マルチンゲール

- マルチンゲールとは？
- 条件付き期待値
- マルチンゲールの性質
- 任意停止定理

確率過程ゼミ#4

M2　大山雄己

■ マルチンゲールとは？

- 「マルチンゲール」という言葉自体の明確な意味は謎につつまれている.
- 「n期までの確率変数の推移がわかっているとき，(n+1)期の条件付き期待値はn期の値と同じになる」という性質を表す.
- 公平な賭けを行なうギャンブラー問題としてよく扱われる.

■ マルチンゲールとは？

実数値の確率変数列

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ および $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

また，X は x の関数であるとする．

任意の $X_i \quad (1 \leq i \leq n)$ について，

$$E(X_{n+1} \mid x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = X_n \qquad (1.1)$$

が成り立つとき，X はマルチンゲール（martingale）であるという。

（$E(X \mid Y)$：YのもとでのXの条件付き期待値） → 条件付き期待値とは？

条件付き期待値

$E(X;A)$ ：確率変数 X を事象 A 上で積分する式

δ_A ： X が A 上にあるとき1，それ以外では0を取る指示関数

このとき，

$$E(X;A) = E(X\delta_A) \tag{2.1}$$

であり，A を与えたときの X の条件付き期待値は以下に定義される．

$$E(X \mid A) = E(X;A)/P(A) \tag{2.2}$$

これらは通常の積分と同じように以下の性質を持つ．

① $E(X+Y \mid A) = E(X \mid A) + E(Y \mid A)$

② $E(XY \mid A) = cE(X \mid A)$ 　ただし，Y は A 上で定数 c である．

■ 条件付き期待値の性質

$E(X;A)$ および $E(X\mid A)$ は次の2つの性質によって関係性づけられる.

■補題2-1.

B が排反な集合 $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ の和集合であるとき，次式が成り立つ.

$$E(X;B) = \sum_{j=1}^{k} E(X;A_j) \qquad (2.3)$$

■証明2-1.

仮定より，$X\delta_B = \sum_{j=1}^{k} X\delta_{A_j}$ が成り立つ．期待値をとると以下が成り立つ.

$$E(X;B) = E(X\delta_B) = E\left(\sum_{j=1}^{k} X\delta_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} E(X\delta_{A_j}) = \sum_{j=1}^{k} E(X;A_j) \qquad \square$$

条件付き期待値の性質

■補題2-2.

B が排反な集合$(A_1, A_2, \ldots, A_k)$の和集合であるとき，次式が成り立つ.

$$E(X \mid B) = \sum_{j=1}^{k} E(X \mid A_j) \cdot \frac{P(A_j)}{P(B)} \tag{2.3}$$

■証明2-2.

$$E(X \mid B) = E(X;B)/P(B) = \sum_{j=1}^{k} E(X;A_j)/P(B)$$

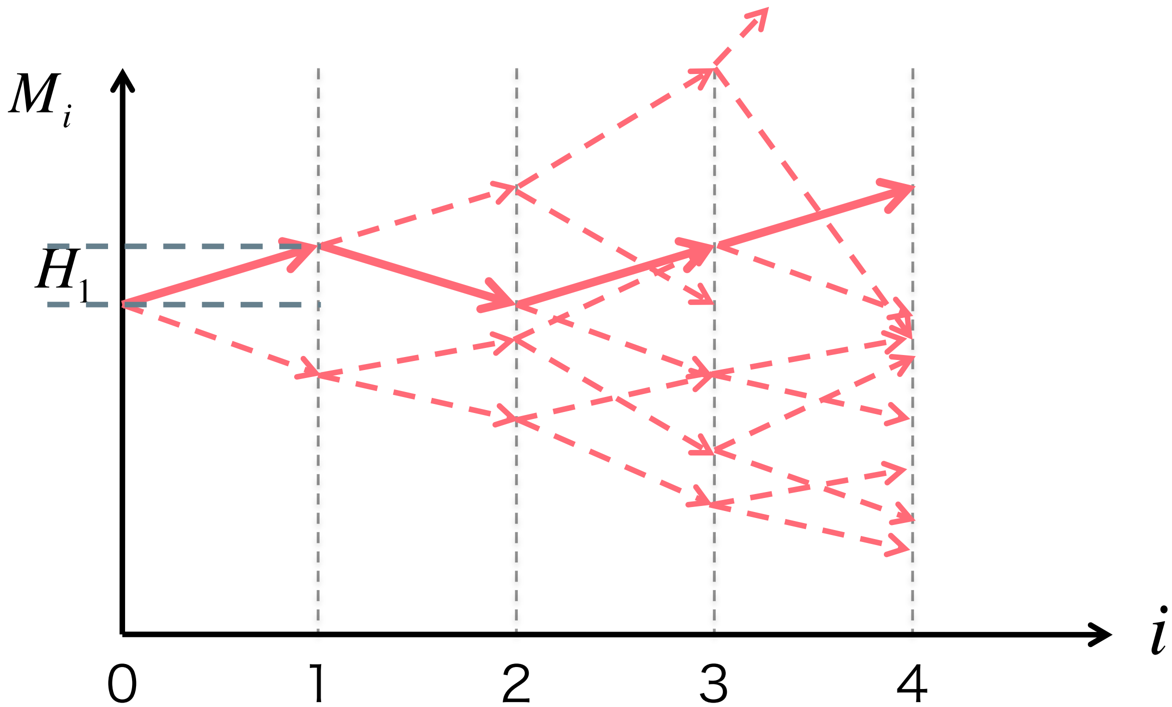
補題2-1.

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{E(X;A_j)}{P(A_j)} \cdot \frac{P(A_j)}{P(B)} = \sum_{j=1}^{k} E(X \mid A_j) \cdot \frac{P(A_j)}{P(B)} \qquad \square$$

条件付き期待値の定義

マルチンゲールの例

■公平な賭けを行なうギャンブラー問題



$$M_i = M_{i-1} + H_i Z_i$$

$$(1 \le i \le n)$$

M_i ：i 期の所持金

H_i ：i 期目の賭け金

Z_i ：1 or -1

（公平なので確率は等価）

X_i ：所持金の推移

n 期目の試行に対する期待利得は,

$$E(M_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0) = M_{n-1} + \frac{1}{2}(H_n \cdot 1 + H_n \cdot (-1)) = M_{n-1}$$

マルチンゲールである.

■マルチンゲールの性質

■公平な賭けを行なうギャンブラー問題

$$E(M_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0) = M_{n-1}$$ マルチンゲール

$$E(M_n - M_{n-1} \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0) = 0$$

つまり，公平な賭けを行なっている限りギャンブラーは財をなすことができないことを示す．

カジノなどでは，実際には公平なゲームは行われない．
1回の期待利得が0以下のとき，

$$E(M_n - M_{n-1} \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0) \leq 0$$ 優マルチンゲール

ゲームをやればやるほど期待利得が減少することを意味している．

1回の期待利得が0以上のとき，

$$E(M_n - M_{n-1} \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_0) \geq 0$$ 劣マルチンゲール

任意停止定理

■マルチンゲール理論における結果

公平なゲームが行われているうちは財をなすことができない.

すなわち, **不利なゲームには勝つことができない.**

しかし…

■倍々戦略

各試行で勝てば賭け金が2倍に, 負ければ賭け金が回収されるゲームをする. このとき, 勝った後は1ドル, 負けた後はその2倍を賭け金とする.

k回連続で負けたときの損失は,

$$-(1+2+2^2+\ldots+2^k) = -(2^{k+1}-1)$$

試行	1	2	3	4
所持金	-1	-3	-7	+1

(k+1)回目の試行で勝てば最終利得は,

$$\boxed{-(2^{k+1}-1)+2^{k+1}=1>0}$$

不利でも勝つ確率が正である限り, 成功するのでは?

実際にはそんなに上手くはいかない.

■倍々戦略の不具合

■準備

H_n ： n 回目の賭け金（ n 回目のゲームの結果に依存しない．）

$X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ： 結果の履歴

Z_n ： n 回目の試行で勝てば1，負ければ−1

W_n ： n 回の試行後の最終利益

H_n は $(n-1)$ 回目までの結果の履歴に依存することを考慮して，

定義： $F(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ を $g(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ と記述できる確率変数の集合体であるとする．

仮定： $H_n \in F(X_0, X_1, \ldots, X_n)$（ H_n は $X_0, \ldots, X_n$ の関数である．）

このとき，最終利益は

$$W_n = W_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i Z_i \tag{4.1}$$

倍々戦略の不具合

最終利益　$$W_n = W_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i Z_i \qquad (4.1)$$

$H_n = 1$ （賭け金が常に1）のときの n 期での所持金 Y_n は,

$$Y_n = \cancel{Y_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1}} + Z_n \qquad (4.2)$$

$$\left(Y_{n-1} = \cancel{Y_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1}} \right)$$

上式を用いると最終利益は次のように書きなおすことができる.

$$W_n = W_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (Y_i - Y_{i-1}) \qquad (4.3)$$

事象 $A = \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\}$ のもとで, H_n は一定値であるから,
Y_n が X_n に関して優マルチンゲール, $0 \le H_n \le c_n$ であるとき,

$$E(W_{n+1} - W_n \mid A) = E(H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n) \mid A) = H_{n+1} E((Y_{n+1} - Y_n) \mid A) \le 0$$

W_n は優マルチンゲール.　　倍々戦略でも勝つことができない…！

■停止時刻

賭けをやめる時刻を，停止時刻 T とする.

T はそれまでの結果の履歴 $X_0,\ldots,X_n$ に依存するものとする.

■停止時刻 T まで単位1の金額を賭けるゲーム

最終利益 W_n は，$T \wedge n = \min\{T,n\}$ として，

試行	1	2	3	4	5
所持金	-1	-2	-1	0	1

$$W_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1}) = Y_{T\wedge n} \qquad (4.4)$$

H_i は，$i \le T$ のとき1，$i > T$ のとき0となるので，

$$\begin{cases} Y_{T\wedge n} = W_n = Y_0 + Y_n - Y_0 = Y_n & (n \le T) \\ Y_{T\wedge n} = W_n = Y_0 + Y_T - Y_0 = Y_T & (T < n) \end{cases}$$

Y_n が優マルチンゲールのとき，停止過程 $Y_{T\wedge n}$ も優マルチンゲール.

$$E(Y_{T\wedge n} \mid \mathbf{X}) \le E(Y_{T\wedge n-1} \mid \mathbf{X}) \le \ldots \le E(Y_{T\wedge 0} \mid \mathbf{X}) = Y_0 \qquad (4.5)$$

任意停止定理

Y_n を X_n に関するマルチンゲール，T を X_n に関する停止時刻とする.

・ T は $P(T<\infty)=1$ を満たす.

・任意の n について，$|Y_{T\wedge n}|\le K$ を満たす K が存在する.

このとき，以下の式が成り立つ.

$$EY_T = EY_0 \tag{4.6}$$

■証明

Y_n が X_n に関してマルチンゲールのとき，$E(Y_{T\wedge n})=E(Y_0)$
$|Y_{T\wedge n}|\le K$ を用いて，$n\to\infty$ とすると，

$$|EY_0-EY_T| = |EY_{T\wedge n}-EY_T| \le 2KP(T>n) \to 0 \quad \square$$

$$|EY_{T\wedge n}-EY_T| = E(|Y_{T\wedge n}-Y_T|) = P(T>n)\cdot|Y_n-Y_T| \le P(T>n)\cdot|2Y_{T\wedge n}|$$

任意停止定理の応用

■ギャンブラーの破産問題

・公平な場合（確率0.5で所持金が+1，0.5で-1）

所持金 Y_n が a 以下（破産）もしくは b 以上になったら終了する.

停止時刻 $T = \min\{n : Y_n \notin (a,b)\}$

破産する（ b より a が先にくる）確率を求める.

$V_y = \min\{n : Y_n = y\}$ ， $Y_0 = x$ とすれば，任意停止定理より，

$$x = EY_0 = EY_T = aP(Y_T = a) + bP(Y_T = b)$$
$$= a + (b-a)P(Y_T = b)$$

$$P(V_b < V_a) = \frac{x-a}{b-a} \tag{4.7}$$

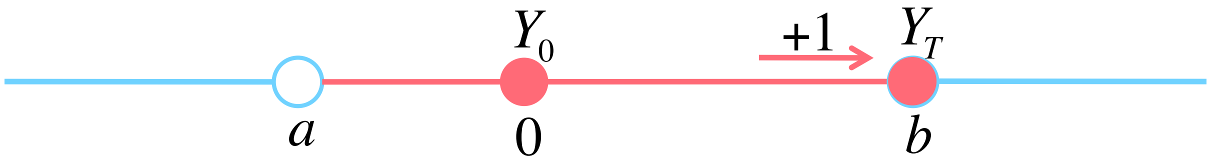
任意停止定理の応用

■ギャンブラーの破産問題

・公平な場合（確率0.5で所持金が+1，0.5で-1）

$$P(V_b < V_a) = \frac{x-a}{b-a}$$
$$P(V_a < V_b) = \frac{b-x}{b-a} \qquad (4.7)$$

最初の所持金0の時，所持金が a か b になるまでの期間の平均を求める．



$ET = ?$

1回のゲームで得られる利得の分散は， $\sigma^2 = E\xi_n^2 = 1$

$M_n = Y_n^2 - n\sigma^2 = Y_n^2 - n$ に対して任意停止定理を用いると，

$$EM_0 = EM_T \qquad 0 = EY_T^2 - ET$$

$$ET = EY_T^2 = a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} = \frac{-ab(b-a)}{b-a}$$

$$\boxed{ET = -ab} \qquad (4.8)$$

任意停止定理の応用

■ギャンブラーの破産問題

・1回の利得平均が $\mu = E\xi_n$ なとき

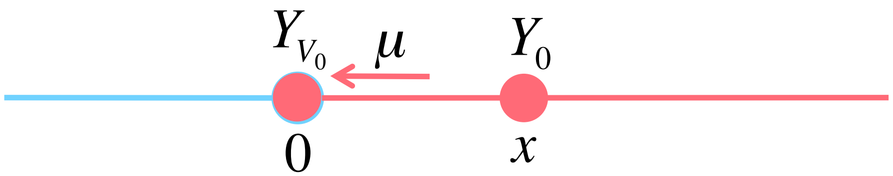
$M_n = Y_n - n\mu$ がマルチンゲールであることに注意すると,

($EM_n = EY_n - E(n\mu) = EY_0 = EM_0$)

任意停止定理 $EM_T = EM_0$ より,

$$E(Y_T - Y_0) = \mu ET \quad \text{ワルドの方程式} \qquad (4.9)$$

式（4.9）を用いれば破産時間の期待値が求められる.



$EV_0 = ?$

任意停止定理の応用

■ギャンブラーの破産問題

$$E(Y_T - Y_0) = \mu ET \quad (4.8)$$

・1回の利得平均が　$\mu = E\xi_n$　なとき

確率　p　で+1，$1-p$　で−1の利得を得るとすると，

$$\mu = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$$

$p < 1/2$，最初の所持金　$x > 0$　のとき，

所持金０で終了（破産）だとすると，破産時間の期待値は（4.8）より，

$$EV_0 = \frac{0-x}{\mu} = \frac{-x}{2p-1} = \frac{x}{1-2p} \quad (4.10)$$

まとめ

- 確率過程の重要な性質の1つである「マルチンゲール」の概念を紹介した.
- 優マルチンゲールが成り立つとき，それを実行しつづけることで期待利得はどんどん下がっていく.
- 任意停止定理を用いることで，破産（ある状態量が一定の値を下回る）確率やその時間の期待値を求められる.