_{rs}u_{rs}(q_{rs}-\sum_{rs}f_k^{rs})+\sum_r\mu_r(O_r-\sum_s q_{rs})$$

※ $$\frac{d(x\log x)}{dx}=\frac{d(x)}{dx}\log x+x\frac{d(\log x)}{dx}$$
$$=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$q_{rs}\left(\frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}\right)=0 \qquad \frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}\geq 0$$

このとき q_{rs} が log 内にあるので0にはなりえない→ $$\boxed{\frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}=0}$$

$$\boxed{q_{rs}=e^{-\gamma(u_{rs}-M_s-\mu_r)} \quad (7.20)}$$

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分

$$q_{rs} = e^{-\gamma(u_{rs} - M_s - \mu_r)} \quad (7.20) \quad \Rightarrow \quad O_r = \sum_s q_{rs} = \sum_s e^{-\gamma(u_{rs} - M_s - \mu_r)}$$

$$\frac{q_{rs}}{O_r} = \frac{e^{-\gamma(u_{rs} - M_s - \mu_r)}}{\sum_m e^{-\gamma(u_{rm} - M_m - \mu_r)}} = \frac{e^{-\gamma(u_{rs} - M_s)}}{\sum_m e^{-\gamma(u_{rm} - M_m)}} \quad \Rightarrow \quad q_{rs} = O_r \frac{e^{-\gamma(u_{rs} - M_s)}}{\sum_{\forall m} e^{-\gamma(u_{rm} - M_m)}} \quad (7.17)$$

以上から目的利需要関数を用いた分布/配分問題は

$$q_{rs} = O_r P_{rs}(u_r) = O_r \frac{e^{-\gamma(u_{rs} - M_s)}}{\sum_{\forall m} e^{-\gamma(u_{rm} - M_m)}}$$ とおいて

$$\min z(X, Q) = \sum_a \int_0^{t_a} t_a(\omega) d\omega + \frac{1}{\gamma} \sum_{rs} (q_{rs} \ln q_{rs} - q_{rs}) - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$

$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{r \cdot s})$

γ :パラメータ

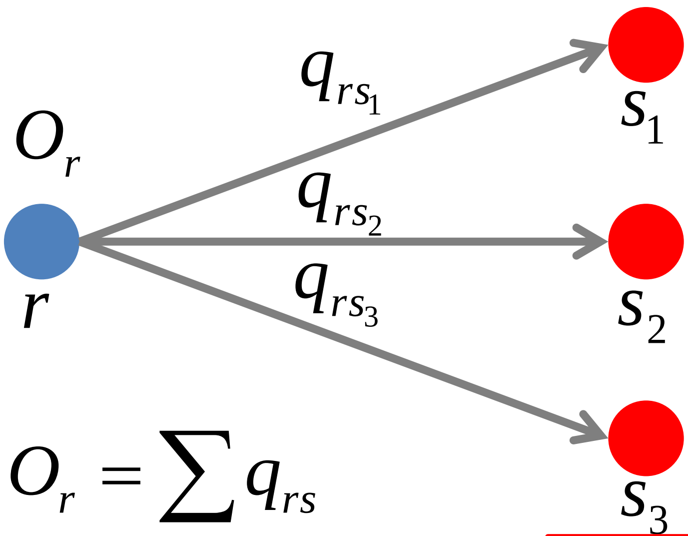
$$\boxed{\begin{aligned} \sum_k f_k^{rs} &= q_{rs} \\ \sum_s q_{rs} &= O_r \\ f_k^{rs} &\geq 0 \end{aligned}}$$

制約式

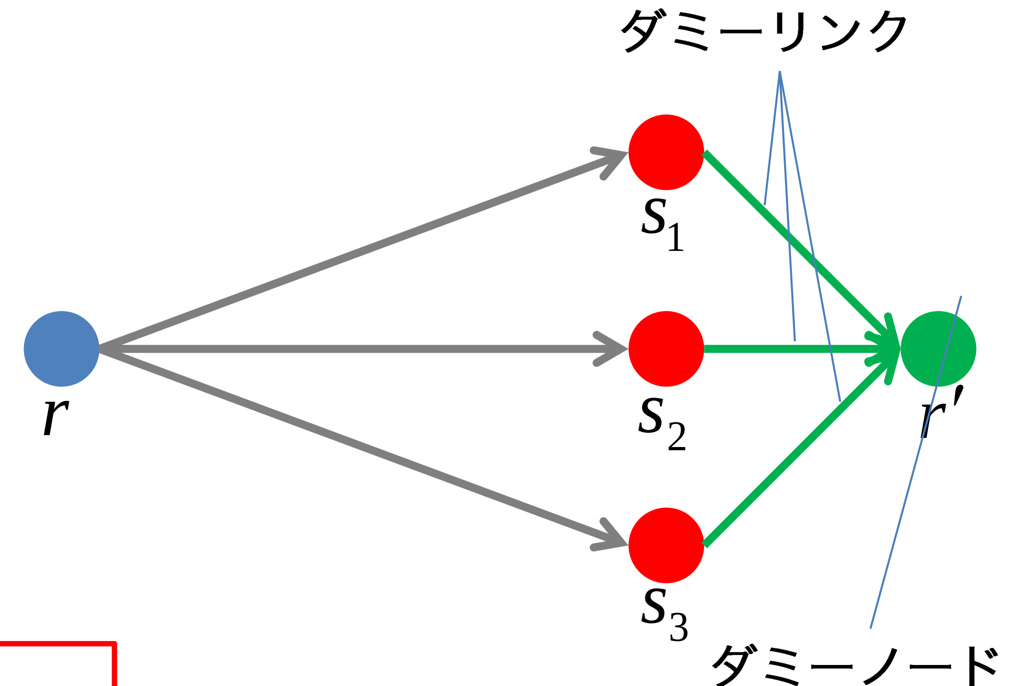
と定式化すれば解いたときに発生フロー制約、利用者均衡が満たされることが分かった

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分



$$O_r = \sum_s q_{rs}$$



ダミーノードの旅行時間

$$\boxed{\begin{aligned} t_{s_1 r'} &= \frac{1}{\gamma}\ln q_{rs_1} - M_{s_1} \\ t_{s_2 r'} &= \frac{1}{\gamma}\ln q_{rs_2} - M_{s_2} \\ t_{s_3 r'} &= \frac{1}{\gamma}\ln q_{rs_3} - M_{s_3} \end{aligned}}$$

ダミーリンク旅行時間関数

$$r - s_1 \rightarrow -Ms_1$$
$$r - s_2 \rightarrow -Ms_2$$
$$r - s_3 \rightarrow -Ms_3$$

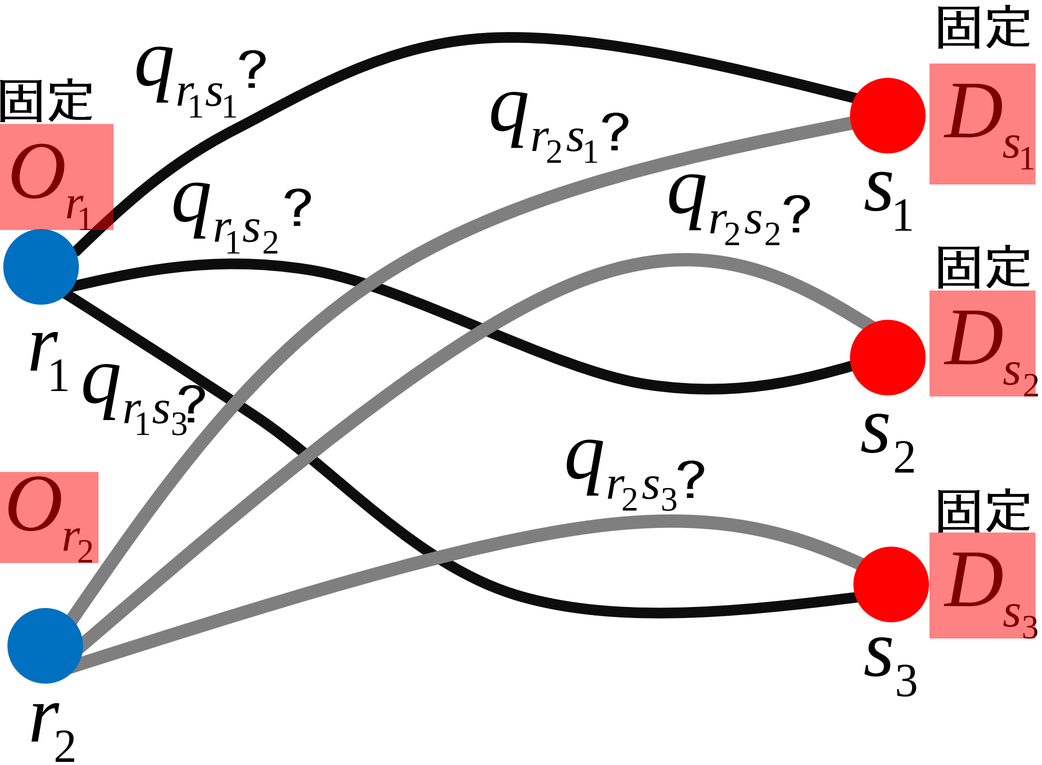
微分

$$\min\ z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \frac{1}{\gamma}\sum_{rs}(q_{rs}\ln q_{rs} - q_{rs}) - \sum_{rs} M_s q_{rs}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

出発地 r_1, r_2 から出発する旅行者数、目的地 s_1, s_2, s_3 に到着する旅行者が固定されている場合を考える



$$O_{r_1} = q_{r_1 s_1} + q_{r_1 s_2} + q_{r_1 s_3}$$
$$O_{r_2} = q_{r_2 s_1} + q_{r_2 s_2} + q_{r_2 s_3}$$
$$D_{s_1} = q_{r_1 s_1} + q_{r_2 s_1}$$
$$D_{s_2} = q_{r_1 s_2} + q_{r_2 s_2}$$
$$D_{s_3} = q_{r_1 s_3} + q_{r_2 s_3}$$

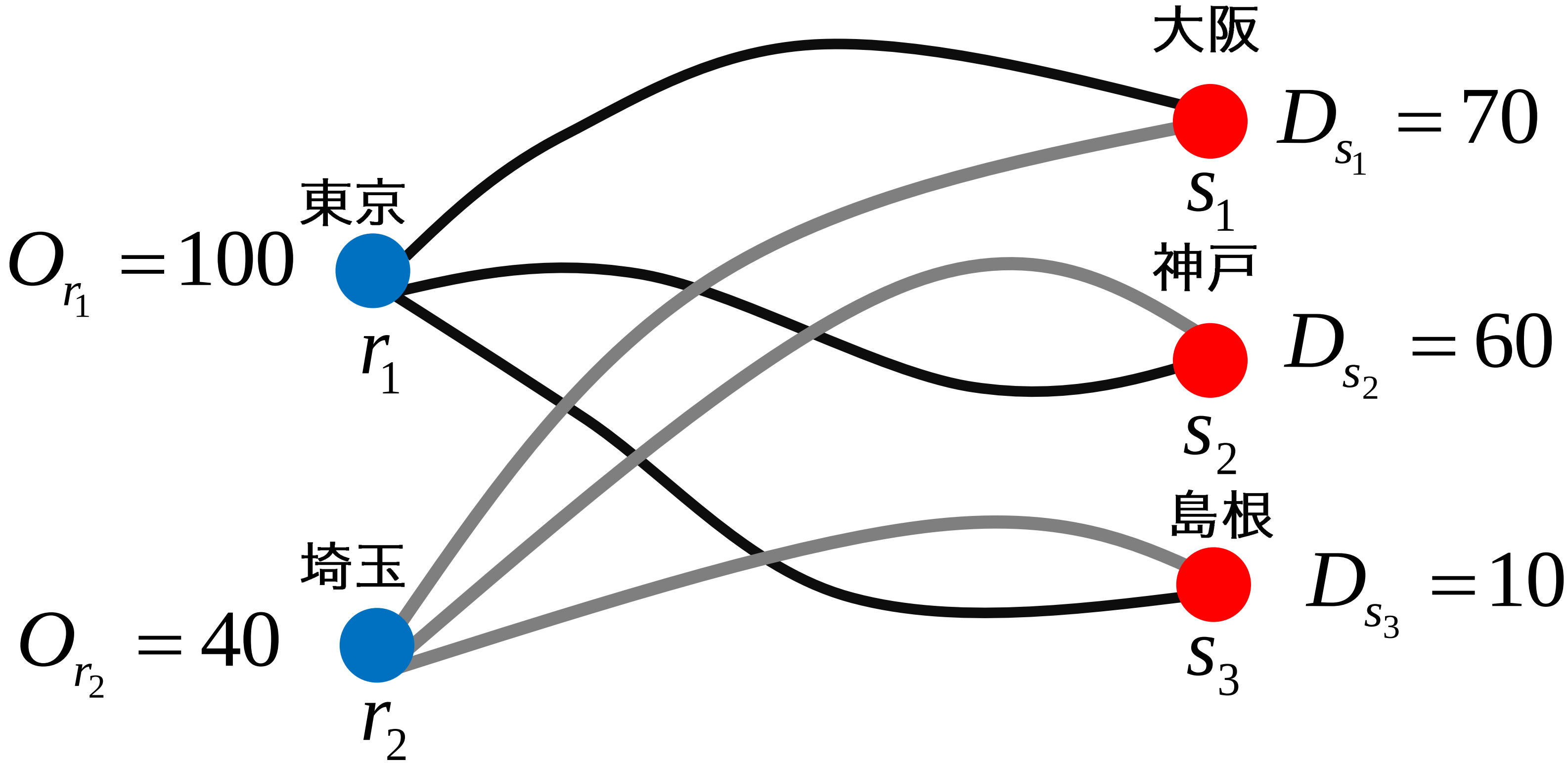
出発旅行者、到着旅行者の両方が決まっている

両側制約問題

$$\boxed{\begin{aligned} O_r &= \sum_s q_{rs} \quad (7.1) \\ D_s &= \sum_r q_{rs} \quad (7.18) \end{aligned}}$$

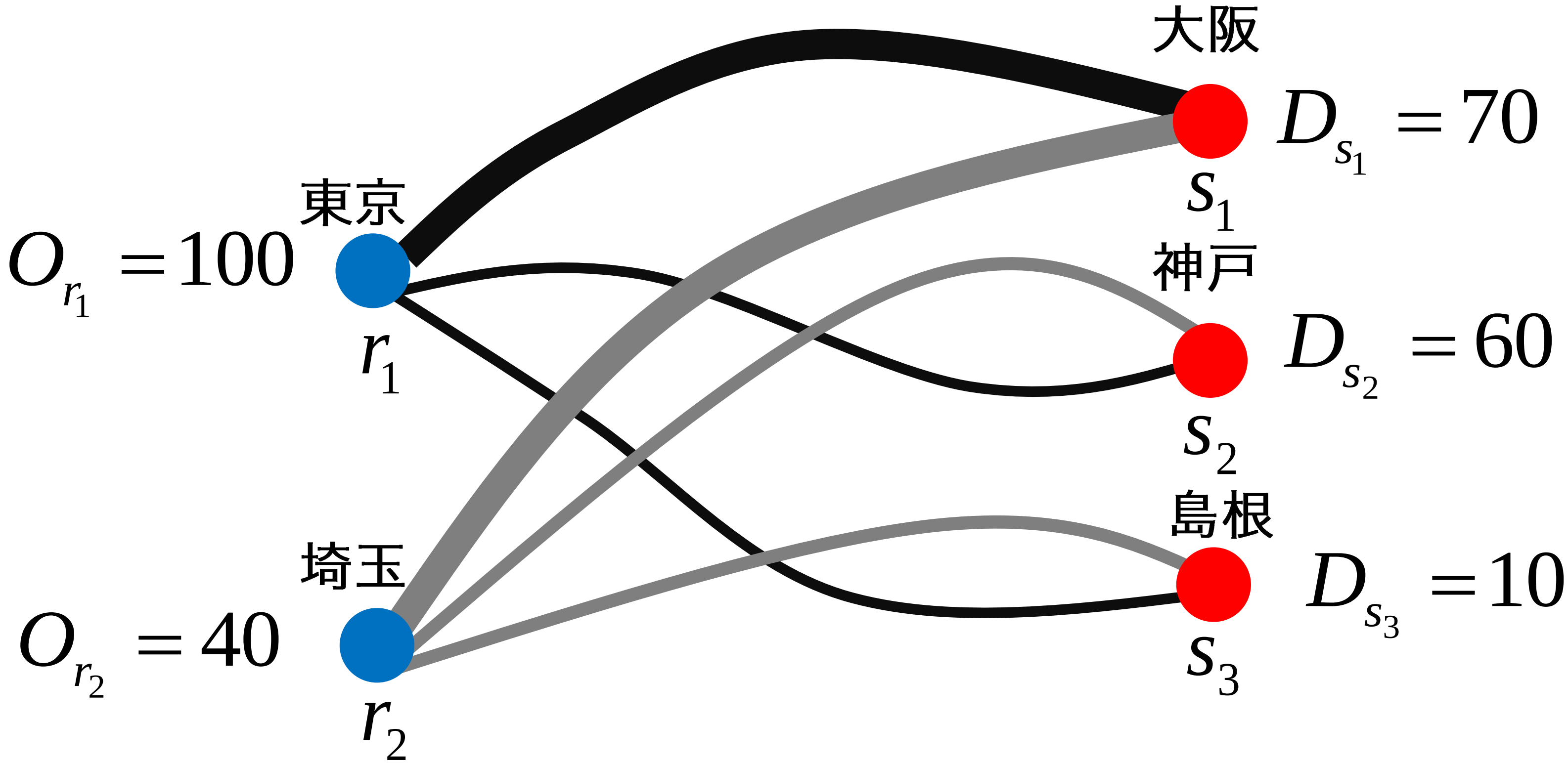
トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル



トリップ分布/配分モデル

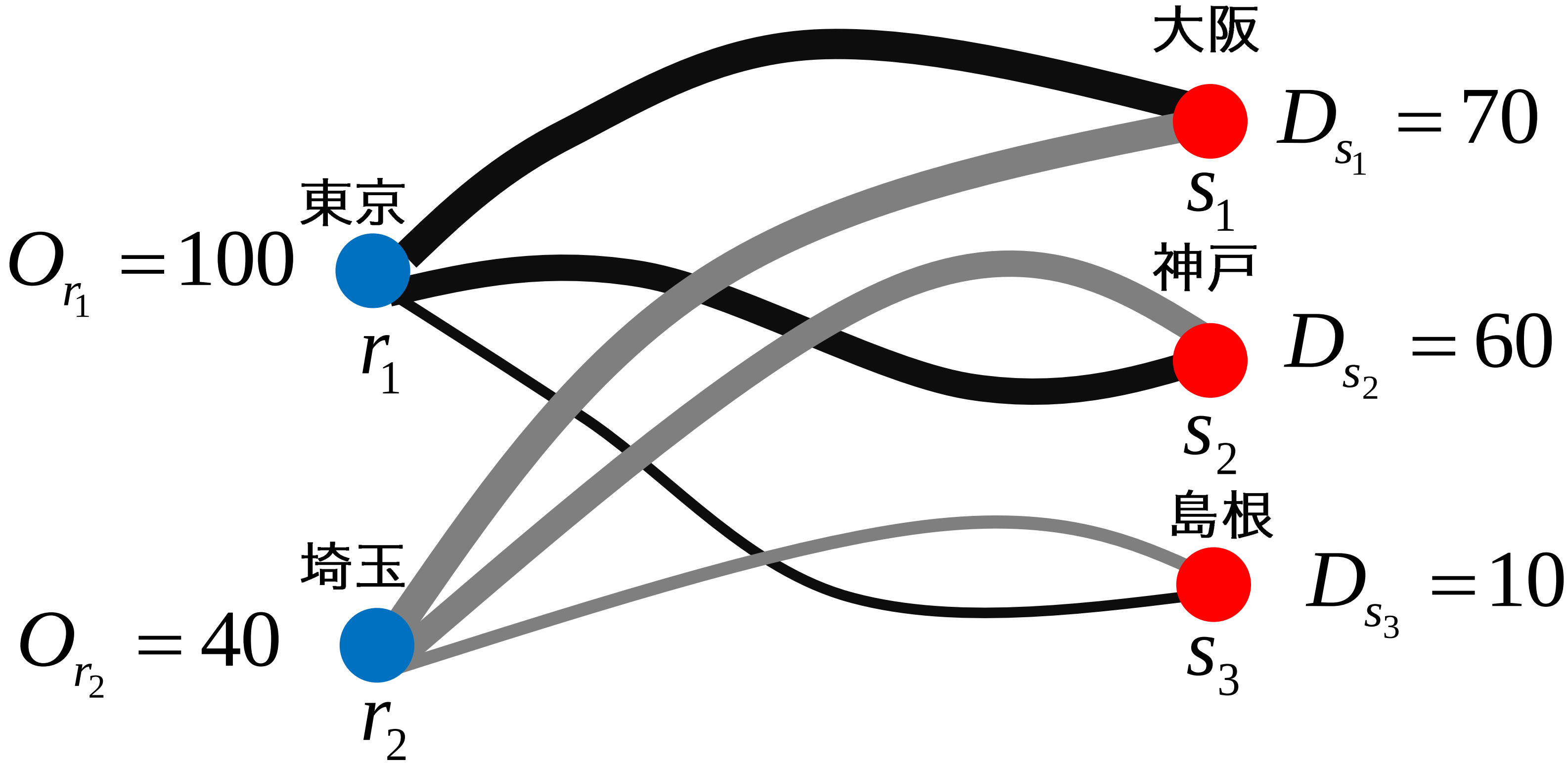
両側制約の分布/配分モデル



$$q_{r_1 s_1} = 50$$
$$q_{r_1 s_3} = 20$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

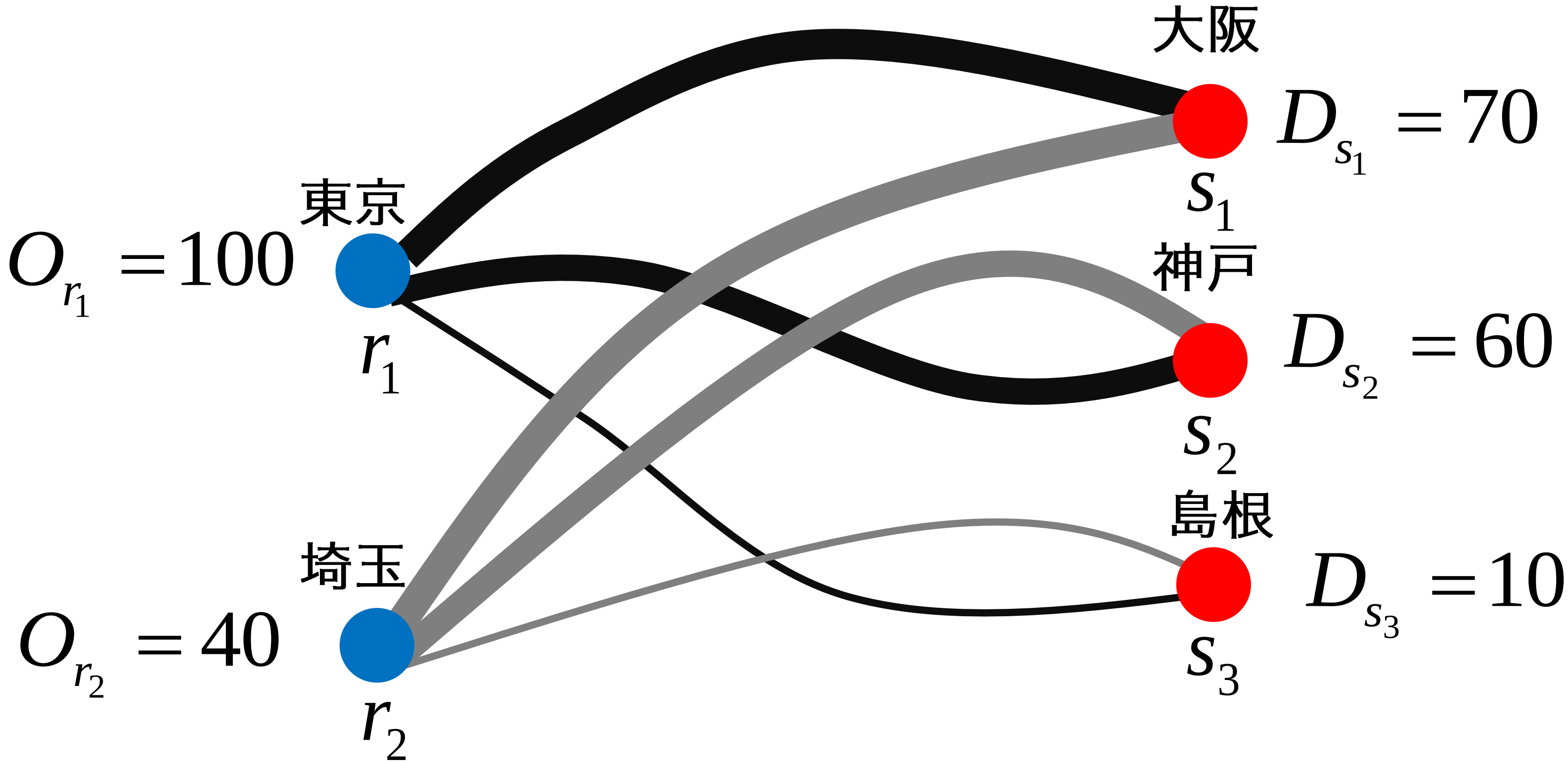


$$q_{r_1 s_1} = 50 \quad q_{r_1 s_2} = 40$$

$$q_{r_1 s_3} = 20 \quad q_{r_2 s_2} = 20$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

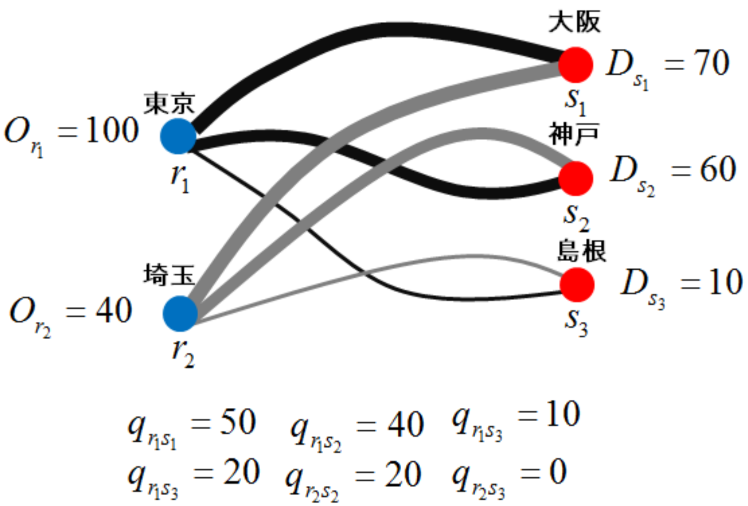


$q_{r_1 s_1} = 50$ $q_{r_1 s_2} = 40$ $q_{r_1 s_3} = 10$

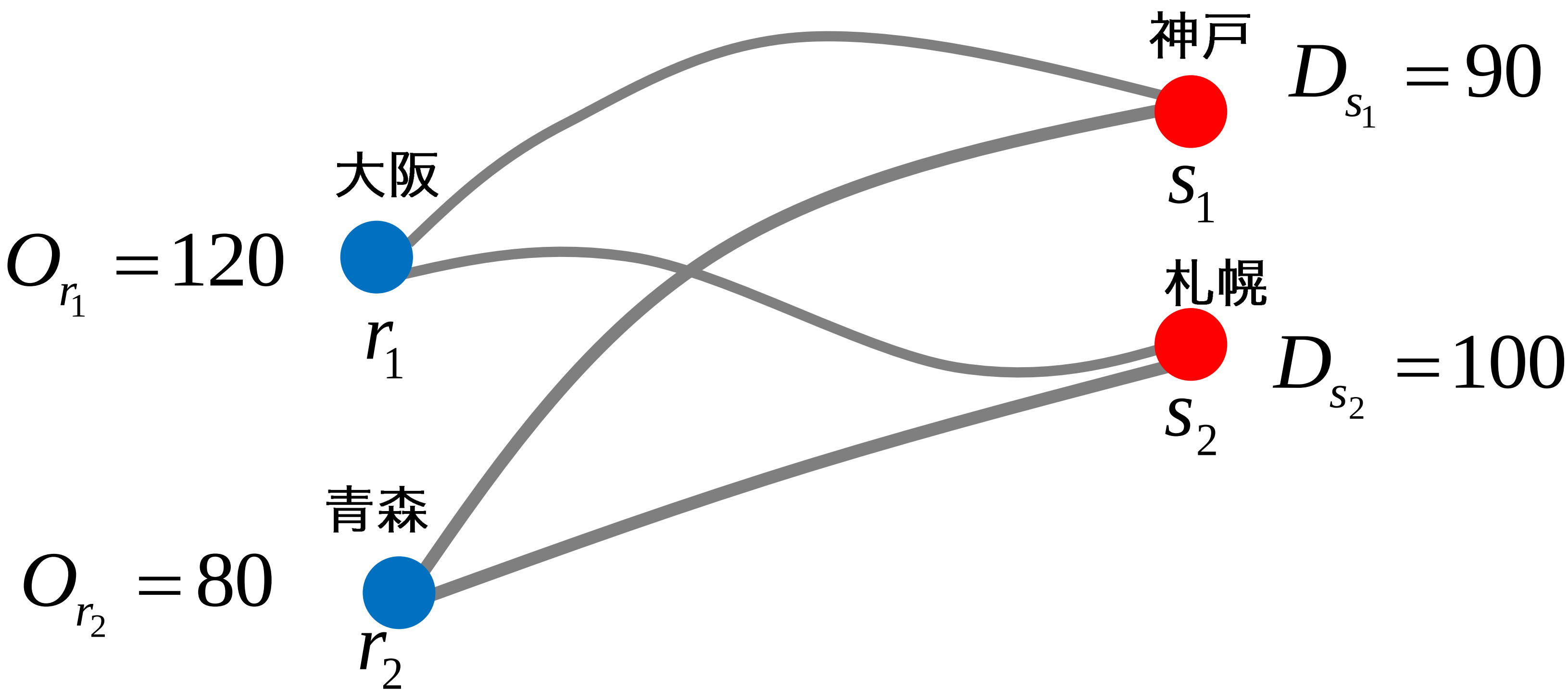
$q_{r_1 s_3} = 20$ $q_{r_2 s_2} = 20$ $q_{r_2 s_3} = 0$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

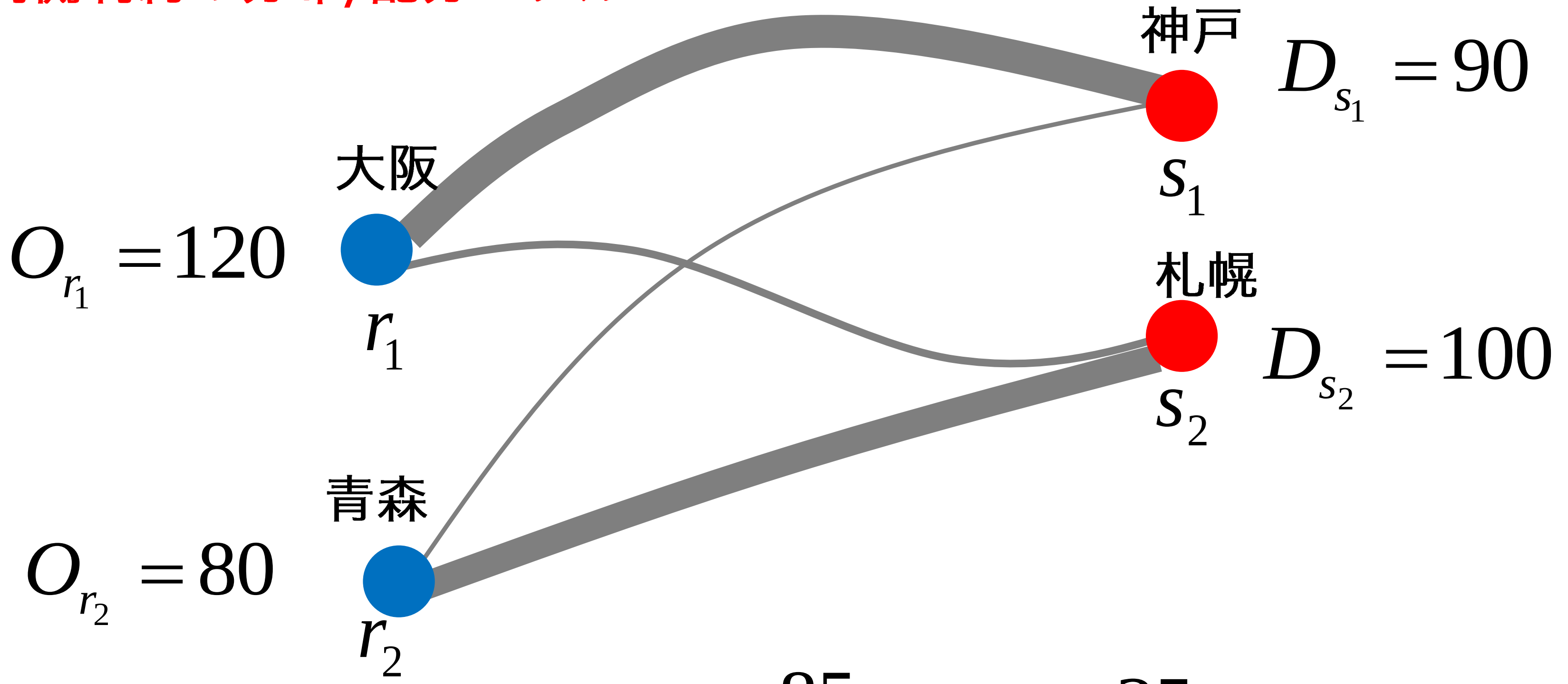


パス間の旅行客数は出発地旅行者総数と到着地旅行者総数に比例する



トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル



$q_{r_1 s_1} = 85 \quad q_{r_1 s_2} = 25$

$q_{r_1 s_3} = 5 \quad q_{r_2 s_2} = 75$

パス間の旅行客数は出発地と到着地の移動時間にも影響を受ける

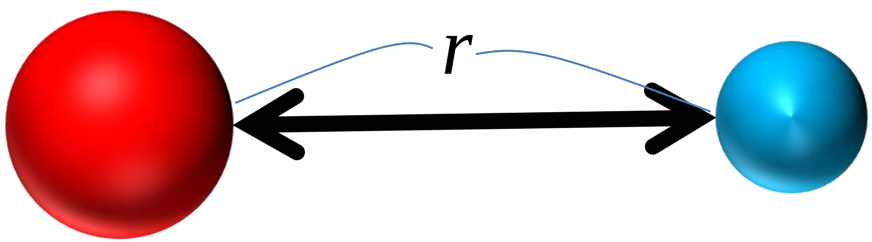
トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$q_{rs} = K O_r D_s f(u_{rs}) = K \frac{O_r D_s}{u_{rs}^2} \quad (7.19)$$

定数

rs間旅行時間 u_{rs} に応じて変化する関数



惑星A
質量: M

惑星B
質量: m

引力 $F = K \dfrac{Mm}{r^2}$

重力モデル

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$q_{rs} = KO_rD_s f(u_{rs}) \quad (7.19)$$

$$O_r = \sum_s q_{rs} \quad (7.1)$$

$$D_s = \sum_r q_{rs} \quad (7.18)$$

常に満たされてなければいけない

$$A_r = \frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} \quad (7.20)$$

$$B_s = \frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} \quad (7.21)$$

$$q_{rs} = A_r B_s O_r D_s f(u_{rs}) \quad (7.22)$$

このとき

$$\sum_s q_{rs} = \sum_s A_r B_s O_r D_s f(u_{rs}) = A_r O_r \sum_s B_s D_s f(u_{rs})$$

$$= O_r \frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} \cdot \sum_s B_s D_s f(u_{rs}) = O_r$$

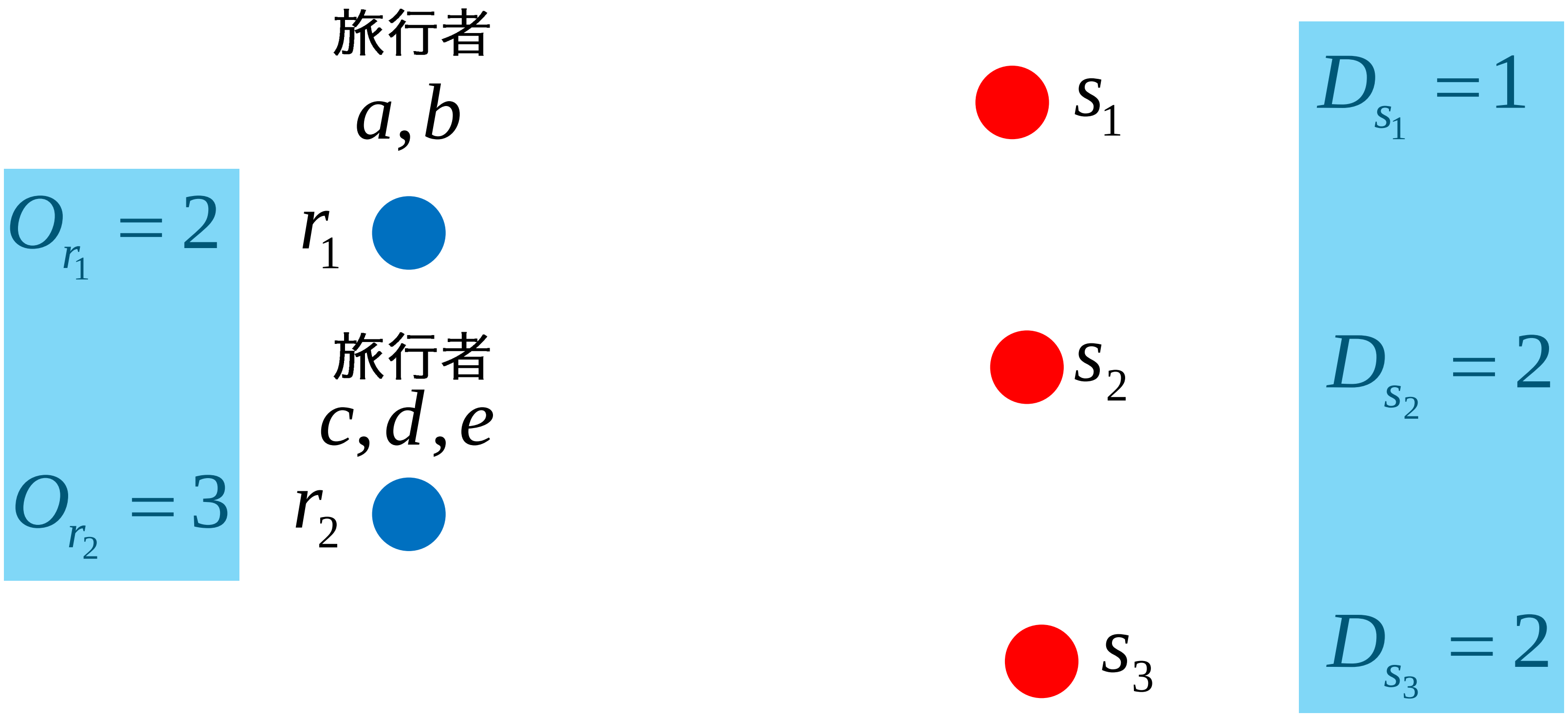
$$\sum_r q_{rs} = \sum_r A_r B_s O_r D_s f(u_{rs}) = B_s D_s \sum_r A_r O_r f(u_{rs})$$

$$= D_s \frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} \cdot \sum_r A_r O_r f(u_{rs}) = D_s$$

- 重力モデルの妥当か?→ $f(u_{rs})$ はどんな形で適切?
- A_r B_s はどんな形をしている?

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

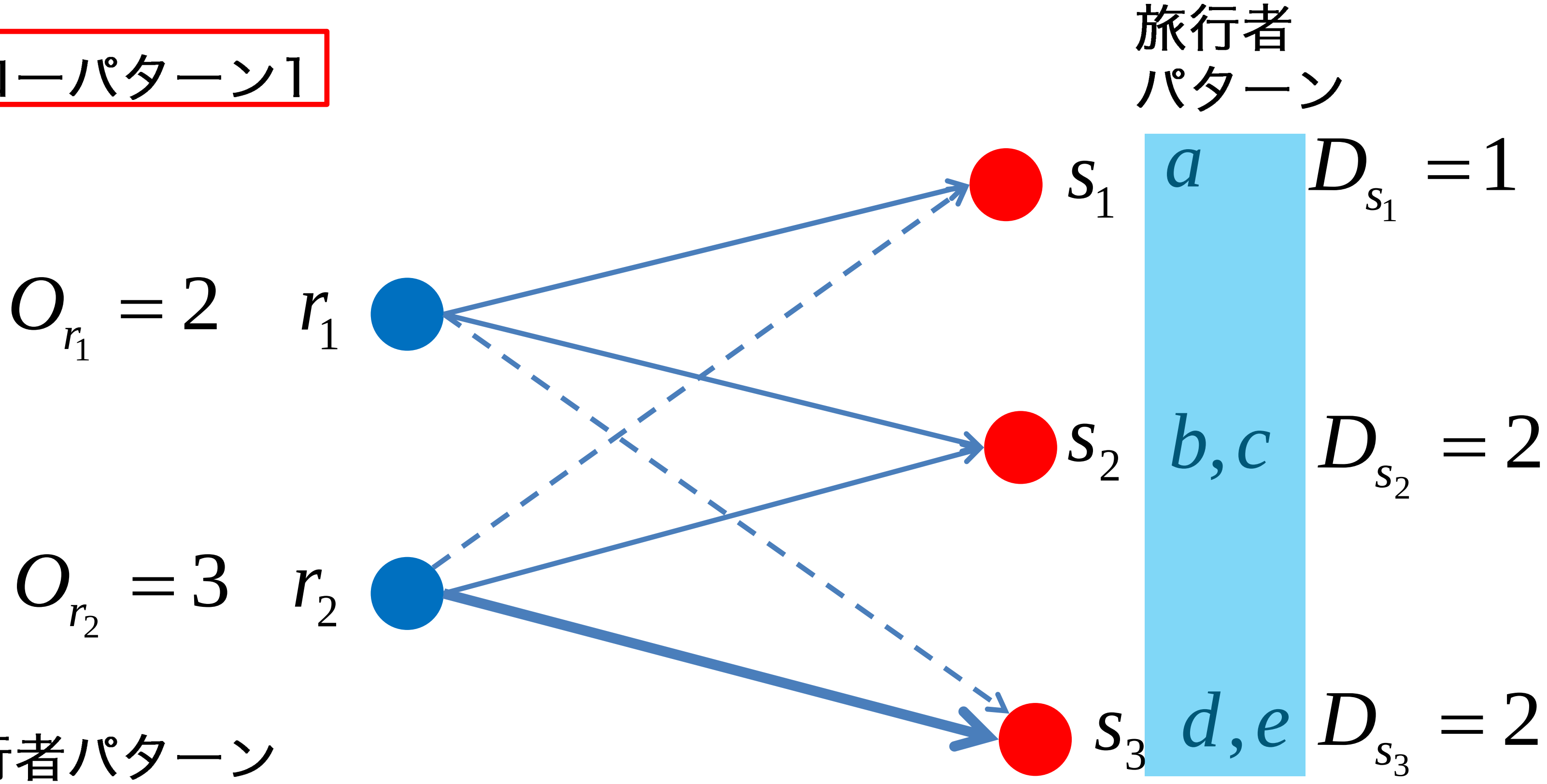


両側制約がある場合に各旅行者が目的地に向かって旅行するときにどのようなOD間フローパターンがあるのか考える

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン1



旅行者パターン

	1	2	3	4	5	6
s_1	a	a	a	b	b	b
s_2	b,c	b,d	b,e	a,c	a,d	a,e
s_3	d,e	c,e	c,d	d,e	c,e	c,d

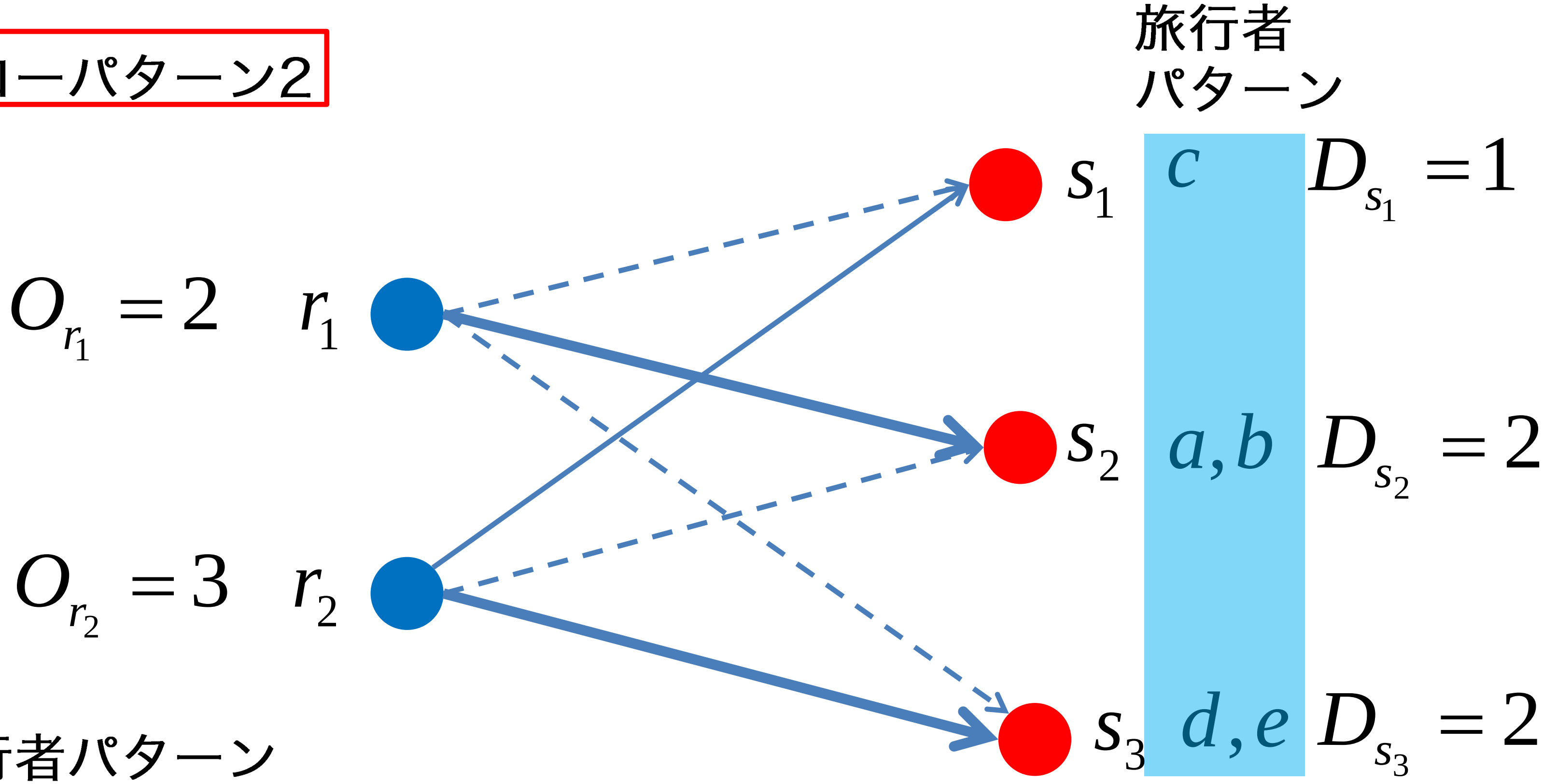
パスフローパターン

$q_{r_1s_1}=1$	$q_{r_2s_1}=0$
$q_{r_1s_2}=1$	$q_{r_2s_2}=1$
$q_{r_1s_3}=0$	$q_{r_2s_3}=2$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン2



旅行者パターン

	1	2	3
s_1	c	d	e
s_2	a,b	a,b	a,b
s_3	d,e	c,e	c,d

パスフローパターン

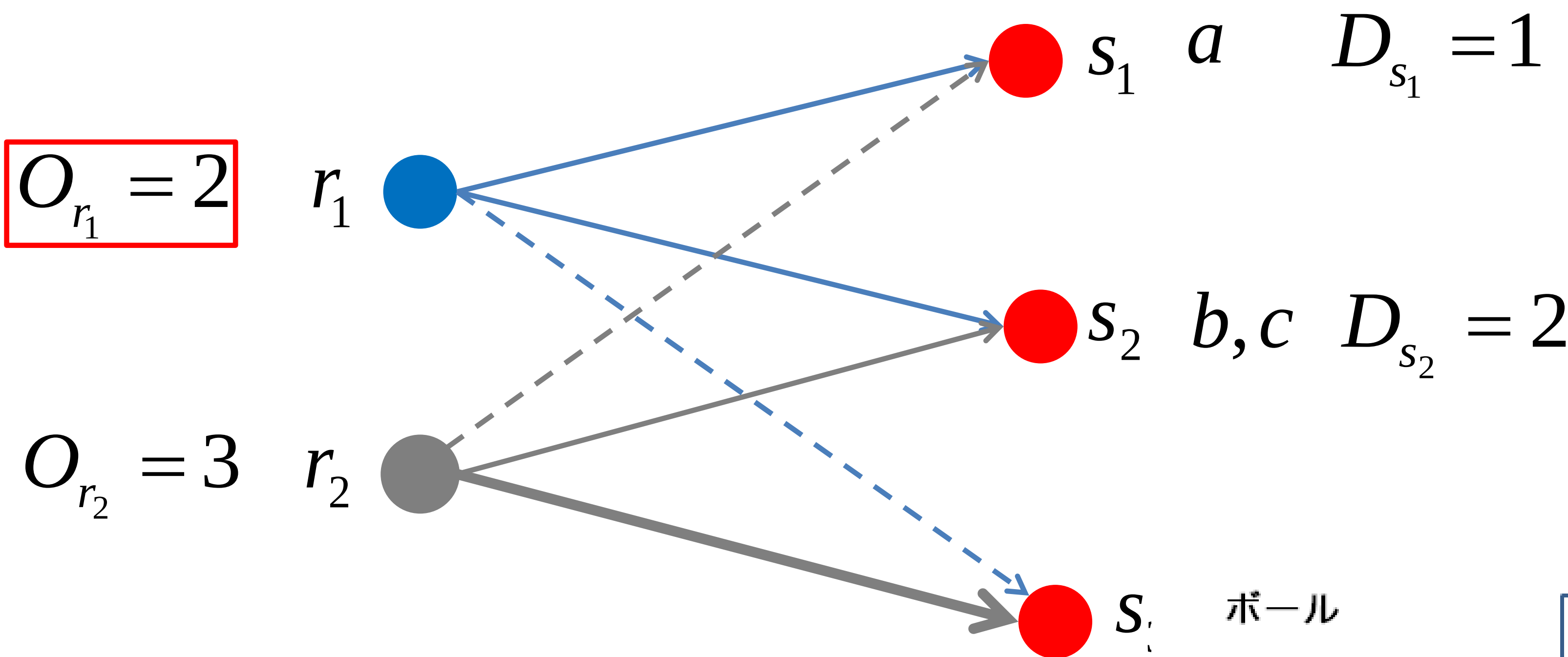
$$q_{r_1s_1}=0 \quad q_{r_2s_1}=1$$
$$q_{r_1s_2}=2 \quad q_{r_2s_2}=0$$
$$q_{r_1s_3}=0 \quad q_{r_2s_3}=2$$

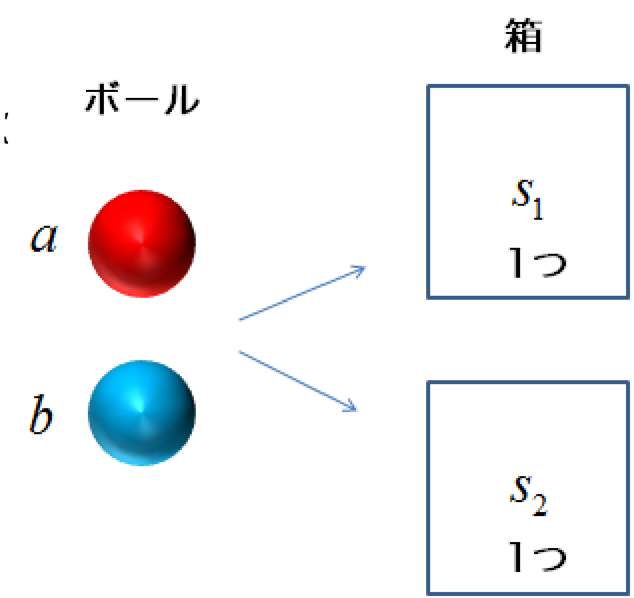
パターン2よりパターン1の方が起こりやすい

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン1





r_1 から出発する旅行者についてみると…

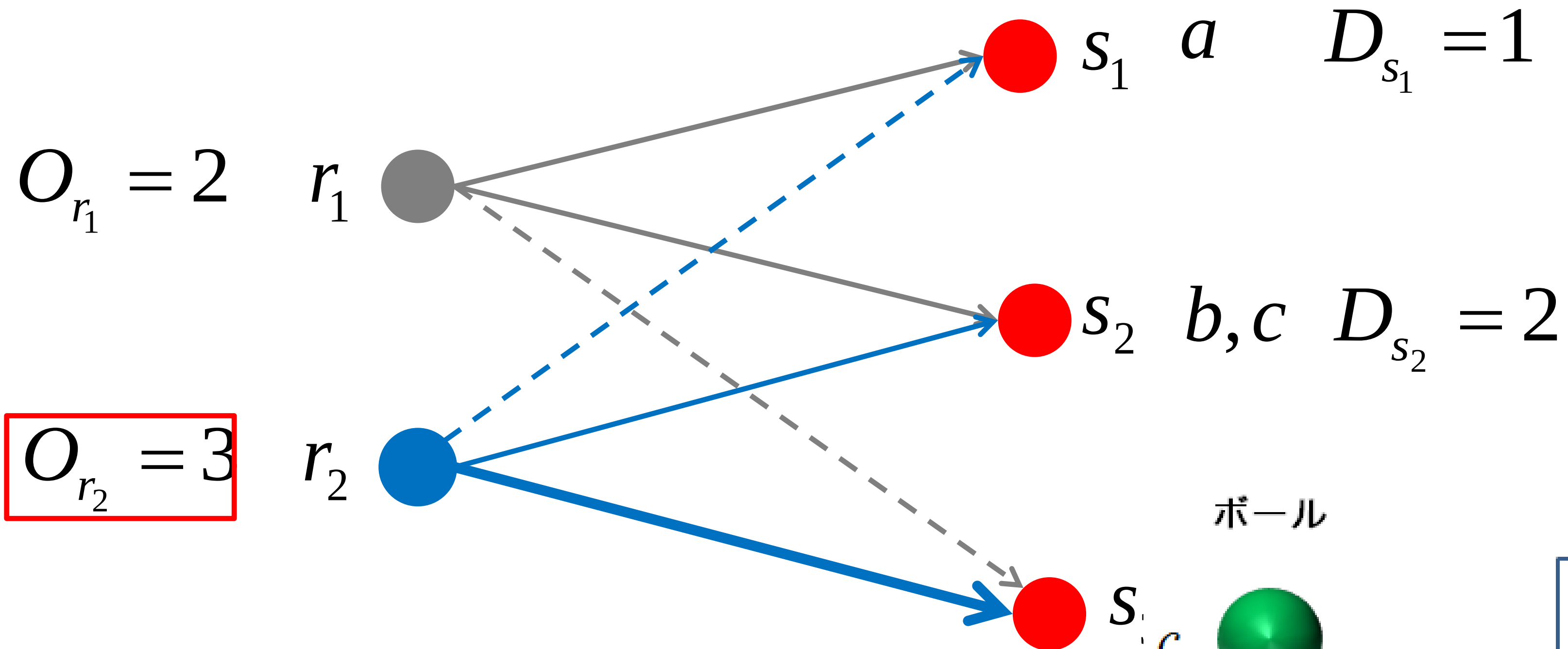
2個のボールを1つの箱にいれる問題と同じなのでその組み合わせは

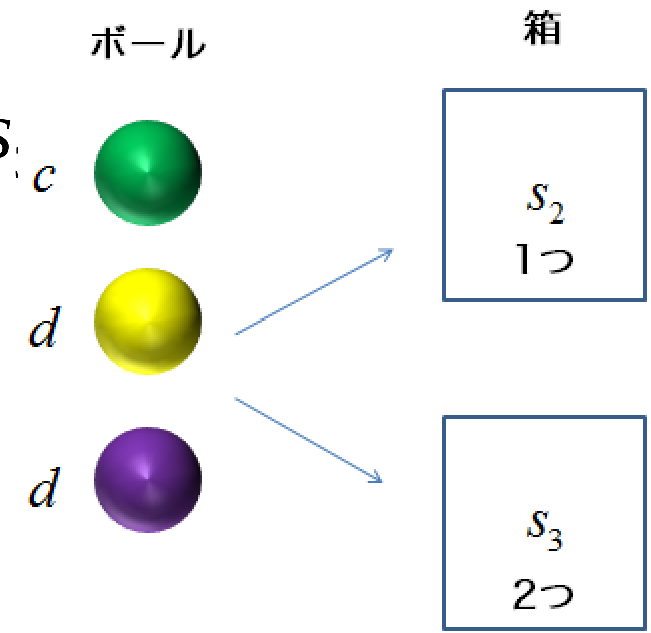
$$\frac{2!}{1!\cdot 1!}=2$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン1





r_2 から出発する旅行者についてみると…

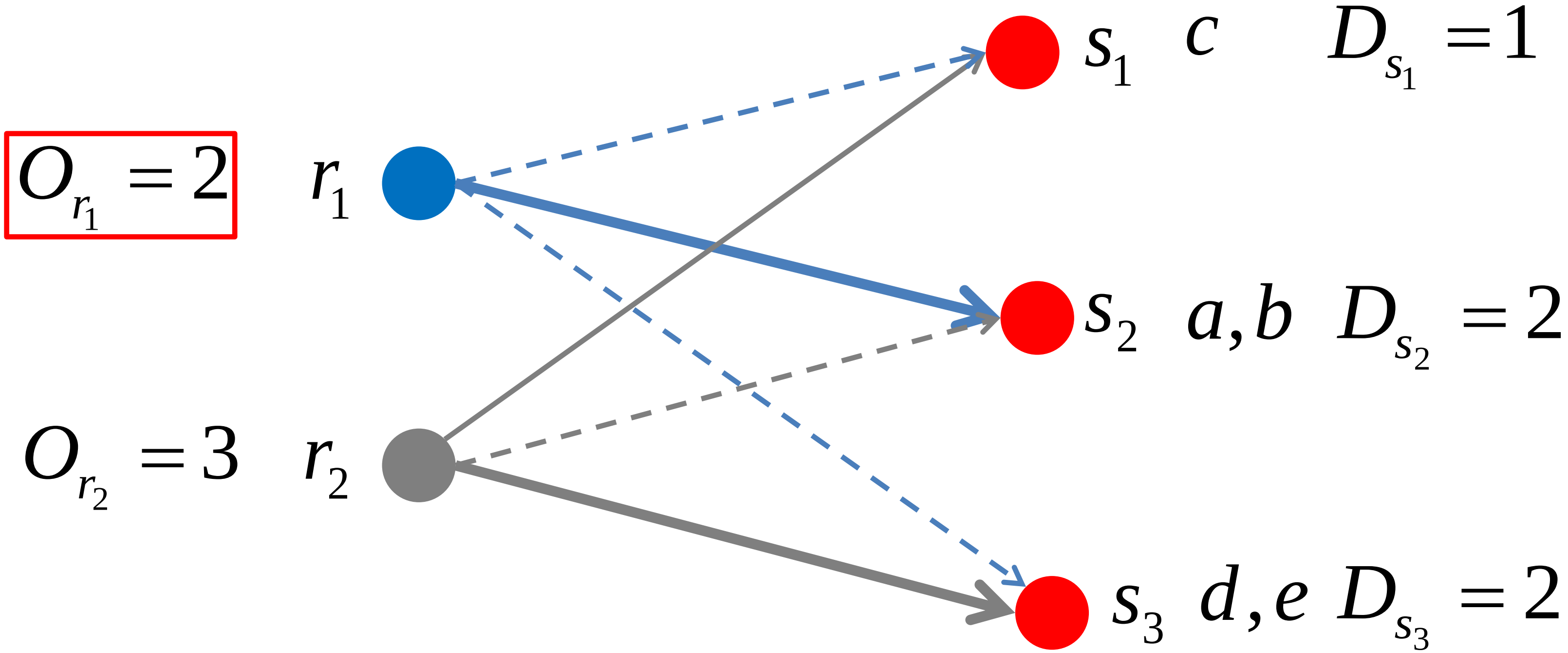
3個のボールを二つの番号のついた箱にいれる問題と同じなのでその組み合わせは

$$\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

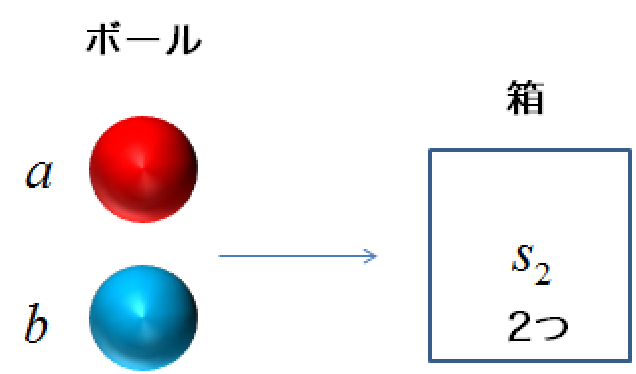
フローパターン2



r_1 から出発する旅行者についてみると

2個のボールを1つの箱にいれる問題と
同じなのでその組み合わせは

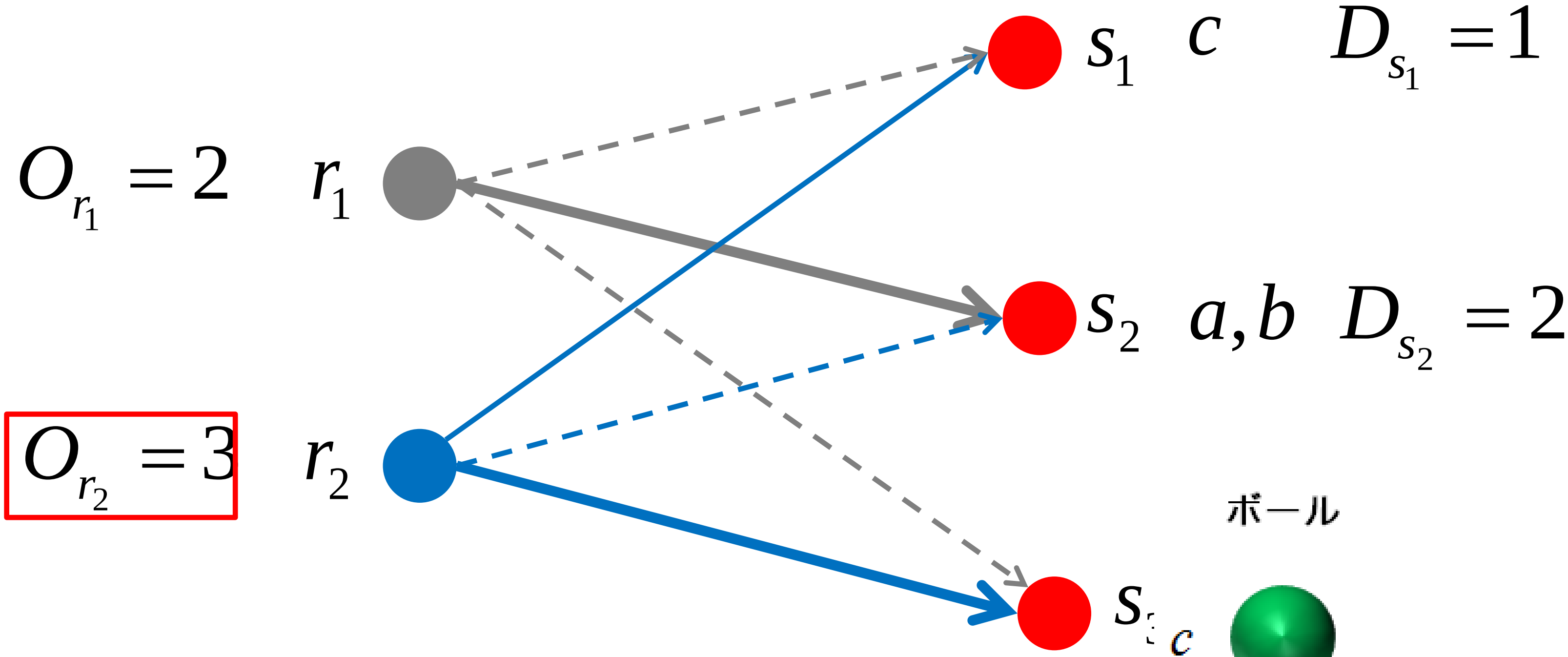
$$\frac{2!}{2!} = 1$$

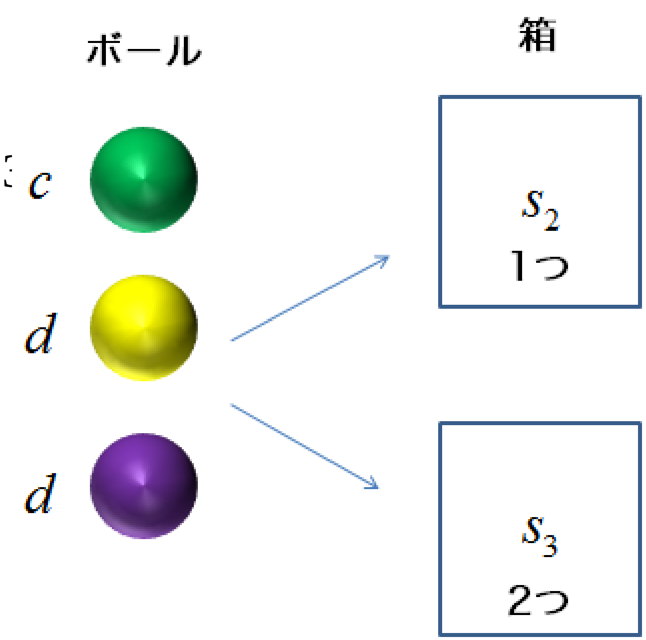


トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン2





r_2 から出発する旅行者についてみると
3個のボールを2つの箱に
いれる問題と同じなのでその組み合わせは

$$\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$$

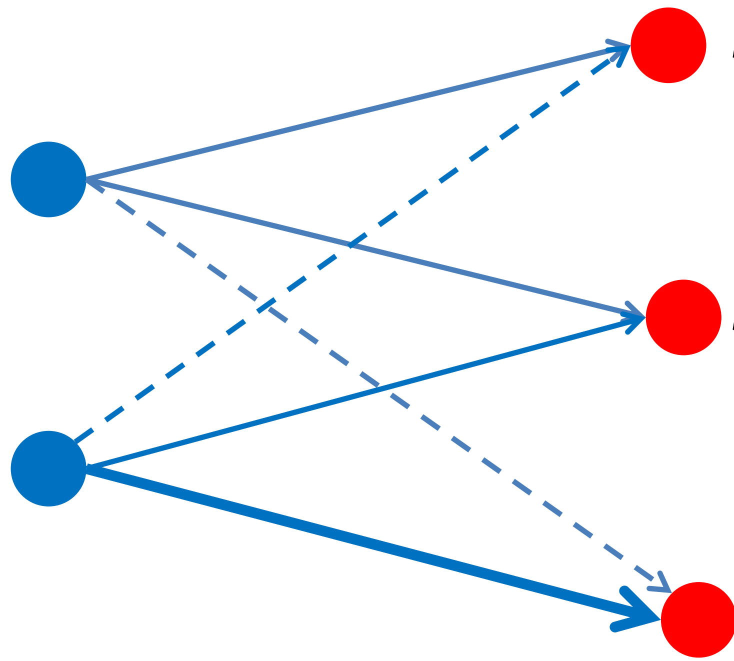
トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン1

$O_{r_1}=\boxed{2}$ r_1

$O_{r_2}=\boxed{3}$ r_2



s_1 a $D_{s_1}=1$

s_2 b,c $D_{s_2}=2$

s_3 d,e $D_{s_3}=2$

パスフローパターン

$$q_{r_1s_1}=\boxed{1} \quad q_{r_2s_1}=0$$
$$q_{r_1s_2}=\boxed{1} \quad q_{r_2s_2}=\boxed{1}$$
$$q_{r_1s_3}=0 \quad q_{r_2s_3}=\boxed{2}$$

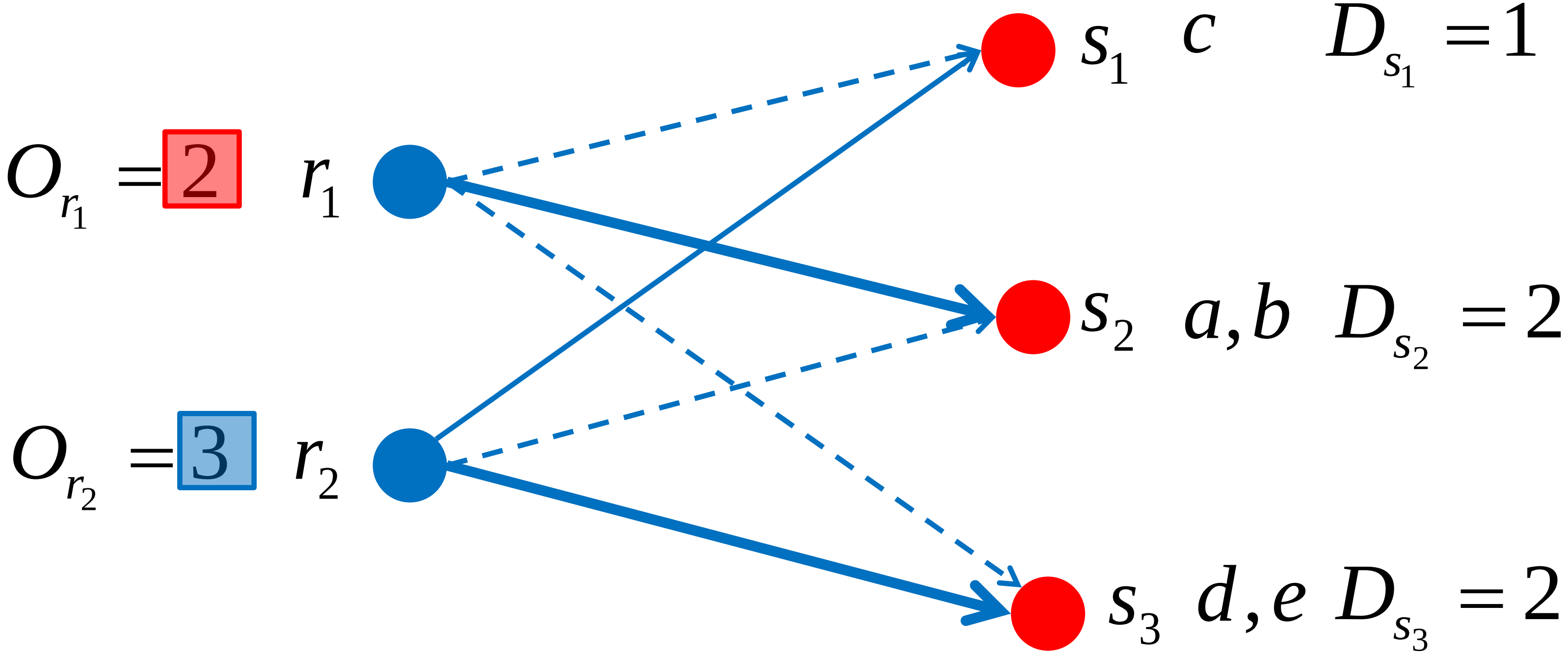
$$\frac{\boxed{2!}}{\boxed{1!}\cdot\boxed{1!}}\cdot\frac{\boxed{3!}}{\boxed{1!}\cdot\boxed{2!}}=6$$

$$\frac{\text{出発地ごとの発生フロー数の階上の積}}{\text{OD間パスフロー数の階上の積}}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

フローパターン2



$$\frac{\boxed{2!}}{\boxed{2}!} \cdot \frac{\boxed{3!}}{\boxed{1}! \cdot \boxed{2}!} = 6$$

$$\frac{\text{出発地ごとの発生フロー数の階上の積}}{\text{OD間パスフロー数の階上の積}}$$

パスフローパターン

$$\begin{array}{ll} q_{r_1 s_1} = 0 & q_{r_2 s_1} = \boxed{1} \\ q_{r_1 s_2} = \boxed{2} & q_{r_2 s_2} = 0 \\ q_{r_1 s_3} = 0 & q_{r_2 s_3} = \boxed{2} \end{array}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$\text{あるフローパターンの発生のしやすさ} = \frac{\text{出発地ごとの発生フロー数の階上の積}}{\text{OD間パスフロー数の階上の積}} = \frac{\boxed{\prod_r O_r!}^{\text{定数}}}{\prod_{r,s} q_{rs}!} \quad (7.22)$$

これが最も大きいパスフローパターンに決定する

(7.22)の対数をとったものを最大化すると考えると

$$\max\ \ln\left(\frac{\prod_r O_r!}{\prod_{r,s} q_{rs}!}\right) = \ln O_r! - \sum_{rs} \ln q_{rs}! \rightarrow \min\left[\sum_{rs} \ln q_{rs}\right] \quad (7.23)$$

スターリングの近似 $\underline{\log x! \cong x \log x - x}$ を用いると(7.23)は

$$\min \sum_{rs} \left(q_{rs} \ln q_{rs} - q_{rs}\right) \quad (7.24)$$

エントロピーモデル

(7.24)を満たしかつ利用者均衡も満たすとき両側制約問題の解を得る

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

エントロピーモデル

$$\min\ z(X,Q)=\sum_a\int_0^a t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\xi}\sum_{rs}\left(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs}\right) \tag{7.25}$$

パラメータ

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_i)$$

$$Q=(q_1,q_2,\ldots,q_{r\cdot s})$$

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \rightarrow u_{rs}$$

$$\sum_s q_{rs}=O_r \rightarrow \mu_r$$

$$\sum_r q_{rs}=D_s \rightarrow \lambda_s$$

$$f_k^{rs}\geq 0$$

制約式

各等式制約のラグランジュ乗数

$$\min\ z(X,Q)=\sum_a\int_0^a t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\xi}\sum_{rs}\left(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs}\right)$$
$$+\sum_{rs}u_{rs}(q_{rs}-\sum_{rs}f_k^{rs})+\sum_r\mu_r(O_r-\sum_s q_{rs})+\sum_s\lambda_s(D_s-\sum_s q_{rs}) \tag{7.26}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$\min\ z(X,Q)=\sum_a\int_0^{a}t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\xi}\sum_{rs}\left(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs}\right) \qquad (7.26)$$

$$+\sum_{rs}u_{rs}(q_{rs}-\sum_{rs}f_k^{rs})+\sum_r\mu_r(O_r-\sum_s q_{rs})+\sum_s\lambda_s(D_s-\sum_s q_{rs})$$

OD間フロー数　　以外についての微分は片側制約のときと同様
→利用者均衡配分条件、フロー数制約は満たされる

q_{rs} についての微分=0を考える

トリップ分布/配分モデル

目的地需要関数を用いた分布/配分

$$f_k^{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}}=0 \quad (7.3) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial f_k^{rs}}\geq 0 \quad (7.4)$$

$$q_{rs}\frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}}=0 \quad (7.5) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial q_{rs}}\geq 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial u_{rs}}=0 \quad (7.7) \qquad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_r}=0 \quad (7.8)$$

利用者均衡は満たされている

$$f_k^{rs}(c_k^{rs}-u_{rs})=0 \quad (7.9) \qquad c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0 \quad (7.10)$$

$$\cancel{q_{rs}[(u_{rs}-M_s)-\mu_r]=0 \quad (7.11) \qquad (u_{rs}-M_s)-\mu_r\geq 0 \quad (7.12)}$$

$$\sum_k f_k^{rs}=q_{rs} \quad (7.13) \qquad \sum_s q_{rs}=O_r \quad (7.14) \qquad f_k^{rs}\geq 0 \quad (7.14)$$

フロー数制約は満たされている

$$L(X,Q,U,\mathrm{M})=\sum_a\int_0^{t_a}t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\gamma}\sum_{rs}(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs})-\sum_{rs}M_s q_{rs}$$
$$+\sum_{rs}u_{rs}(q_{rs}-\sum_{rs}f_k^{rs})+\sum_r\mu_r(O_r-\sum_s q_{rs})$$

※ $$\frac{d(x\log x)}{dx}=\frac{d(x)}{dx}\log x+x\frac{d(\log x)}{dx}$$
$$=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$q_{rs}\left(\frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}\right)=0 \qquad \frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}\geq 0$$

このとき q_{rs} が log 内にあるので0にはなりえない→ $$\boxed{\frac{1}{\gamma}\ln q_{rs}+u_{rs}-M_s-\mu_{rs}=0}$$

$$\boxed{q_{rs}=e^{-\gamma(u_{rs}-M_s-\mu_r)} \quad (7.20)}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$\min\ z(X,Q)=\sum_a\int_0^a t_a(\omega)d\omega+\frac{1}{\xi}\sum_{rs}\left(q_{rs}\ln q_{rs}-q_{rs}\right) \qquad (7.26)$$

$$+\sum_{rs}u_{rs}(q_{rs}-\sum_{rs}f_k^{rs})+\sum_r\mu_r(O_r-\sum_s q_{rs})+\sum_s\lambda_s(D_s-\sum_s q_{rs})$$

OD間フロー数　　　以外についての微分は片側制約のときと同様
→利用者均衡配分条件、フロー数制約は満たされる

q_{rs}についての微分=0を考える

$$\frac{1}{\xi}\ln q_{rs}+u_{rs}-\mu_{rs}-\lambda_{rs}=0 \Rightarrow q_{rs}=e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r-\lambda_s)} \qquad (7.27)$$

$$O_r=\sum_s q_{rs}=\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r-\lambda_s)}=e^{\xi\mu_r}\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\lambda_s)}$$

$$D_s=\sum_r q_{rs}=\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r-\lambda_s)}=e^{\xi\lambda_s}\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r)}$$

$$A_r=\frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} \qquad (7.20)$$

$$B_s=\frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} \qquad (7.21)$$

$$\Rightarrow q_{rs}=A_r B_s O_r D_s f(u_{rs}) \qquad (7.22)$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$O_r = \sum_s q_{rs} = \sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r-\lambda_s)} = e^{\xi\mu_r}\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\lambda_s)}$$

$$D_s = \sum_r q_{rs} = \sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r-\lambda_s)} = e^{\xi\lambda_s}\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r)}$$

$$A_r = \frac{1}{\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\lambda_s)}}$$

$$B_s = \frac{1}{\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r)}}$$

とおくと

$$A_r = \frac{e^{\xi\mu_r}}{O_r} \qquad B_s = \frac{e^{\xi\lambda_s}}{D_s} \tag{7.28}$$

$$A_r = \frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s \frac{e^{\xi\lambda_s}}{D_s}\cdot D_s f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s e^{\xi\lambda_s} f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\lambda_s)}}$$

$$B_s = \frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r \frac{e^{\xi\mu_r}}{O_r}\cdot O_r f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r e^{\xi\mu_r} f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r)}} \tag{7.29}$$

トリップ分布/配分モデル

両側制約の分布/配分モデル

$$A_r = \frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s \frac{e^{\xi\lambda_s}}{D_s} \cdot D_s f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s e^{\xi\lambda_s} f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_s e^{-\xi(u_{rs}-\lambda_s)}}$$

$$B_s = \frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r \frac{e^{\xi\mu_r}}{O_r} \cdot O_r f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r e^{\xi\mu_r} f(u_{rs})} = \frac{1}{\sum_r e^{-\xi(u_{rs}-\mu_r)}}$$

(7.29)

(7.29)の両辺を見比べると

$$f(u_{rs}) = e^{-\xi u_{rs}} \qquad (7.30)$$

$$A_r = \frac{1}{\sum_s B_s D_s f(u_{rs})} \qquad (7.20)$$

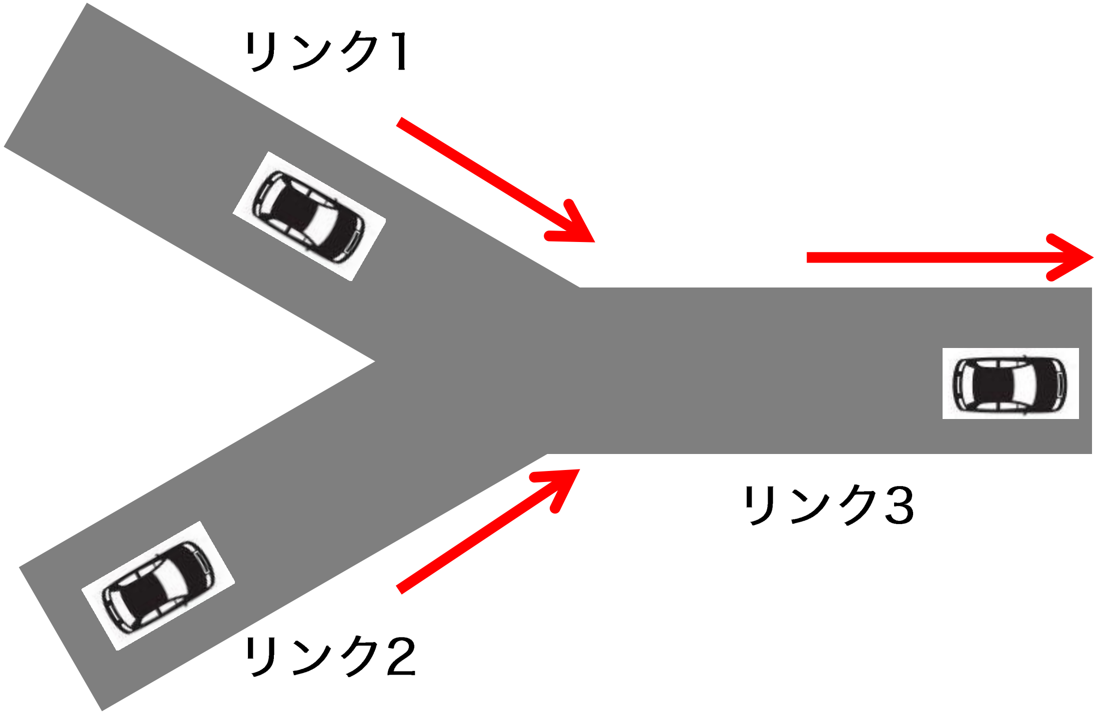
$$B_s = \frac{1}{\sum_r A_r O_r f(u_{rs})} \qquad (7.21)$$

$$q_{rs} = A_r B_s O_r D_s f(u_{rs}) \qquad (7.22)$$

$$q_{rs} = A_r B_s O_r D_s e^{-\xi u_{rs}} \qquad A_r = \frac{1}{\sum_s B_s D_s e^{-\xi u_{rs}}} \qquad B_s = \frac{1}{\sum_r A_r O_r e^{-\xi u_{rs}}}$$

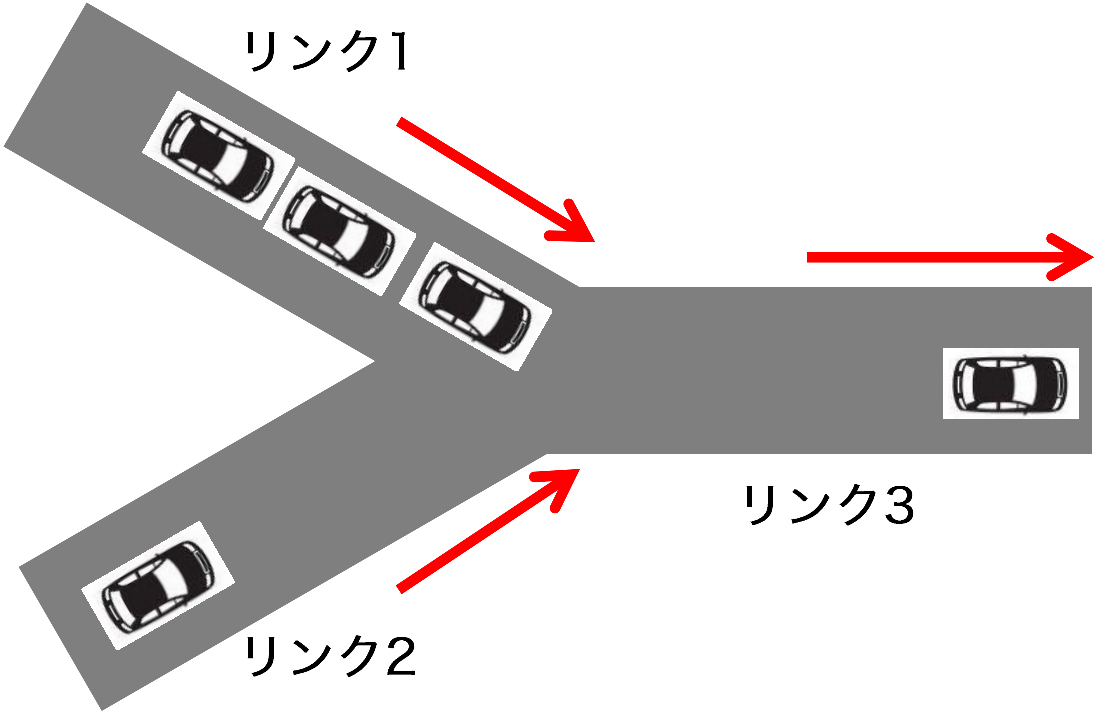
(7.31)

リンク相互作用のある均衡



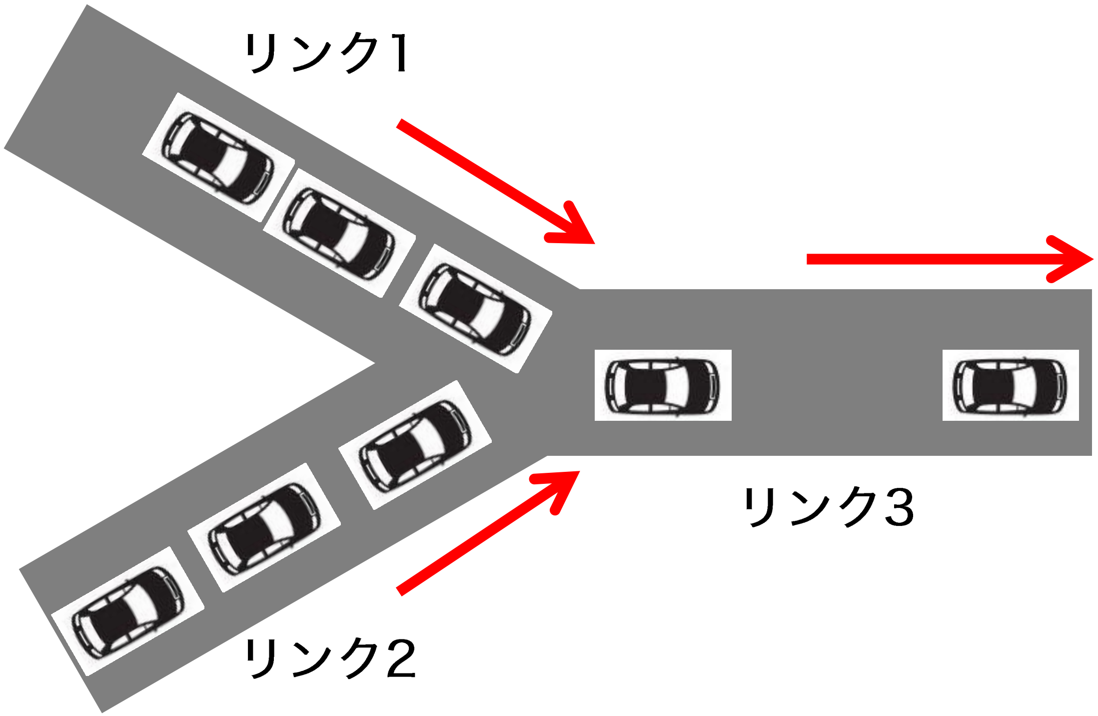
道路が空いているときはどのリンクも無関係に移動できる

リンク相互作用のある均衡



リンク1が混んでくるとリンクB上の車の交差点での待ち時間が増える

リンク相互作用のある均衡



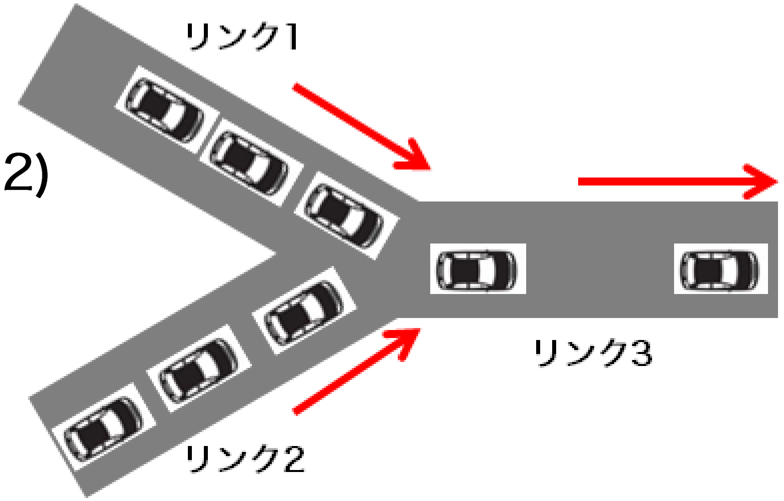
待ち時間が長くなるとリンク2も混んでくる

→リンク1での混雑が最終的にリンク2の混雑状況にも影響を与えている
→リンク間の相互作用を考慮した均衡モデル

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

$$t_a = t_a(x_a) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} t_a &= t_a(x_a, x_{a'}) \\ t_{a'} &= t_a(x_{a'}, x_a) \end{aligned}} \quad (7.32)$$



また右図のような場合リンク1がリンク2に与える影響とリンク2がリンク1に与える影響は対称であると考えられる

$$\boxed{\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_{a'}} = \frac{\partial t_{a'}(x_{a'}, x_a)}{\partial x_a}} \quad (7.33)$$

$$\min \ z(X) = \frac{1}{2}\sum_a \left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega, 0)d\omega \right)$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i) \quad (7.34)$$

制約式

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

リンク間相互作用がある場合は(7.32),(7.33)の条件で(7.35)を解けば利用者均衡の条件が満たされる→実際に解いてみる

リンク相互作用のある均衡

$$\min\ z(X) = \frac{1}{2}\sum_a \left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega, 0)d\omega \right)$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i) \qquad (7.34)$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

$$\min\ L(X,U) = z(X) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(F,U)}{\partial f_k^{rs}} = 0$$

$$\frac{\partial L(F,U)}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} z[X(F)] + \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

$$-u_{rs}$$

$$\frac{\partial L(F,U)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} z[X(F)] = \sum_b \boxed{\frac{\partial z(x)}{\partial x_b}} \cdot \frac{\partial x_b}{\partial f_k^{rs}}$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

$$\frac{\partial x_b}{\partial f_k^{rs}} = \delta_{b,k}^{rs}$$

$$\frac{\partial L(F,U)}{\partial u_{rs}} = 0 \rightarrow \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$\boxed{\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b}$$

が成り立つと $\frac{\partial L(F,U)}{\partial f_k^{rs}} = \sum_b \boxed{t_b} \delta_{b,k}^{rs} = c_k^{rs}$ ➡ $\frac{\partial L(F,U)}{\partial f_k^{rs}} = c_k^{rs} - u_{rs}$

$$f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0,\ c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0,\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs},\ f_k^{rs} \geq 0$$

利用者均衡

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a \left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \frac{\partial}{\partial x_b}\underline{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega}\right] \quad (7.35)$$

ネットワーク上の総リンク数がI 本あるとする(相互作用リンク数もI)

$$\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega = \underline{\int_0^{x_1} t_1(\omega,0)d\omega} + \underline{\int_0^{x_{1'}} t_{1'}(\omega,0)d\omega}$$

$$+ \underline{\int_0^{x_2} t_2(\omega,0)d\omega} + \underline{\int_0^{x_{2'}} t_{2'}(\omega,0)d\omega}$$

$$\vdots$$

$$+ \underline{\int_0^{x_b} t_b(\omega,0)d\omega} + \underline{\int_0^{x_{b'}} t_{b'}(\omega,0)d\omega}$$

$$\vdots$$

$$+ \underline{\int_0^{x_I} t_I(\omega,0)d\omega} + \underline{\int_0^{x_{I'}} t_{I'}(\omega,0)d\omega}$$

リンク x_b についての式

リンク x_b について定数

x_b について微分すると消える

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega, 0)d\omega\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, 0)d\omega}\right] \quad (7.35)$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, 0)d\omega} = \frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b} t_b(\omega, 0)d\omega = t_b(x_b, 0) \quad (7.36)$$

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b}=t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b}=\frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega+\int_0^{x_a}t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_b}\underline{\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,0)d\omega}_{t_b(x_b,0)}\right] \qquad (7.35)$$

$$\underline{\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega}=\underline{\int_0^{x_1}t_1(\omega,x_{1'})d\omega}+\underline{\int_0^{x_{1'}}t_{1'}(\omega,x_1)d\omega}$$

$$+\underline{\int_0^{x_2}t_2(\omega,x_{2'})d\omega}+\underline{\int_0^{x_{2'}}t_{2'}(\omega,x_2)d\omega}$$

$$\vdots$$

$$+\underline{\int_0^{x_b}t_b(\omega,x_{b'})d\omega}+\underline{\int_0^{x_{b'}}t_{b'}(\omega,x_b)d\omega}$$

$$\vdots$$

$$+\underline{\int_0^{x_I}t_I(\omega,x_{I'})d\omega}+\underline{\int_0^{x_{I'}}t_{I'}(\omega,x_I)d\omega}$$

リンク X_b についての式

リンク X_b について定数

X_b について微分すると消える

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega}_{t_b(x_b,0)}\right] \qquad (7.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega = \frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b} t_b(\omega, x_{b'})d\omega + \frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}} t_{b'}(\omega, x_b)d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b} t_b(\omega, x_{b'})d\omega = t_b(x_b, x_{b'}) \qquad (7.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}} t_{b'}(\omega, x_b)d\omega = \int_0^{x_{b'}} \frac{\partial t_{b'}(\omega, x_b)}{\partial x_b}d\omega$$ 偏微分記号を中にいれた

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega}_{t_b(x_b,0)}\right] \quad (7.35)$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega} = \underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b} t_b(\omega, x_{b'})d\omega} + \underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}} t_{b'}(\omega, x_b)d\omega}$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b} t_b(\omega, x_{b'})d\omega} = t_b(x_b, x_{b'}) \quad (7.36)$$

$$\boxed{\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_{a'}} = \frac{\partial t_{a'}(x_{a'}, x_a)}{\partial x_a}} \quad (7.33)$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}} t_{b'}(\omega, x_b)d\omega} = \int_0^{x_{b'}} \frac{\partial t_{b'}(\omega, x_b)}{\partial x_b} d\omega = \int_0^{x_{b'}} \frac{\partial t_b(x_b, \omega)}{\partial x_{b'}} d\omega$$

リンク相互作用のある均衡

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b}=t_b$$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b}=\frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega+\int_0^{x_a}t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,0)d\omega}_{t_b(x_b,0)}\right]\quad(7.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega,x_{a'})d\omega=\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b}t_b(\omega,x_{b'})d\omega+\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}}t_{b'}(\omega,x_b)d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_b}t_b(\omega,x_{b'})d\omega=t_b(x_b,x_{b'})\quad(7.36)$$

(7.35)に(7.36),(7.37)を代入!

$$\frac{\partial}{\partial x_b}\int_0^{x_{b'}}t_{b'}(\omega,x_b)d\omega=\int_0^{x_{b'}}\frac{\partial t_{b'}(\omega,x_b)}{\partial x_b}d\omega=\int_0^{x_{b'}}\frac{\partial t_b(x_b,\omega)}{\partial x_{b'}}d\omega=t_b(x_b,x_{b'})-t_b(x_b,0)$$

(7.37)

リンク相互作用のある均衡

$\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b$ となるかどうか確かめる

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{\partial}{\partial x_b}\left[\frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega}_{t_b(x_b, x_{b'}) + t_b(x_b, x_{b'}) - t_b(x_b,0)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_b}\sum_a\int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega}_{t_b(x_b,0)}\right] \quad \text{(7.35)}$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = \frac{1}{2}\left(t_b(x_b, x_{b'}) + t_b(x_b, x_{b'}) - t_b(x_b,0) + t_b(x_b,0)\right)$$

$$= t_b(x_b, x_{b'}) = t_b \quad \text{(7.38)}$$

$$\min z(X) = \frac{1}{2}\sum_a\left(\int_0^{x_a} t_a(\omega, x_{a'})d\omega + \int_0^{x_a} t_a(\omega,0)d\omega\right)$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i) \quad \text{(7.34)}$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

(7.34)がリンク間相互作用を考慮した均衡配分問題となる

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

ヘッセ行列:関数の二階微分の行列
均衡配分問題においてヘッセ行列は
対角行列になる

(均衡配分におけるx はリンクフロー数で
互いに影響はないと仮定しているから)

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_I} \\ \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \boldsymbol{\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^2}} & & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I^2} \end{bmatrix}$$

このヘッセ行列が停留点で正定値で
あれば狭義に凸である

行列が正定値とは…
行列 A に対してある行列x があったときに
$x^T Ax > 0$ が成り立つとき

最小化問題の基礎概念

制約無し問題(多変数)

一般に $Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda I$

を満たす x があるとき x を A の固有ベクトル、λ を固有値という
したがって

$$x^T Ax > 0 \rightarrow \lambda(\text{固有値}) > 0$$

となれば行列 A は正定値

ここでヘッセ行列を A とするとすべての変数についての二階微分が固有値に相当するので

$$\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_i^{\ 2}} > 0 \quad i = 1,2,\ldots,I \qquad (2.5)$$

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1^{\ 2}} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_2^{\ 2}} & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_I^{\ 2}} \end{bmatrix}$$

λI に相当

(2.5)が成立するとき関数は狭義に凸であり、唯一の解をもつ

リンク間相互作用がある場合はどうなるのか?

→いくつか仮定を置くと正定値を証明できる

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

$$\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_a} > 0$$

(7.39) 旅行時間はリンクフロー数が増加すれば増加する

$$\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_a} > \frac{\partial t_{a'}(x_{a'}, x_a)}{\partial x_a}$$

(7.40) リンクフロー数が増加したときの影響は
自分のリンク旅行時間>一方のリンク旅行時間

x_a $\qquad$ $x_{a'}$

(7.38),(7.39)の仮定を用いて関数が正定値であり、狭義に凸であることを示す

$$\frac{\partial z(x)}{\partial x_b} = t_b(x_b, x_{b'})$$

(7.38)より

$$\frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_a \partial x_b} = \frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_b} = \begin{cases} \dfrac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_a} & if \;\; b = a \\ \dfrac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_{a'}} & if \;\; b = a' \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \qquad (7.41)$$

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \nabla^2_{1,1} & 0 \;..... & & 0 \\ 0 & \nabla^2_{2,2} & & 0 \\ \vdots & & \nabla^2_{a,a'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{a,a'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_a}{\partial x_a} & \frac{\partial t_{a'}}{\partial x_a} \\ \frac{\partial t_a}{\partial x_{a'}} & \frac{\partial t_{a'}}{\partial x_{a'}} \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{a,a'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x_1} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_1} & \frac{\partial t_2}{\partial x_1} & \frac{\partial t_{2'}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_{1'}} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_{1'}} & \frac{\partial t_2}{\partial x_{1'}} & \frac{\partial t_{2'}}{\partial x_{1'}} \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_2} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_2} & \frac{\partial t_2}{\partial x_2} & \frac{\partial t_{2'}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_{2'}} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_{2'}} & \frac{\partial t_2}{\partial x_{2'}} & \frac{\partial t_{2'}}{\partial x_{2'}} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{1,1'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x_1} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_{1'}} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_{1'}} \end{bmatrix} \qquad \nabla^2_{2,2'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_2}{\partial x_2} & \frac{\partial t_{1'}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial t_2}{\partial x_{2'}} & \frac{\partial t_{2'}}{\partial x_{2'}} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{a,a'} = \begin{bmatrix} \nabla^2_{1,1'} & 0 \\ 0 & \nabla^2_{2,2'} \end{bmatrix}$$

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

(7.33)より等しい

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \nabla^2_{1,1} & 0 \;\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & \nabla^2_{2,2} & & 0 \\ \vdots & & \nabla^2_{a,a'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad \nabla^2_{a,a'} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial t_a}{\partial x_a} & \boxed{\dfrac{\partial t_{a'}}{\partial x_a}} \\ \boxed{\dfrac{\partial t_a}{\partial x_{a'}}} & \dfrac{\partial t_{a'}}{\partial x_{a'}} \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A_1 とA_2 が固有値λ_1, λ_2 をもつ2×2の対角行列とする $A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

このとき定義より $A_1 x = \lambda_1 x$ ， $A_2 x = \lambda_2 x$ (7.42)

$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ とおいたとき $AX = \Lambda X$ を満たす固有値Λ は明らかにλ_1, λ_2 である

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 X_1 \\ A_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 \\ \lambda_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \Lambda X$$

行列の固有値は構成される行列の固有値と等しい

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

$$\nabla^2_{a,a'} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_a}{\partial x_a} & \boxed{\dfrac{\partial t_{a'}}{\partial x_a}} \\ \boxed{\dfrac{\partial t_a}{\partial x_{a'}}} & \dfrac{\partial t_{a'}}{\partial x_{a'}} \end{vmatrix} = \frac{\partial t_a}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial t_{a'}}{\partial x_{a'}} - \frac{\partial t_{a'}}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial t_a}{\partial x_{a'}} > 0$$

$$\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_a} > 0 \qquad (7.39)$$

$$\frac{\partial t_a(x_a, x_{a'})}{\partial x_a} > \frac{\partial t_{a'}(x_{a'}, x_a)}{\partial x_a} \qquad (7.40)$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 > 0 \qquad a > 0 \qquad b > 0$$

このときの固有値は

$$\lambda = \frac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - c^2)}}{4}$$

$$\lambda = \frac{a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - c^2)}}{4} > 0$$

$$\lambda = \frac{a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - c^2)}}{4} > \frac{a + b - \sqrt{(a+b)^2}}{4} = 0$$

よってすべての a についてその行列 $\nabla^2_{a,a'}$ の固有値は正

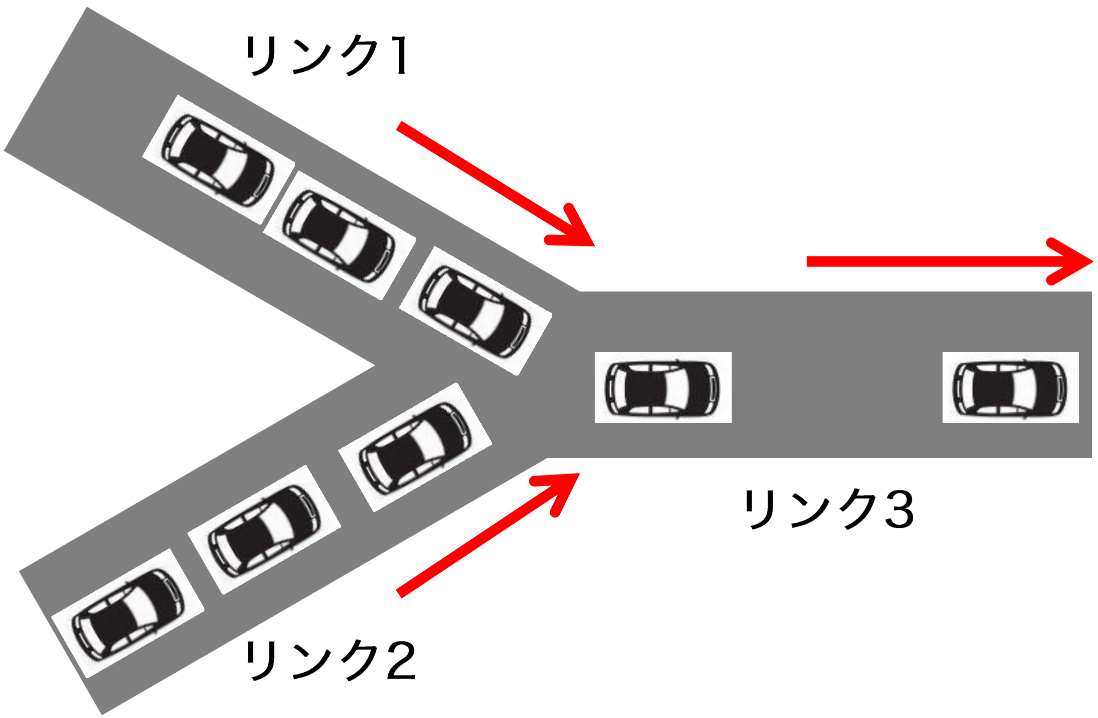
→ヘッセ行列 $\nabla^2 z(x)$ の固有値は正

→ヘッセ行列 $\nabla^2 z(x)$ は正定値

→リンク間相互作用があるときも解の一意性が確認できた

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡



待ち時間が長くなるとリンク2も混んでくる

→リンク2での混雑が最終的にリンク3の混雑状況にも影響を与えている

→並行するリンク以外にも相互作用のあるリンクがある

リンク相互作用のある均衡

対称なコスト関数を持つときの均衡

$$t_a = t_a(x_a, x_{a'}) \longrightarrow t_a = t_a(..x_a..) \quad (7.42)$$

自分のリンク交通量の他にいくつかのリンク交通量が関係していると考える

$$\frac{\partial t_a(X)}{\partial x_b} = \frac{\partial t_b(X)}{\partial x_a} \quad \forall a \neq b \quad (7.43)$$

このとき目的関数は

$$z(X) = \sum_a \left(\int_0^{x_a} t_a(..,x_a,..) d\omega \right) \quad (7.43)$$

先と同様の議論により二階微分は旅行時間関数 t_a の一階微分 $\frac{\partial t_a(X)}{\partial x_b}$ となり

ヘッセ行列

$$\nabla^2 z(x) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1(x_1,..)}{\partial x_1} & \frac{\partial t_2(.,x_2,..)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial t_a(.,x_a,..)}{\partial x_1} & \cdots\cdots \\ \frac{\partial t_1(x_1,..)}{\partial x_2} & \frac{\partial t_2(.,x_2,..)}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial t_a(.,x_a,..)}{\partial x_2} & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \frac{\partial t_1(x_1,..)}{\partial x_a} & \frac{\partial t_2(.,x_2,..)}{\partial x_a} & \cdots\cdots & \frac{\partial t_a(.,x_a,..)}{\partial x_a} & \cdots\cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial t_a(..,x_a,..)}{\partial x_a} > 0 \\ &\frac{\partial t_a(..,x_a,..)}{\partial x_a} >> \frac{\partial t_a(..,x_a,..)}{\partial x_b} \end{aligned}}$$

リンク相互作用のある均衡

非対称なコスト関数を持つときの均衡

$$\frac{\partial t_a(X)}{\partial x_b} \neq \frac{\partial t_b(X)}{\partial x_a} \quad \forall a \neq b$$

今までのように等価な数学的問題を解くことで解を得ることができない
→一連の基本的利用者均衡配分問題を繰り返し解くことで解を得ることを考える

n 回目の繰り返し計算のときのリンクフローを$X^n = (x_1^n, .., x_A^n)$ とする

全てのリンクフローがわかっていれば各リンクにおける旅行時間が分かるので解くべき問題は(7.44)のようになる

$$\min \ \overset{\sim n}{z}(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(x_1^n, .., x_{a-1}^n, \omega, x_{a+1}^n, .., x_A^n) d\omega \quad (7.44)$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

制約式

このときの各目的関数t_a は自分のリンクフローのみに依存する関数になっている
→他リンクからの影響が固定されている
→ヘッセ行列が対角行列になる(→対角化問題といわれる)
→ $n+1$ 回目の解を求めるときの関数は(7.45)になる

$$\overset{\sim n}{t}_a(x_a^{n+1}) = t_a(\underbrace{x_1^n, .., x_{a-1}^n}_{\text{定数}}, \underbrace{x_a^{n+1}}_{\text{変数}}, \underbrace{x_{a+1}^n, .., x_A^n}_{\text{定数}}) \quad (7.45)$$

リンク相互作用のある均衡

非対称なコスト関数を持つときの均衡

$$\min \overset{\sim n}{z}(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(x_1^n, \ldots, x_{a-1}^n, \omega, x_{a+1}^n, \ldots, x_A^n) d\omega \quad (7.44)$$

制約式

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad f_k^{rs} \geq 0$$

Step0 初期化: $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_A^0)$ を与える(0と置くなど)

Step1 対角化問題を解く: 新たな暫定解 $X^{n+1} = (x_1^{n+1}, \ldots, x_A^{n+1})$ を得る

Step1 収束判定: $X^n \cong X^{n+1}$ ならば試行終了、そうでなければStep1へ

$$\frac{1}{A} \sum_a \frac{\left| x_a^{n+1} - x_a^n \right|}{x_a^{n+1}} \leq \kappa \qquad A\text{:リンク数}$$

等価な数学的問題に置き換えてないので利用者均衡配分の条件が満たされているのかわからない

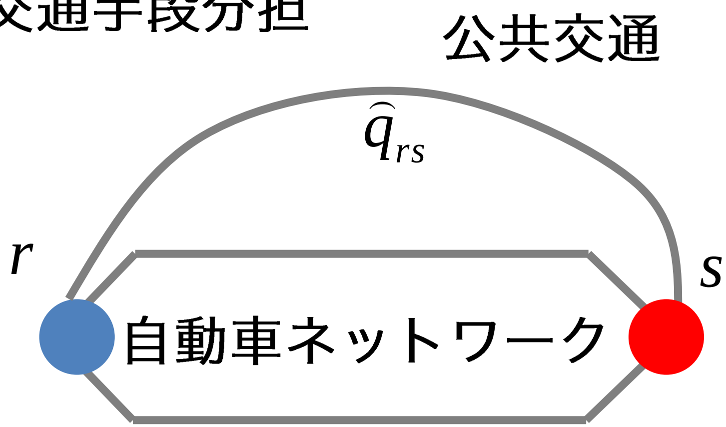
$X^n = X^{n+1}$ ならば X^n が利用者均衡を満たすフローパターンである　十分条件

X^n が利用者均衡を満たすフローパターンのとき $X^n = X^{n+1}$　必要条件

スーパーネット-移動選択統合モデル

公共交通ネットワークを用いた手段分担

交通手段分担



公共交通旅行時間: $\hat{u}_{rs}$

$$\min z(x,\hat{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \sum_{rs} \hat{q}_{rs}\hat{u}_{rs}$$

$$\sum_k f_k^{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs}$$

$$f_k^{rs}, \hat{q}_{rs} \geq 0$$

手段分担にロジット型の需要関数 $q_{rs} = \bar{q}_{rs} \dfrac{1}{1+e^{\theta(u_{rs}-\hat{u}_{rs})}}$ を用いる

公共交通が rs間の超過需要だとみなし、$\hat{q}_{rs}$の需要関数の逆関数に直す

$$W_{rs}(\hat{q}_{rs}) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs}-\hat{q}_{rs}}\right) + \hat{u}_{rs}$$

$$\min \ z(x,\hat{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \left\{\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{\omega}{\bar{q}_{rs}-\omega}\right) + \hat{u}_{rs}\right\}d\omega$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

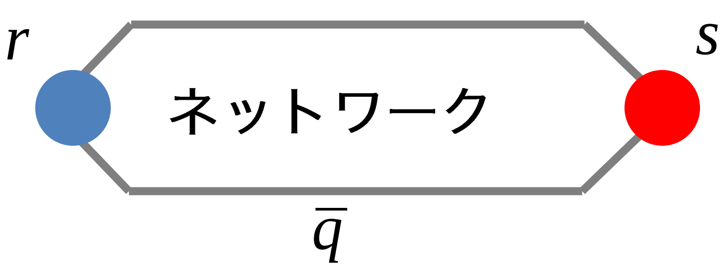
公共交通ネットワークを用いた手段分担

自動車、公共交通の rs間最短旅行時間が u_{rs} , $\hat{u}_{rs}$ だとすると均衡状態では(9.1)が成立している

$$\left(\widehat{c}_l^{rs} - \hat{u}_{rs}\right)\hat{f}_l^{rs} = 0 \qquad \left(c_k^{rs} - u_{rs}\right)f_k^{rs} = 0$$

$$\widehat{c}_l^{rs} - \hat{u}_{rs} \geq 0 \qquad c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0$$

(9.1



$$\widehat{c}_l^{rs} = \sum_a \widehat{t}_a \widehat{\delta}_{a,l}^{rs}$$

$$\widehat{x}_a = \sum_r \sum_s \sum_l \widehat{f}_k^{rs} \widehat{\delta}_{a,l}^{rs}$$

$$q_{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

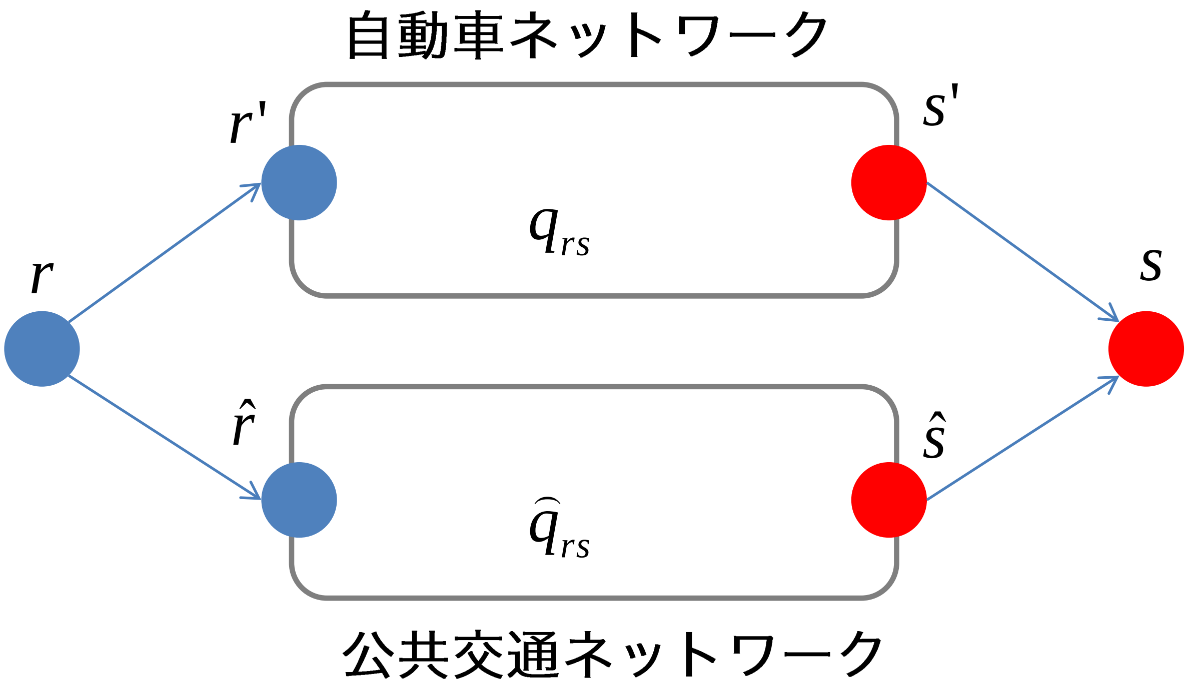
$$\sum_k \hat{f}_k^{rs} = \hat{q}_{rs}$$

(9.2)

フロー数制約

スーパーネット–移動選択統合モデル

公共交通ネットワークを用いた手段分担



ダミーノード: r' $\hat{r}$ s' $\hat{s}$

ダミーリンク(コスト0)

$$r \to r'$$
$$r \to \hat{r}$$
$$s' \to s$$
$$\hat{s} \to s$$

最短旅行時間の手段を選択するとは限らないのでロジット型の分担関数を使う

$$q_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{1}{1+e^{\theta(u_{rs}-\hat{u}_{rs}-\Psi_{rs})}} \tag{9.3}$$

Ψ_{rs} は手段に対する旅行時間以外の要素を表現している

例えば $\Psi_{rs} > 0$ ならば旅行時間が同じでも自動車を好んで使う傾向がある

スーパーネット–移動選択統合モデル

公共交通ネットワークを用いた手段分担

$$q_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{1}{1+e^{\theta(u_{rs}-\hat{u}_{rs}-\Psi_{rs})}} \quad (9.3)$$

$$W_{rs}(\hat{q}_{rs}) = u_{rs}(\hat{q}_{rs}) = \frac{1}{\theta}\ln\frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs}-\hat{q}_{rs}} + \hat{u}_{rs} + \Psi_{rs} \quad (9.4)$$

$$\min\ z(X,\hat{X},\hat{Q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \sum_{rs}\int_0^{\hat{q}_{rs}} \{\frac{1}{\theta}\ln(\frac{\omega}{\bar{q}_{rs}-\omega}) + \boxed{\hat{u}_{rs}} + \Psi_{rs}\}d\omega$$

$$= \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \sum_{rs}\int_0^{\hat{q}_{rs}} \{\frac{1}{\theta}\ln(\frac{\omega}{\bar{q}_{rs}-\omega}) + \Psi_{rs}\}d\omega + \boxed{\sum_b \int_0^{\hat{x}_b} \hat{t}_b(\omega)d\omega}$$

(9.5)

$$\sum_k f_k^{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs}$$

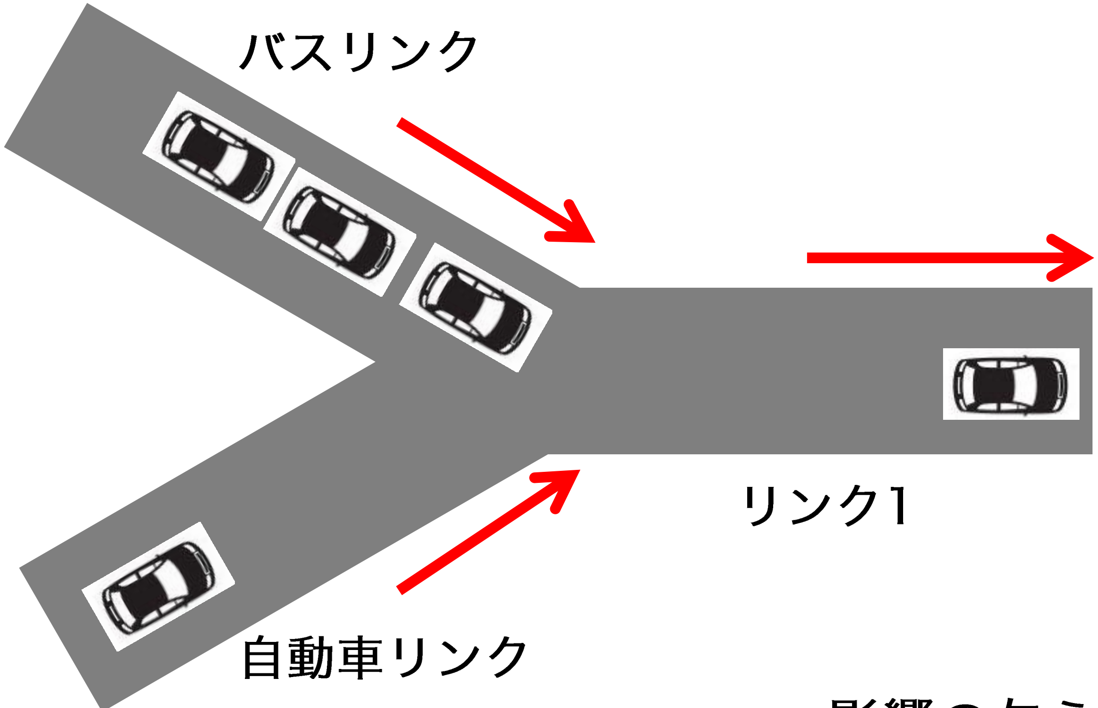
$$\sum_k \hat{f}_l^{rs} = \hat{q}_{rs} \qquad f_k^{rs},\ \hat{f}_l^{rs} \geq 0$$

制約式

スーパーネット–移動選択統合モデル

相互作用のある手段分担

公共交通がバスの時、バスの交通量が自動車の旅行時間に影響を与える



自動車リンク交通量: x_a

バスリンク交通量: $\hat{x}_a$

$$t_a = t_a(x_a, \hat{x}_a)$$
$$\hat{t}_a = \hat{t}_a(\hat{x}_a, x_a)$$

$$\frac{\partial t_a(x_a, \hat{x}_a)}{\partial \hat{x}_a} \neq \frac{\partial \hat{t}_a(\hat{x}_a, x_a)}{\partial x_a}$$

影響の与え方は非対称→対角化問題を解く

$$\min\ \tilde{z}^n(X, \hat{X}, \hat{Q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega, \hat{x}_a^n)d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \{\frac{1}{\theta} \ln(\frac{\omega}{\bar{q}_{rs} - \omega}) + \Psi_{rs}\} d\omega + \sum_a \int_0^{\hat{x}_a} \hat{t}_a(\omega, x_a^n) d\omega$$

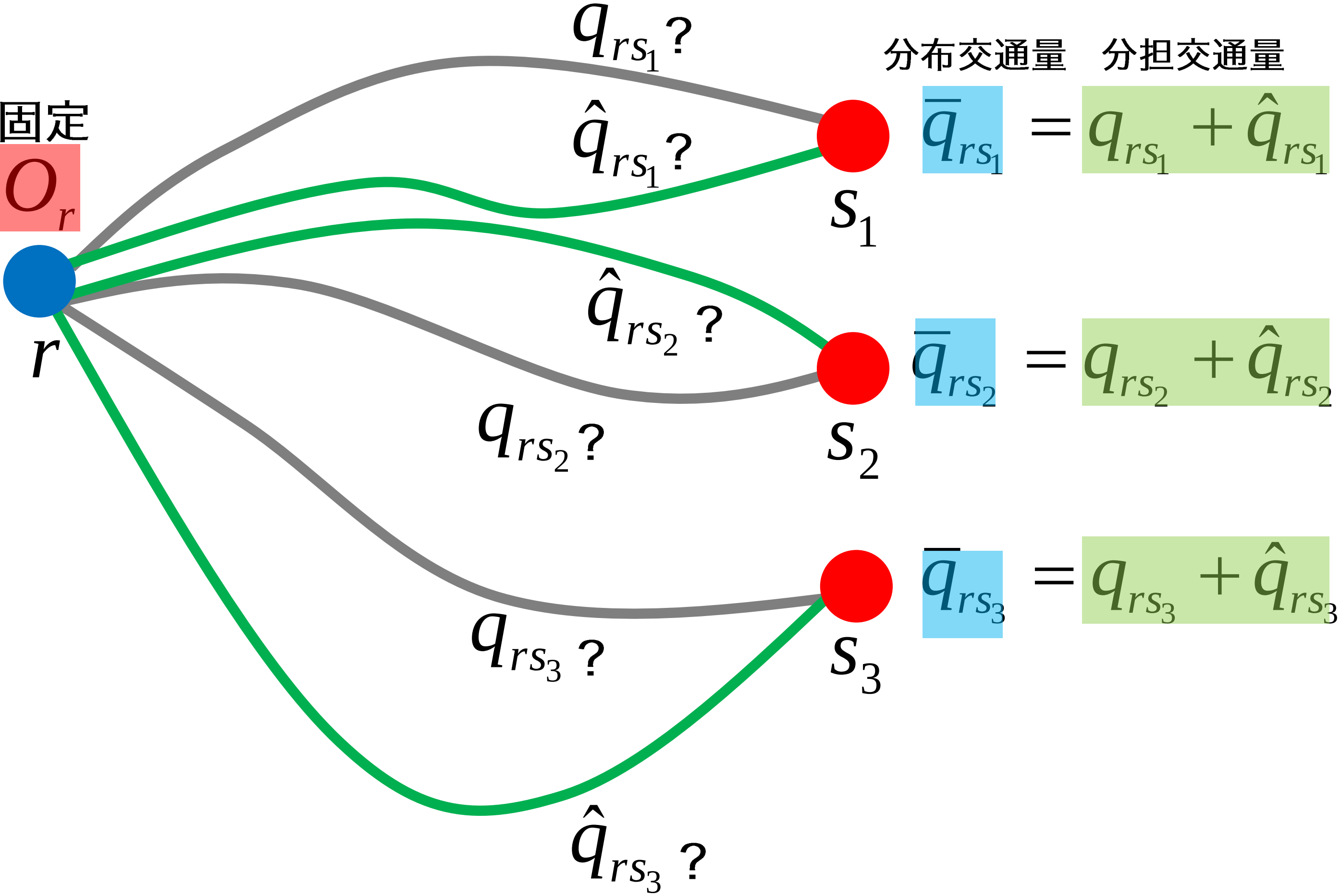
$$\boxed{\sum_k f_k^{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs}\ , \sum_k \hat{f}_l^{rs} = \hat{q}_{rs}\ ,\ f_k^{rs}, \hat{f}_l^{rs} \geq 0} \quad (9.6)$$

制約式

スーパーネットワーク-移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

ここまでそれぞれ手段分担、分布モデルなどは独立に扱ってきた
→同時に手段分担と交通量分布モデルを扱う



発生交通量 O_r が固定されており、各目的地にどれくらいの人が向かうのか($\bar{q}_{rs}$) と目的地ごとの交通手段分担($\hat{q}_{rs}, q_{rs}$)を求める問題

スーパーネット–移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

ここまでそれぞれ手段分担、分布モデルなどは独立に扱ってきた
→同時に手段分担と交通量分布モデルを扱う

前回と同様にロジット型の分担関数を用いると rs 間の自動車利用者数は(9.3)

$$q_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{1}{1+e^{\theta(u_{rs}-\hat{u}_{rs}-\Psi_{rs})}}$$

$$\bar{q}_{rs} = q_{rs} + \hat{q}_{rs}$$

合計　自動車 公共交通

分担に関するロジット関数

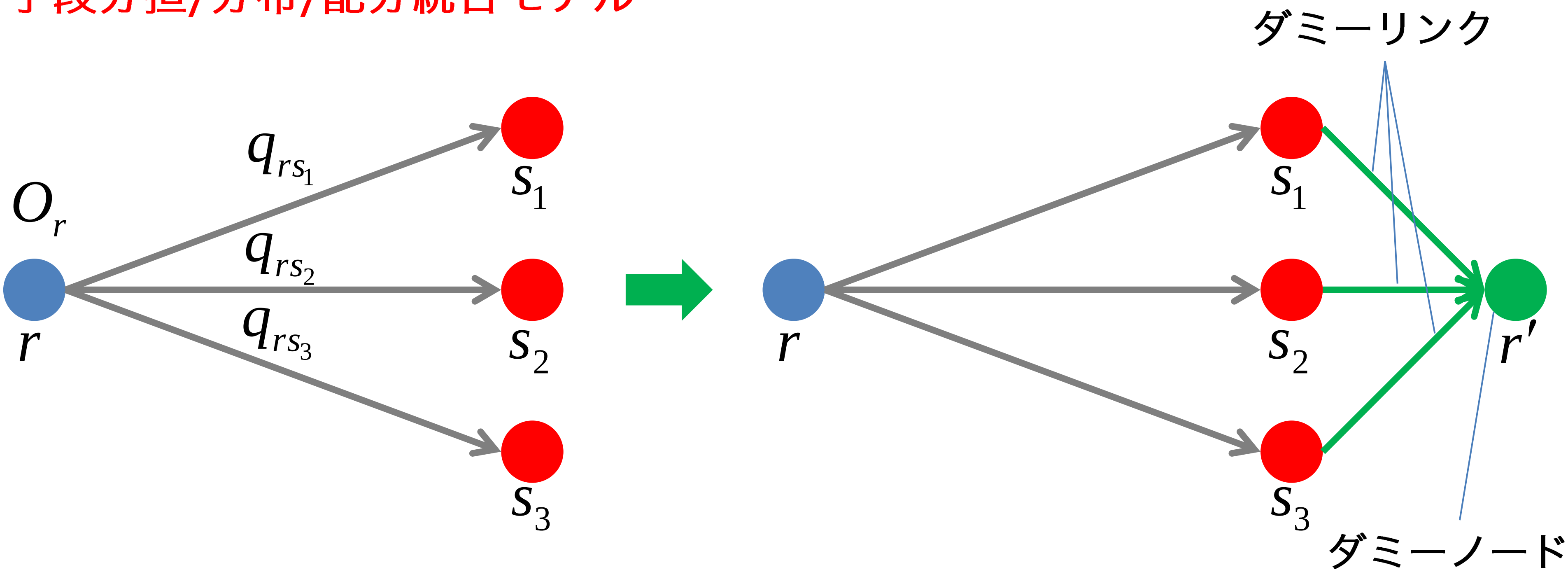
$$\bar{q}_{rs} = O_r \frac{e^{-\gamma(u_{rs}-M_{rs})}}{\sum_m e^{-\gamma(u_{rm}-M_{rm})}}$$

分布に関するロジット関数

ネットワーク表現を変化させることで解くことを考える

スーパーネット–移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル



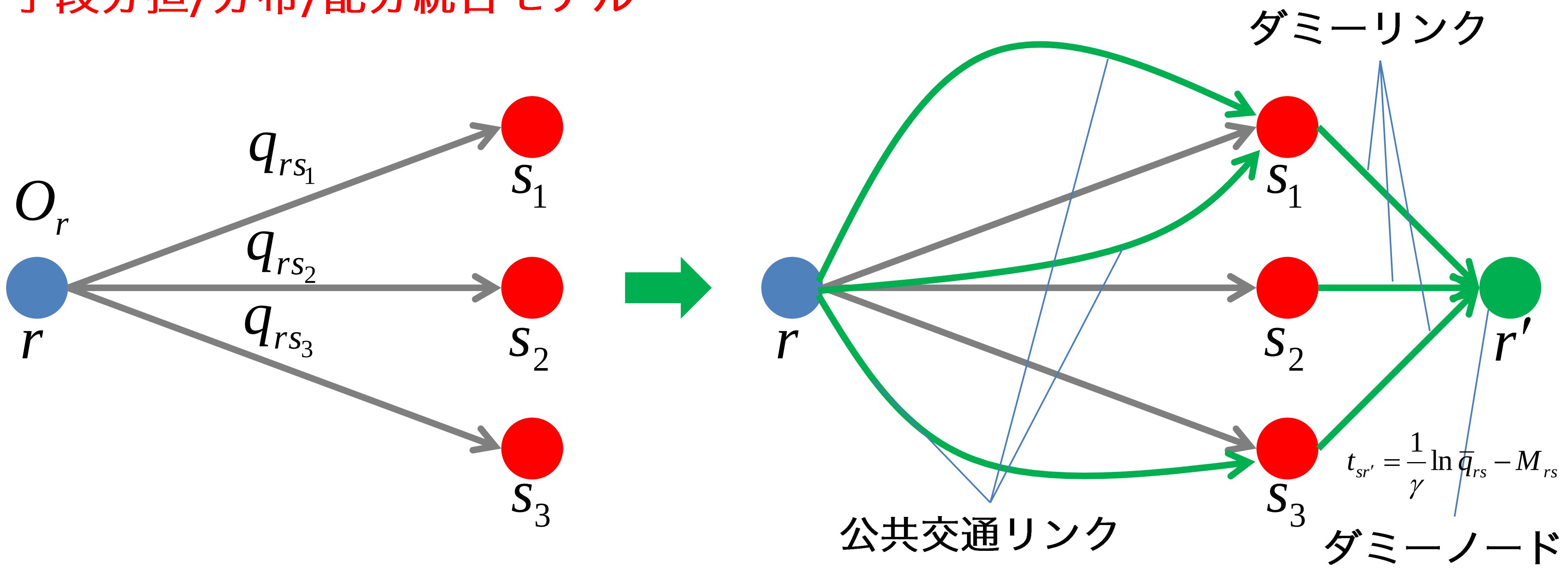
7章の分布/配分モデルのときと同様のネットワーク表現を用いる

ダミーリンク旅行時間:

$$t_{sr'} = \frac{1}{\gamma} \ln \bar{q}_{rs} - M_{rs} \quad (9.8)$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル



6章の分担/配分モデルのときと同様のネットワーク表現を用いる

公共交通リンク旅行時間 $\hat{t}_{rs}(\hat{q}_{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln \frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}} + \hat{u}_{rs} + \Psi_{rs}$ (9.9)

解くべき問題

$$\min\ z(X, \hat{Q}, \overline{Q}) = \underbrace{\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega}_{\text{通常リンク旅行時間}} + \underbrace{\sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\theta} \ln \frac{\omega}{\bar{q}_{rs} - \omega} + \Psi_{rs} + \hat{u}_{rs} \right) d\omega}_{\text{公共交通旅行時間}} + \underbrace{\sum_{rs} \int_0^{\bar{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\gamma} \ln \omega - M_{rs} \right) d\omega}_{\text{ダミーリンク旅行時間}}$$

$\sum_k f_k^{rs} = \bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}$ $f_k^{rs} \geq 0$ $O_r = \sum_s \bar{q}_{rs}$ $0 < \hat{q}_{rs} < \bar{q}_{rs}$ 制約式 (9.10)

スーパーネット–移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

$$\min\ z\left(X, \hat{Q}, \overline{Q}\right) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\theta} \ln \frac{\omega}{\overline{q}_{rs} - \omega} + \Psi_{rs} + \hat{u}_{rs} \right) d\omega$$

$$+ \sum_{rs} \int_0^{\overline{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\gamma} \ln \omega - M_{rs} \right) d\omega$$

公共交通フロー数とOD間フロー数が変数になっている

それぞれの変数に関する旅行時間

$$t_{sr'} = \frac{1}{\gamma} \ln \overline{q}_{rs} - M_{rs} \qquad (9.8)$$

$$\hat{t}_{rs}(\hat{q}_{rs}) = \frac{1}{\theta} \ln \frac{\hat{q}_{rs}}{\overline{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}} + \hat{u}_{rs} + \Psi_{rs} \qquad (9.9)$$

非対称の相互作用があることがわかる→対角化問題を解けばよい

スーパーネットワーク-移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

$$\min\ L\left(X,\hat{Q},\overline{Q}\right)=\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega+\sum_{rs}\int_0^{\hat{q}_{rs}}\left(\frac{1}{\theta}\ln\frac{\omega}{\overline{q}_{rs}-\omega}+\Psi_{rs}+\hat{u}_{rs}\right)d\omega \quad (9.11)$$

$$+\sum_{rs}\int_0^{\overline{q}_{rs}}\left(\frac{1}{\gamma}\ln\omega-M_{rs}\right)d\omega+\sum_{rs}u_{rs}\left(\overline{q}_{rs}-\hat{q}_{rs}-\sum_k f_k^{rs}\right)+\sum_r\lambda_r\left(\sum_s O_r-\overline{q}_{rs}\right)$$

対角化問題を解いて最終的な解にたどり着いたとき(9.12)～(9.15)が成り立つ

(9.11)を f_k^{rs} について微分

$$\left(c_k^{rs}-u_{rs}\right)f_k^{rs}=0 \quad (9.12)$$

$$c_k^{rs}-u_{rs}\geq 0 \quad (9.13)$$

(9.11)を $\hat{q}_{rs}$ について微分

$$\frac{1}{\theta}\ln\frac{\hat{q}_{rs}}{\overline{q}_{rs}-\hat{q}_{rs}}+\Psi_{rs}+\hat{u}_{rs}-u_{rs}=0 \quad (9.14)$$

(9.11)を $\overline{q}_{rs}$ について微分

$$\frac{1}{\gamma}\ln\overline{q}_{rs}-M_{rs}+u_{rs}-\lambda_r=0 \quad (9.15)$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

$$\frac{1}{\theta}\ln\frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs}-\hat{q}_{rs}}+\Psi_{rs}+\hat{u}_{rs}-u_{rs}=0$$

(9.14)

$$q_{rs}=\bar{q}_{rs}\frac{1}{1+e^{\theta(u_{rs}-\hat{u}_{rs}-\Psi_{rs})}}$$

分担に関するロジット関数

$$\frac{1}{\gamma}\ln\bar{q}_{rs}-M_{rs}+u_{rs}-\lambda_r=0$$

(9.15)

$$\bar{q}_{rs}=e^{\gamma\lambda_r}e^{-\gamma(u_{rs}-M_{rs})}$$

$$O_r=\sum_m\bar{q}_{rm}=e^{\gamma\lambda_r}\sum_m e^{-\gamma(u_{rs}-M_{rs})}$$

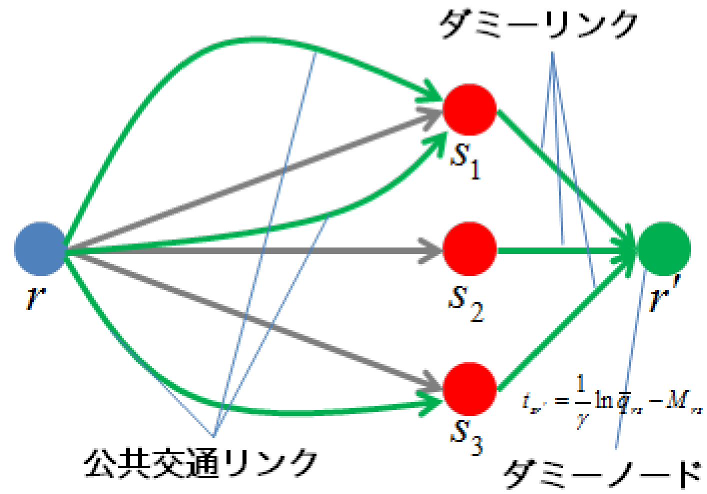
$$\bar{q}_{rs}=O_r\frac{e^{-\gamma(u_{rs}-M_{rs})}}{\sum_m e^{-\gamma(u_{rm}-M_{rm})}}$$

分布に関するロジット関数

スーパーネット-移動選択統合モデル

手段分担/分布/配分統合モデル

スーパーネットワークにおいて自動車と公共交通を用いてrr'の旅行時間は?



自動車=通常のネットワーク+ダミーリンク

$$u_{rs} + \left(\frac{1}{\gamma} \ln \bar{q}_{rs} - M_{rs} \right) = \lambda_r \quad (9.16)$$

(9.15)より

公共交通=公共交通リンクク+ダミーリンク

$$\left(\frac{1}{\theta} \ln \frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}} + \Psi_{rs} + \hat{u}_{rs} \right) + \left(\frac{1}{\gamma} \ln \bar{q}_{rs} - M_{rs} \right) = \lambda_{rs} \quad (9.17)$$

(9.14)+(9.15)より

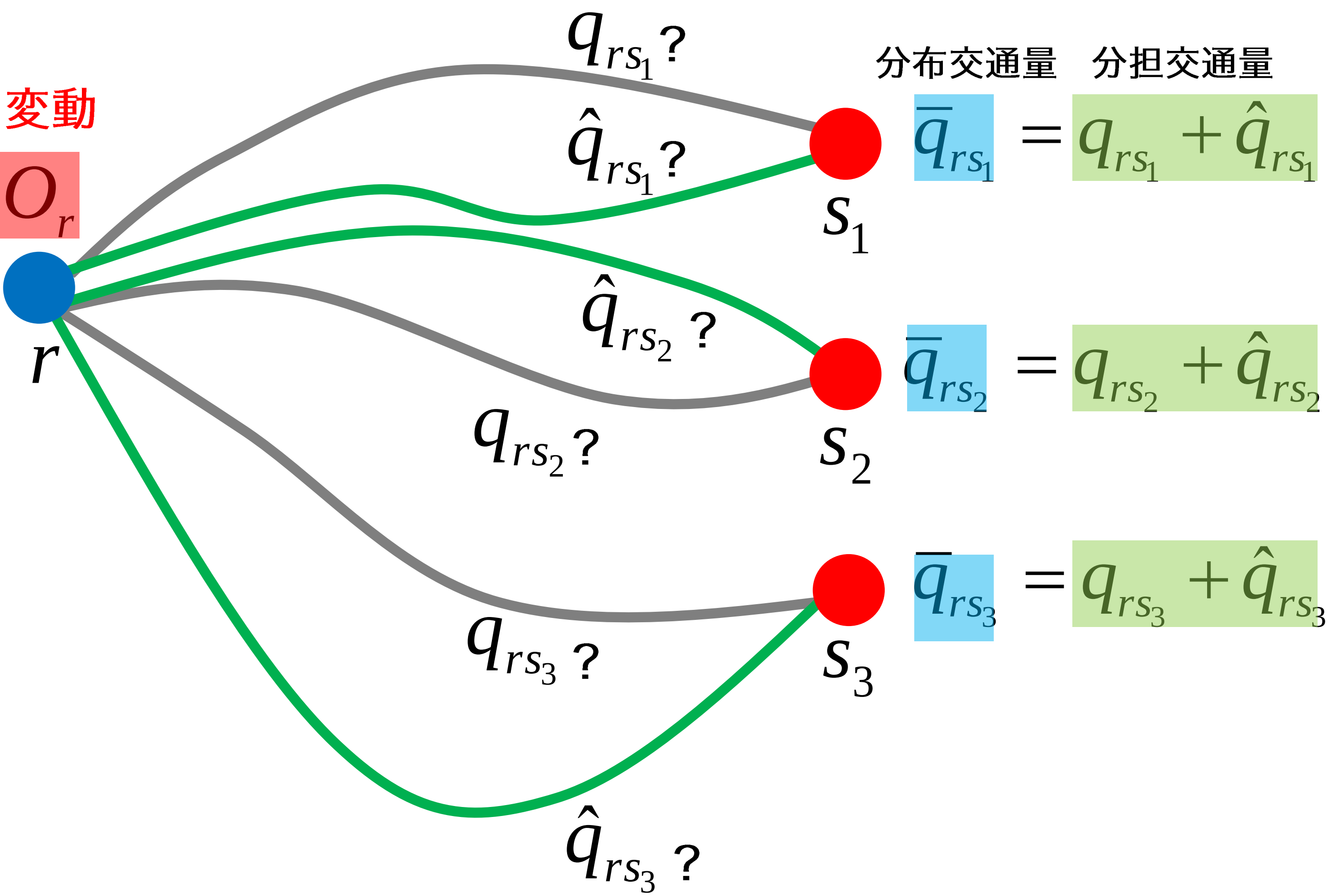
λ_{rs} がrr'間の最短旅行時間を表している

$$\frac{1}{\theta} \ln \frac{\hat{q}_{rs}}{\bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs}} + \Psi_{rs} + \hat{u}_{rs} - u_{rs} = 0 \quad (9.14)$$

$$\frac{1}{\gamma} \ln \bar{q}_{rs} - M_{rs} + u_{rs} - \lambda_r = 0 \quad (9.15)$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

需要変動型手段分担/分布/配分統合モデル



発生交通量 O_r が旅行時間に応じて変動する→需要関数を用いる

$O_r = D_r(\lambda_r)$ (9.18)　　λ_{rs}:スーパーネットワークの rr' 間の旅行時間

スーパーネット–移動選択統合モデル

需要変動型手段分担/分布/配分統合モデル

6章で扱った需要変動型モデル

$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega$$

需要関数の逆関数の総和のマイナス項が挿入されている

$$O_r = D_r(\lambda_r) \Rightarrow \lambda_r = D_r^{-1}(O_r) \quad (9.19)$$

逆関数

(9.19)を(9.10)に挿入

$$\min \ z(X, \hat{Q}, \overline{Q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\theta} \ln \frac{\omega}{\overline{q}_{rs} - \omega} + \Psi_{rs} + \hat{u}_{rs} \right) d\omega$$

$$+ \sum_{rs} \int_0^{\overline{q}_{rs}} \left(\frac{1}{\gamma} \ln \omega - M_{rs} \right) d\omega - \sum_{rs} \int_0^{O_r} D_r^{-1}(\omega) d\omega \quad (9.20)$$

制約式

$$\sum_k f_k^{rs} = \overline{q}_{rs} - \hat{q}_{rs} \qquad f_k^{rs} \geq 0 \qquad 0 < \hat{q}_{rs} < \overline{q}_{rs} \qquad O_r = \sum_s \overline{q}_{rs} \qquad O_r \leq \overline{O}_r \quad (9.21)$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

需要変動型手段分担/分布/配分統合モデル

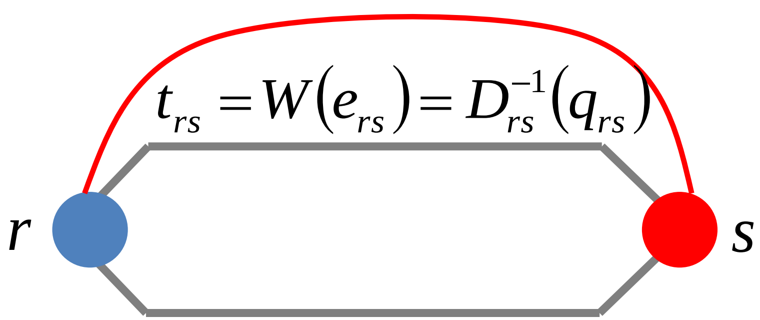
超過需要法

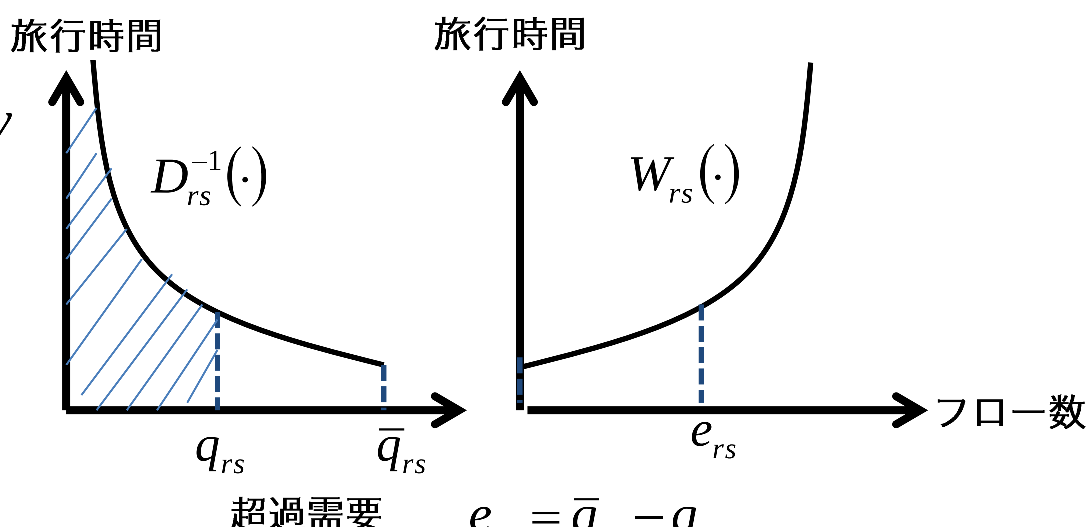
$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega = \underbrace{\int_0^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega}_{\text{定数}} - \int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

$$\int_{q_{rs}}^{\bar{q}_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega = \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)dv$$

$$\min \ z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \int_0^{e_{rs}} W_{rs}(v)dv$$



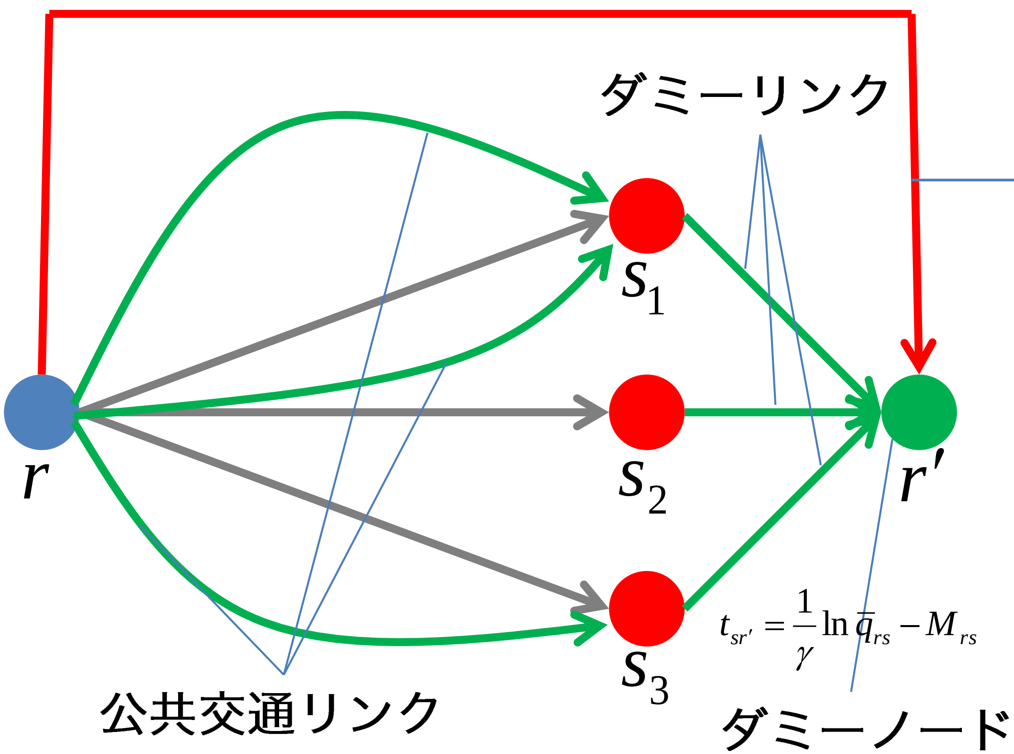


$$e_{rs} = \bar{q}_{rs} - q_{rs}$$

スーパーネット–移動選択統合モデル

需要変動型手段分担/分布/配分統合モデル

超過需要法



$$e_r = \overline{O}_r - O_r$$

$$W_{rs}(e_r) = D_r^{-1}(O_r)$$