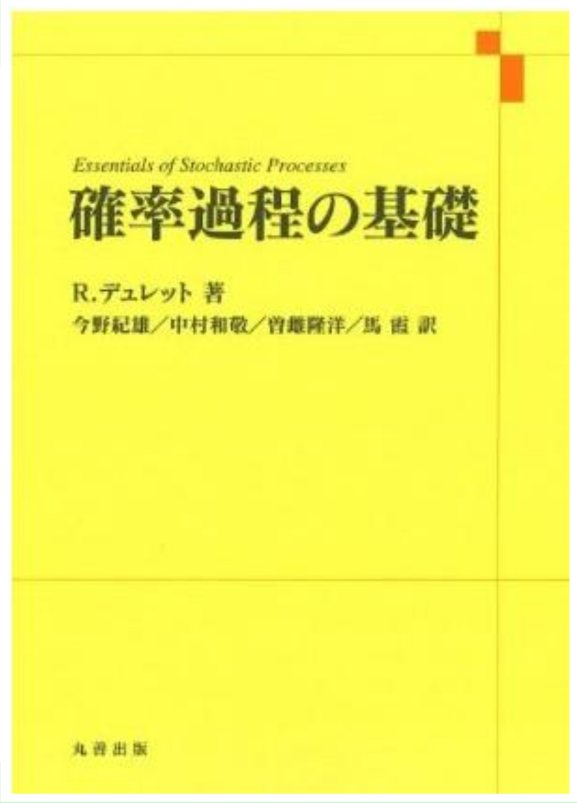
確率過程の基礎 (Essencials of Stochastic Processes)

R. デュレット 著、今野紀雄／中村和敬／曽雌隆洋／馬霞 訳
丸善出版, 2012.



第1章　マルコフ連鎖

2013年5月26日
M2　伊藤 創太

マルコフ連鎖

定義と例

推移確率

状態の分類

極限の挙動

特別な例

１ステップによる計算

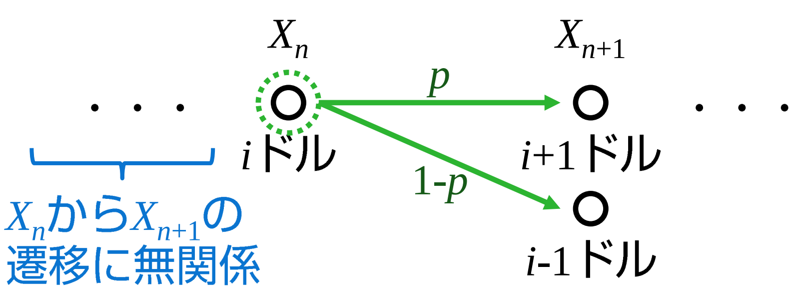
無限状態空間

マルコフ性

確率過程 $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ が与えられたとき、
過去のいかなる情報も X_{n+1} の予測には無関係

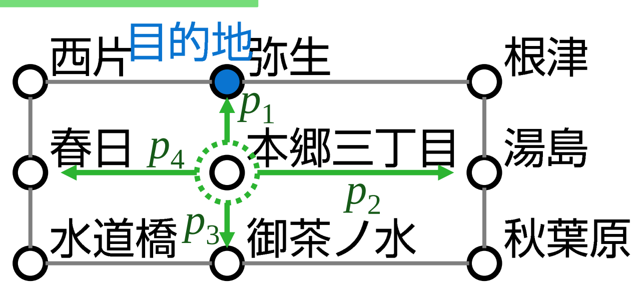
$$P(X_{n+1}=j \mid X_n = i, \underbrace{X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0}_{\text{関係ない}}) = \underbrace{p(i,j)}_{i\text{ から }j\text{ に遷移する確率}}$$

ギャンブラーの破産問題



- 確率 p=0.4 で 1 ドル得る
- 確率 1-p=0.6 で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- 5 ドルになるとやめる（終了）

街路上での経路選択

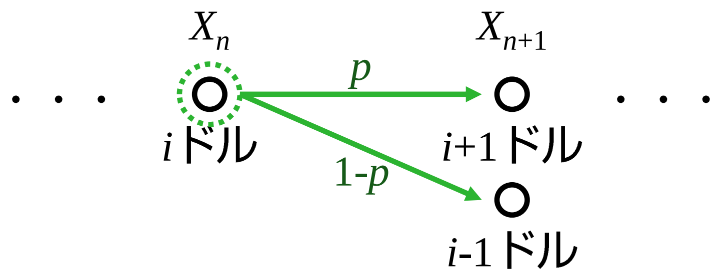


- 交差点での遷移確率が既知
- 歩行者は街路上を動く
- 目的地に到着したら終了

推移確率

マルコフ連鎖とは、推移確率行列で記述される確率過程のこと

ギャンブラーの破産問題

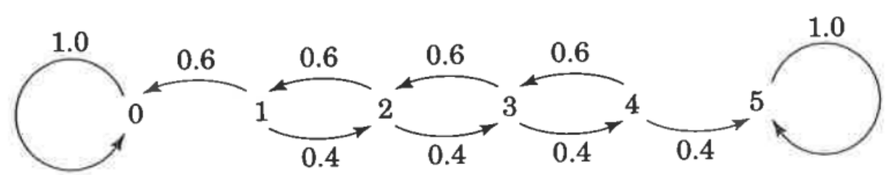


- 確率 $p=0.4$ で 1 ドル得る
- 確率 $1-p=0.6$ で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- 5 ドルになるとやめる（終了）

推移確率行列

	0	1	2	3	4	5
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

推移図



推移確率の性質

$$p(i, j) \geq 0$$

確率は必ず0以上

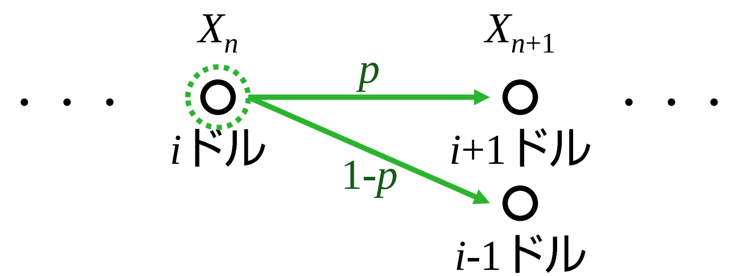
$$\sum_j p(i, j) = 1$$

次のステップで必ずいずれかの状態になる

吸収状態

$p(x, x) = 1$ となる状態 x を吸収状態という
到達すると移動がなくなる状態

ギャンブラーの破産問題



- 確率 p=0.4 で 1 ドル得る
- 確率 1-p=0.6 で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- 5 ドルになるとやめる（終了）

推移確率行列

	0	1	2	3	4	5
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

$p(0, 0) = 1$（吸収状態）

$p(5, 5) = 1$（吸収状態）

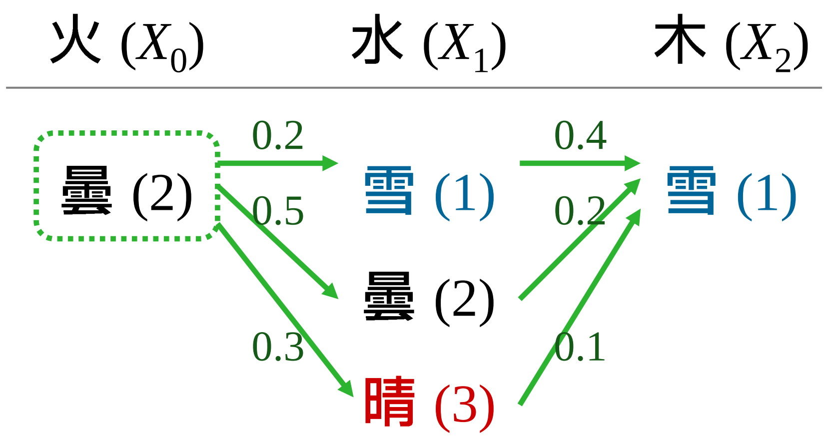
複数ステップの推移確率

気象連鎖

・１日ごとの天気をマルコフ連鎖と考える
・右の推移確率行列 p に従って天気が推移

	1 雪	2 曇	3 晴
1 雪	0.4	0.6	0.0
2 曇	0.2	0.5	0.3
3 晴	0.1	0.7	0.2

火曜日に曇(2)で、2日後の木曜日に雪(1)になる確率は？



途中(水曜日)の全ての状態を考えれば良い

$$P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2)$$
$$= \underline{(0.2)(0.4)} + \underline{(0.5)(0.2)} + \underline{(0.3)(0.1)}$$
$$= 0.21$$

チャップマン-コルモゴロフ方程式

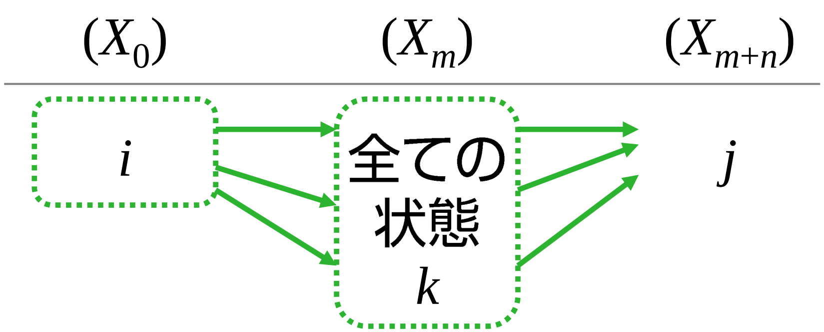
現在状態 i で m ステップ後に状態 j である確率を $p^m(i, j)$ とすると、

$$p^{m+n}(i, j) = \sum_k p^m(i,k)\,p^n(k, j)$$

（意味）

・$m+n$ ステップの推移では m ステップ後に全状態のいずれかになっている

・m ステップの移動と、残りの n ステップの移動はマルコフ性なので独立・



確率の掛け合わせが可能

m ステップの推移確率 $P(X_{m+n}=j|\, X_n=i\,)$ は推移確率 p の m 乗で与えられる

定理2.1

チャップマン-コルモゴロフ方程式

現在状態 i で m ステップ後に状態 j である確率を $p^m(i,j)$ とすると、

$$p^{m+n}(i,j) = \sum_k p^m(i,k)\,p^n(k,j)$$

気象連鎖

・１日ごとの天気をマルコフ連鎖と考える
・右の推移確率行列 p に従って天気が推移

	1 雪	2 曇	3 晴
1 雪	0.4	0.6	0.0
2 曇	0.2	0.5	0.3
3 晴	0.1	0.7	0.2

火曜日に曇(2)で、2日後の木曜日に雪(1)になる確率は？

$$p^2(2,1) = \sum_k p(2,k)\,p(k,1)$$

➡ **推移行列の積の要素**

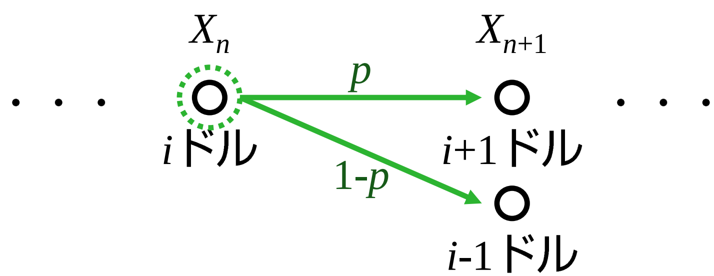
$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ \boxed{0.2 \quad 0.5 \quad 0.3} \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0.4\\0.2\\0.1\end{matrix}} & \begin{matrix}0.6\\0.5\\0.7\end{matrix} & \begin{matrix}0.0\\0.3\\0.2\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.54 & 0.18 \\ \boxed{0.21} & 0.58 & 0.21 \\ 0.20 & 0.55 & 0.25 \end{pmatrix}$$

チャップマン-コルモゴロフ方程式

現在状態 i で m ステップ後に状態 j である確率を $p^m(i, j)$ とすると、

$$p^{m+n}(i, j) = \sum_k p^m(i,k)\,p^n(k, j)$$

ギャンブラーの破産問題



- 確率 p=0.4 で 1 ドル得る
- 確率 1-p=0.6 で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- 4 ドルになるとやめる（終了）

２０回やったときにどうなる？　勝てる？負ける？

p =

	0	1	2	3	4
0	1.0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0
3	0	0	0.6	0	0.4
4	0	0	0	0	1.0

1 ドルで始めて20回目以内に破産する確率

$$p^{20} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0.87655} & 0.00032 & 0 & 0.00022 & \boxed{0.12291} \\ 0.69186 & 0 & 0.00065 & 0 & 0.30749 \\ 0.41482 & 0.00049 & 0 & 0.00032 & 0.58437 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 ドルで始めて20回目以内に勝つ確率

停止時刻

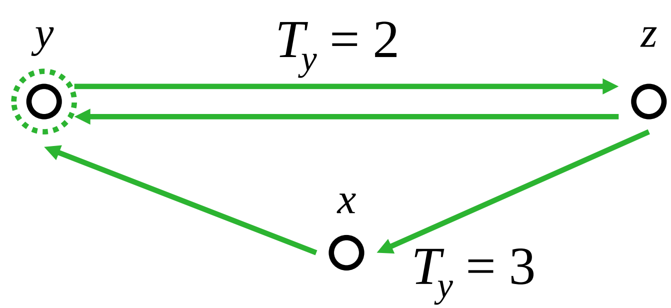
状態 y を出発して、状態 y に初めて戻る時刻が確率過程 $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ のみで決まるとき、以下の T_y を**停止時刻**と呼ぶ

$$T_y = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}$$

停止時刻が有限である確率を

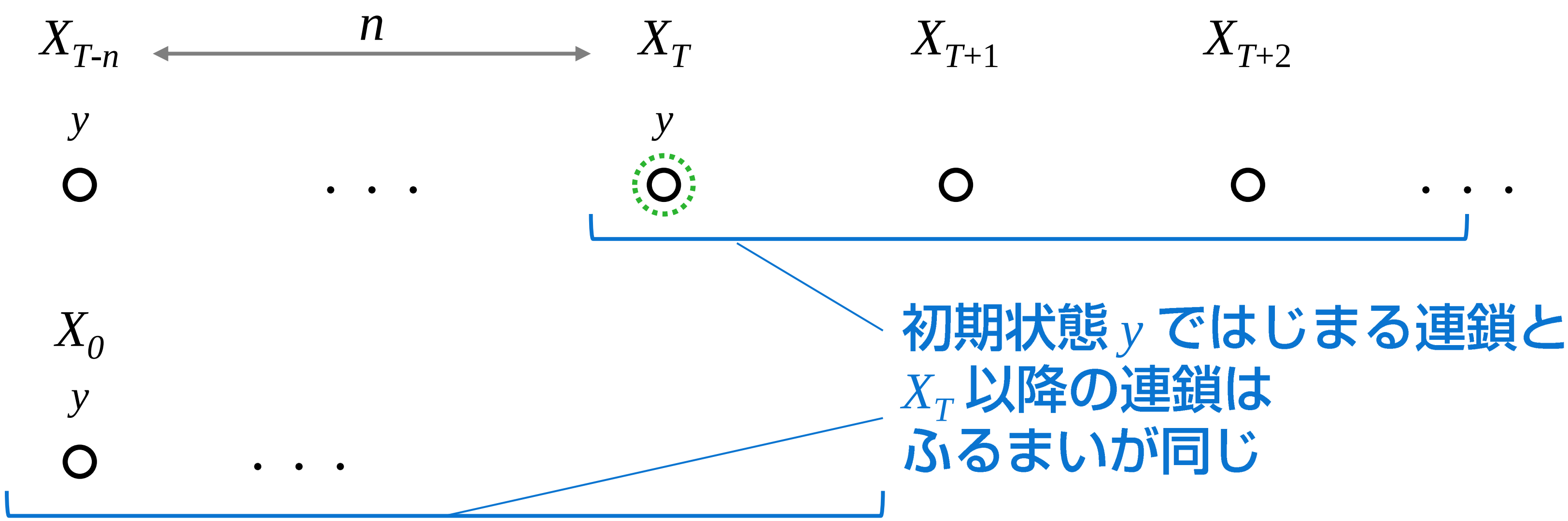
$$g_y = P(T_y < \infty \mid X_0 = y)$$

とする



強マルコフ性

停止時刻を $T=n$ 、$X_T=y$ を与えたとき、$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_T$ のいかなる情報も未来の状態に無関係、X_{T+k} は初期状態yで始まる連鎖と同様にふるまう



コミュニケートする

ある状態 x から出発し、状態 y に到達する確率が正のとき、

$$\rho_{xy} = P_x(\underline{T_y < \infty}) > 0$$

x から y に有限回で到達
（1ステップでなくてもいい）

x は y にコミュニケートするという（$x \to y$ と書く）

7状態連鎖

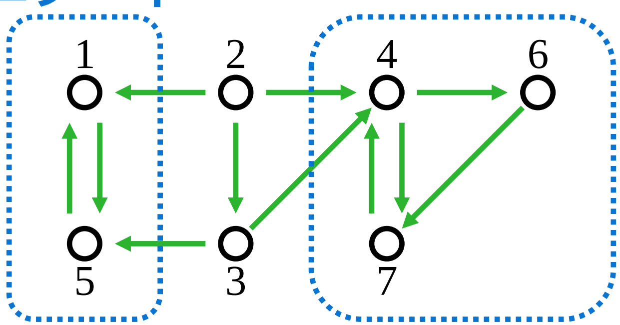
・右の推移確率行列 p に従う

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0.3	0	0	0	0.7	0	0
2	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0	0
3	0	0	0.2	0.5	0.3	0	0
4	0	0	0	0	0	0.5	0.5
5	0.6	0	0	0	0.4	0	0
6	0	0	0	0.4	0	0.2	0.4
7	0	0	0	1	0	0	0

$\{1,5\}$：相互にコミュニケート

$\{4,6,7\}$：相互にコミュニケート

状態 1 は状態 2 に
コミュニケートしていない
（到達できない）



集合 B が $i,j \in B$ について
相互にコミュニケート

集合 B は **既約** という

極限の挙動

状態 y が非再帰的（再び戻る確率が1未満）ならば、
$n \to \infty$ とすると時刻 n 以降に戻る確率は 0 に収束

$$p^n(x,y) = P_x(X_n = y) \to 0$$

状態 y が再帰的（再び戻る確率が1）ならば、$p^n(x,y)$ は収束する？？

１）収束しない場合はあるか？

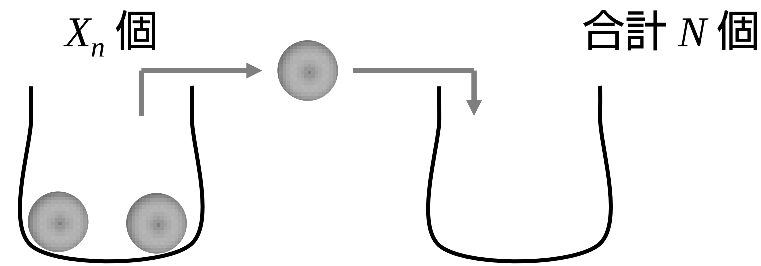
２）収束するときの極限値はいくらか？

周期

定義 $p^n(x,x)>0$ を満たす全ての n に対する最大の約数
すなわち、$I_x=\{n\geqq 1 : p^n(x,x)>0\}$の最大公約数

エーレンフェスト連鎖

合計 N 個の球が２つの壺にある
１個のボールを無作為に取り出し、
他方の壺に移す



推移確率行列

$p=$

	0	1	2	3
0	0	3/3	0	0
1	1/3	0	2/3	0
2	0	2/3	0	1/3
3	0	0	3/3	0

$p^2=$

	0	1	2	3
0	1/3	0	2/3	0
1	0	7/9	0	2/9
2	2/9	0	7/9	0
3	0	2/3	0	1/3

遷移確率が 0 の要素に注目

偶奇性に注目すると、同じ状態に
奇数回で戻るのは不可能

$p^n(x,x)>0$ を満たすのは $n=2, 4, \ldots$ なので、最大公約数は 2

全ての状態 n の周期は 2

定常分布

状態が収束するとき、極限をみつけたい

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x, y) = \pi(y)$$

このときの π を定常分布とよび、$\pi p=\pi$ の解である

定理4.5
（収束定理）

p が既約かつ非周期的で定常分布 π を持つ。
このとき、$n\to\infty$ で $p^n(x, y) \to \pi(y)$ が成り立つ

定常分布は「各状態に滞在する割合の極限になっている」

定常分布

定理4.5
（収束定理）

p が既約かつ非周期的で定常分布 π を持つ。
このとき、$n\to\infty$ で $p^n(x, y) \to \pi(y)$ が成り立つ

気象連鎖

・１日ごとの天気をマルコフ連鎖と考える
・右の推移確率行列 p に従って天気が推移

	1 雪	2 曇	3 晴
1 雪	0.4	0.6	0.0
2 曇	0.2	0.5	0.3
3 晴	0.1	0.7	0.2

$\pi p=\pi$ を解く

$$
\begin{aligned}
\pi_1(0.4)+\pi_2(0.2)+\pi_3(0.1) &= \pi_1 \\
\pi_1(0.6)+\pi_2(0.5)+\pi_3(0.7) &= \pi_2 \\
\pi_2(0.3)+\pi_3(0.2) &= \pi_3 \\
\pi_1+\pi_2+\pi_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\pi_1 = 0.22353 \qquad \pi_2 = 0.56471 \qquad \pi_3 = 0.21176
$$

p の極限と一致する

$$
p^8 = \begin{pmatrix} 0.22355 & 0.56470 & 0.21175 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \\ 0.22352 & 0.56471 & 0.21177 \end{pmatrix}
$$

二重確率的

反射壁を持つランダムウォーク

・右に移動する確率は 0.5
・左に移動する確率は 0.5
・0 にいて左に移動する場合は留まる
・4 にいて右に移動する場合は留まる

	0	1	2	3	4
0	0.5	0.5	0	0	0
1	0.5	0	0.5	0	0
2	0	0.5	0	0.5	0
3	0	0	0.5	0	0.5
4	0	0	0	0.5	0.5

$$\sum_y p(i,j) = 1$$

行の和が 1
マルコフ性の定義の1つ

$$\sum_x p(i,j) = 1$$

列の和が 1

定常分布は $\pi(i) = 1/5 = 0.2$　全ての状態の定常分布の値は等しい

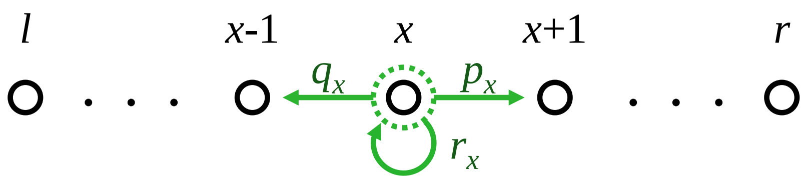
詳細つり合いの条件

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$$

x から y に１ステップで移る「量」

y から x に１ステップで移る「量」

出生死亡連鎖



- 状態推移は隣を飛び越えない
- l から r の間を動く
- 推移確率は左の通り

状態推移が隣の状態を飛び越えない ➡ 詳細つり合い条件成立

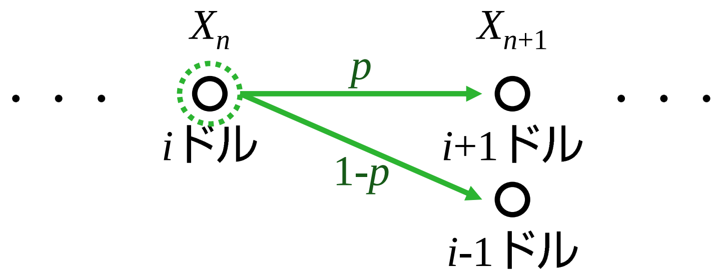
$$\pi(x+1)q_{x+1} = \pi(x)p_x$$ 詳細つり合い条件

$$\pi(x+1) = \frac{p_x}{q_{x+1}}\pi(x)$$

定常分布：　$$\pi(l+i) = \frac{p_{l+i-1}}{q_{l+i}}\frac{p_{l+i-2}}{q_{l+i-1}}\cdots\frac{p_{l+1}}{q_{l+2}}\frac{p_l}{q_{l+1}}\pi(l)$$

変化の確率・期待値

ギャンブラーの破産問題



- 確率 p で 1 ドル得る
- 確率 1-p で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- N ドルになるとやめる（終了）

ギャンブルに勝つ確率は？

$$V_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}$$

状態 y にはじめてなる時刻

$$h(x) = P_x(V_N < V_0)$$

初期所持金 x で破産せずに N ドルになる確率

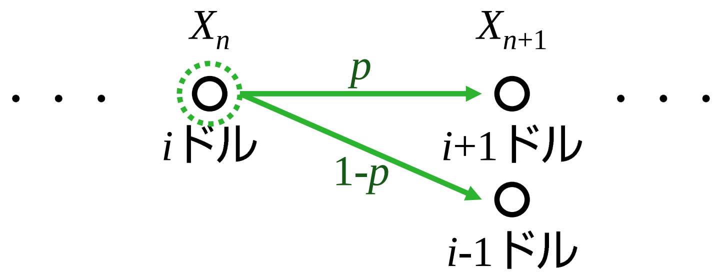
$$h(i) = ph(i+1) + (1-p)h(i-1)$$

$$h(i+1) - h(i) = \frac{1-p}{p}\big(h(i) - h(i-1)\big)$$

漸化式

変化の確率・期待値

ギャンブラーの破産問題



- 確率 p で 1 ドル得る
- 確率 1-p で 1 ドル失う
- 現在の所持金は X_n
- 0 ドルになると破産（終了）
- N ドルになるとやめる（終了）

ギャンブルに勝つ確率は？

p=1/2 のとき $$h(i+1)-h(i)=h(i)-h(i-1)=\underbrace{h(1)-h(0)}_{c\ \text{とおく}}$$ 漸化式

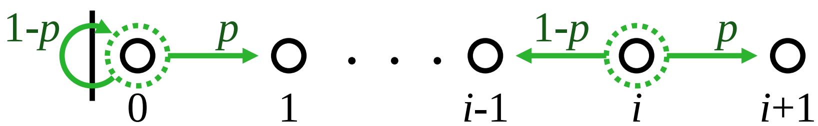
$$h(N)=h(0)+\sum_{i=1}^{N}\big(h(i)-h(i-1)\big)=0+Nc=\underbrace{1}_{h(N)=1}$$

$$h(x)=\frac{x}{N}\quad(0\le x\le N)$$

状態空間が無限になった場合

どんな問題が生じるのか？　定常分布は存在するのか？

反射壁を持つランダムウォーク



$$
\begin{aligned}
p(i,i+1) &= p & (i \geq 0)\\
p(i,i-1) &= 1-p & (i \geq 1)\\
p(0,0) &= 1-p &
\end{aligned}
$$

・右に移動する確率は p
・左に移動する確率は $1\text{-}p$
・0 にいて左に移動する場合は留まる

詳細つりあいの条件より定常分布を求める

この値で場合分け

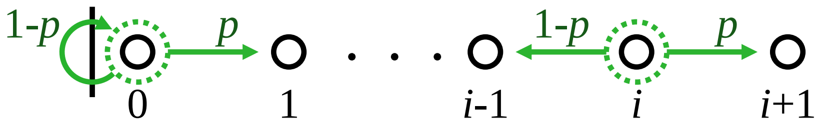
$$p\pi(i) = (i-p)\pi(i+1) \quad i \geq 0 \longrightarrow \pi(i) = \left(\boxed{\frac{p}{(1-p)}}\right)^i \pi(0)$$

(i) $p>1/2$ のとき $\pi(i)$ は指数的に増加　定常分布にならない

(ii) $p=1/2$ のとき　$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) = \infty$　定常分布にならない

(iii) $p<1/2$ のとき　$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) < \infty$　定常分布が存在

反射壁を持つランダムウォーク



・右に移動する確率は p
・左に移動する確率は $1\text{-}p$
・0 にいて左に移動する場合は留まる

$$
\begin{aligned}
p(i,i+1) &= p & (i \geq 0)\\
p(i,i-1) &= 1-p & (i \geq 1)\\
p(0,0) &= 1-p &
\end{aligned}
$$

(i) $p<1/2$ のとき：$P(X_n = j) \rightarrow \pi(j)$

左に向かう確率が大きく、状態 0 に向かいやすくなる

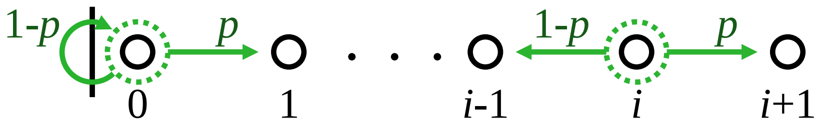
定常分布：

$$\pi(j) = \frac{1-2p}{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i$$

(iii) $p>1/2$ のとき：$X_n \rightarrow \infty$

全ての状態は**非再帰的**

反射壁を持つランダムウォーク



$$
\begin{aligned}
p(i,i+1) &= p \qquad (i \geq 0) \\
p(i,i-1) &= 1-p \quad (i \geq 1) \\
p(0,0) &= 1-p
\end{aligned}
$$

・右に移動する確率は p
・左に移動する確率は $1\text{-}p$
・0 にいて左に移動する場合は留まる

(ii) $p=1/2$ のとき：

$$V_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}$$ (状態 y にはじめてなる時刻)　において

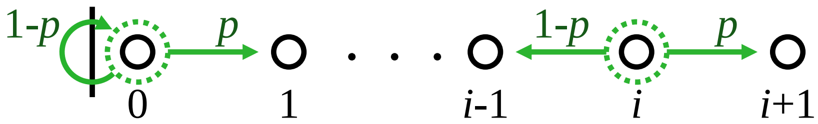
$$P_x(V_N - V_0) = \frac{x}{N}$$ より

現在 x にいて
0 になる前に N になる確率

$$P_x(V_N - V_0) \to 0$$
$$P_x(V_0 < \infty) = 1$$

どのxにいても、いつか状態0に戻る確率は1

反射壁を持つランダムウォーク



$$\begin{aligned} p(i,i+1) &= p & (i \geq 0) \\ p(i,i-1) &= 1-p & (i \geq 1) \\ p(0,0) &= 1-p & \end{aligned}$$

・右に移動する確率は p
・左に移動する確率は 1-p
・0 にいて左に移動する場合は留まる

(ii) p=1/2 のとき：

$$E_0 T_0 = (1/2)\cdot 1 + (1/2) E_1 V_0 = (1/2) + (1/2)\cdot(N-1) \to \infty$$

現在 x にいるときの 0 への停止時刻の期待値　次に 0 へ戻るとき　次に 1 へ行くとき　1 から 0 への到達時刻の期待値

状態 0 に確実に戻ってくるが、停止時刻は ∞ → 零(レイ)再帰的

３種類の再帰性

$p < 1/2$ のとき、状態 0 は　正再帰的
$p = 1/2$ のとき、状態 0 は　零再帰的
$p < 1/2$ のとき、状態 0 は　非再帰的

状態の分類の整理

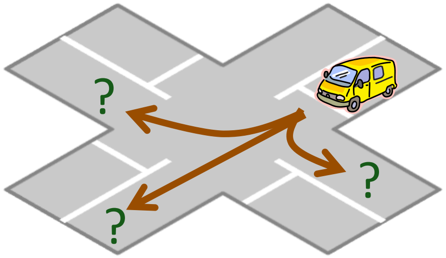
<table>
<tr>
<td rowspan="2">$P(T_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$
停止時刻が有限である
確率が 1</td>
<td rowspan="2">状態 i は
再帰的</td>
<td>$E_i T_i < \infty$
停止時刻の期待値が有限</td>
<td>状態 i は
正再帰的</td>
</tr>
<tr>
<td>$E_i T_i = \infty$
停止時刻の期待値が無限大</td>
<td>状態 i は
零再帰的</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(T_i < \infty \mid X_0 = i) < 1$
停止時刻が有限である
確率が 1 未満</td>
<td colspan="3">状態 i は
非再帰的</td>
</tr>
</table>

既約な連鎖では以下の３つは同値 定理7.2

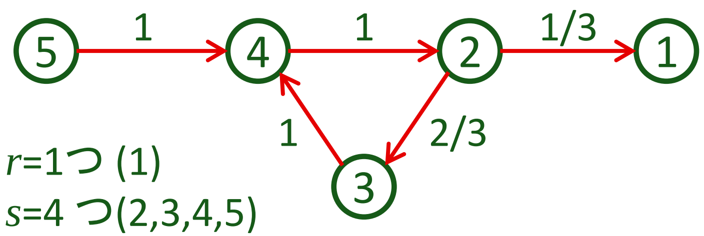
- ある状態が正再帰的である
- 全ての状態が正再帰的である
- 定常分布 π がただ１つ存在する

マルコフ連鎖で表す交通量配分

巨視的には、街路交通は各交差点で確率に従って
方向を変えて流れているように見える



交差点間の遷移で考える
このとき、吸収状態rと、非吸収状態sにわける



遷移確率は上の図の通り

おまけ

遷移確率と通過交通量

吸収的状態がr個、非吸収的状態がs個の場合、遷移確率行列を以下の形で配置する

吸収状態を表す(r×r行列)

$$P=\begin{pmatrix} \boxed{I} & 0 \\ R & \boxed{Q} \end{pmatrix}$$

非吸収状態を表す(s×s行列)

一般にQに対して以下の関係式が成立

$$I+Q+Q^2+\cdots=\boxed{(I-Q)^{-1}}$$

吸収マルコフ連鎖の基本行列

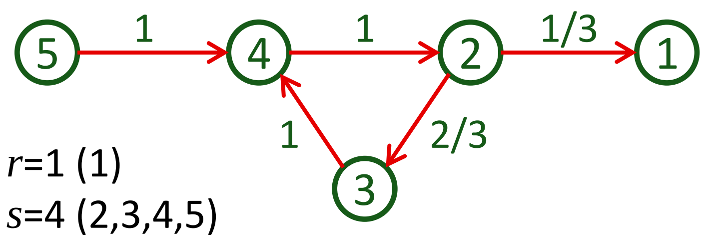
→q_{ij}はiを出た1台の車がjを通る回数の期待値を表す

各地点の発生交通量をu_iで表すと、各地点の通過交通量は、

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_s \end{pmatrix}(I-Q)^{-1}$$

で表される

交通量配分



r=1 (1)

s=4 (2,3,4,5)

$$\begin{array}{cc} & I \\ P= & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & \boxed{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q \end{array}$$

2から3への遷移確率(2/3)を表す

$$(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & \boxed{3} & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

地点3を通った車が地点4を通過する回数の期待値は3

地点5から毎時5台出発するとすると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{15} & 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

地点2の通過交通量