第5章　再生理論 Renewal theory

R. デュレット, 確率過程の基礎, Springer (訳: 今野紀雄ら)

2013/05/26(日)
確率過程ゼミ
浦田　淳司

BehaviorInNetworks
都市生活行動学研究室

内容

5-1 基本事項の定義（再生過程の定義）

5-2 大数の法則

5-3 待ち行列への応用

5-4 年齢と余命

再生過程とは

ポアソン過程：到着時間間隔が独立で指数分布に従う

拡張

再生過程：ポアソン過程の一般化
・事象が起こる時間間隔{ti}は独立（ポアソン過程と同じ）
・時間間隔は指数分布以外も可能（ポアソン過程の拡張）

例. 交通流モデル
特定地点を通過する際の車の時間間隔は再生過程でモデル化
―時間間隔をtiとして，{ti}が独立分布なら再生過程となる．

再生過程の定義

i-1台目の車両が通過した後に, i 台目が通過するまでの時間tiは

$$P(t_i \le t) = F(t) \qquad F(0) = P(t_i \le 0) = 0$$

という一般の分布Fに従うと仮定する.

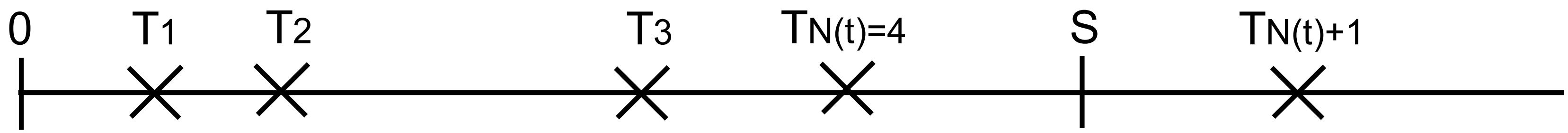
時刻tまでの通過車両の台数N(t) $N(t) = \max\{n : T_n \le t\}$

T_n: n回目の再生(更新)/N(t):時刻tまでの再生回数

$$\{N(t) \ge n\} = \{T_n \le t\} \qquad (1.1)$$

時刻tの再生回数がn回以上　　n回目の再生が時刻tより前に実施

時刻T_nで「新たな始まりを迎える」⇒再生過程



再生回数の期待値

時刻Xまでの再生回数の期待値

$$EX = \int_0^\infty Ei_X(t)dt = \int_0^\infty P(X > t)dt$$ X以下のtの積分

（ $i_X(t)$は0<t<Xでは1, それ以外では0になる関数

$$\int_0^\infty i_X(t)dt = \int_0^X 1dt = X$$ ）

Xが非負整数値をとる確率変数のとき

$$EX = \sum_{n=1}^\infty P(X \ge n)$$

(1.1)式 $\{N(t) \ge n\} = \{T_n \le t\}$ とあわせて

再生回数Nの期待値

$$EN(t) = \sum_{n=1}^\infty P(N(t) \ge n) = \sum_{n=1}^\infty P(T_n \le t) \quad (1.3)$$

停止時刻

{xi}はμ =Exiを満たす独立同分布

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$ 1回目，2回目，，の確率変数の和

「時刻Nで停止する」という現象が起こる（起こらない）ことが，{Si}だけで決定できるとき，この時刻Nを停止時刻と呼ぶ

ワルドの方程式

確率変数{xi}の和の期待値は，{xi}の期待値を停止時刻の期待値倍したものと一致する

$$ES_N = \mu EN \tag{1.5}$$

Nが停止時刻，$EN<\infty$，μ ＝Exi

証明

$$S_N = \sum_{m=1}^{\infty} x_m i_N(m)$$

$i_N(m)$は, N≧0で1, それ以外では0

$$ES_N = \sum_{m=1}^{\infty} Ex_m \cdot Ei_N(m) = \mu \sum_{m=1}^{\infty} P(N \geq m) = \mu EN$$

(1.3)式より $EN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \leq t)$ □

停止時刻

「時刻Nで停止する」という現象が起こる（起こらない）ことが，{Si}だけで決定できるとき，この時刻Nを停止時刻と呼ぶ

定義と再生回数N(t)を用いた停止時刻の定式化

$$N = \min\{n : T_n > t\} = N(t) + 1$$

停止時刻Nは，時刻tまでの再生回数+1とする

(1.5)式 $ES_N = \mu EN$ より

$$ET_{N(t)+1} = \mu E(N(t)+1)$$

(1.1)式 $\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ より，$T_{N(t)+1} > t$ であり

$$\frac{t}{\mu} \leq EN(t) + 1 \qquad (1.7)$$

再生回数+1は，時刻tを確率分布{xi}の期待値で割ったものより大きい

同様に $\frac{t+M}{\mu} \geq EN(t)+1$ は求められ，EN(t)の上限と下限は算出可能

大数の強法則

EN(t)の正確な式は煩雑であり，時間t→∞の再生回数N(t)の漸近挙動を検討

μ ＝Etiを到着時刻間隔の平均とすると次が成り立つ

$$N(t)/t \to 1/\mu \qquad (2.1)$$

単位時間あたりの再生回数は期間xiの期待値の逆数

証明

(1.5)式 $ES_N = \mu EN$ で，またSn=Tnで置き換え，

$$T_n/n = \mu \quad (n \to \infty)$$

定義より $T_{N(t)} \le t < T_{N(t)+1}$ であり，

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} \le \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

左辺，右辺はμに収束

□

再生報酬過程（再生過程の拡張）

i番目の再生が起こる時刻でriの報酬を受ける

報酬の合計

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} r_i$$

(2.1)式 $N(t)/t \to 1/\mu$ より

$$\frac{R(t)}{t} = \underbrace{\left(\frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} r_i \right)}_{\text{報酬の期待値}} \underbrace{\frac{N(t)}{t}}_{\text{時間の期待値の逆数}} \to Er_i \cdot \frac{1}{Et_i}$$

報酬の期待値　時間の期待値の逆数

単位時間あたりの報酬

再生報酬過程(例)

例:車の維持費の1年間の平均費用を求める

故障又は買い替え時期が来たら,買い替える(故障した場合は修理も実施)

車が故障するまでの寿命:寿命関数h

新車買替え年数:T

新車購入費用:A

故障修理費用:B(T年経過前に生じた故障の修理費用)

i番目の再生期間 $$Et_i = \underbrace{\int_0^T th(t)dt}_{\text{故障による買い替え}} + \underbrace{T\int_T^\infty h(t)dt}_{\text{買い替え時期での買い替え}}$$

i番目の再生時コスト $$Er_i = \underbrace{A}_{\text{新車費用}} + \underbrace{B\int_0^T h(t)dt}_{\text{故障した場合は修理代}}$$

スーパー買い物過程(食料品+日用品)とか?

交代再生過程

状態f:
{si}: 分布Fに従う平均μ_Fの独立な確率変数
状態g:
{ui}: 分布Gに従う平均μ_Gの独立な確率変数

状態fでsiの時間，状態gでuiの時間過ごすサイクルを繰り返す

▼

状態1にいる極限の割合 $$\frac{\mu_F}{\mu_F + \mu_G}$$

←ri
←ti
再生報酬過程と同じ

GI/G/1待ち行列

再生過程の考え方を一般的なサービス時間の待ち行列に適用する

GI: 一般的な到着過程

- 連続的に到着する時間の間隔は独立
- 平均1/λの分布Fに従う
- 時刻tまでの到着回数N(t)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{Et_i}=\lambda$$

G: 一般的なサービス時間

- i番目の客はsiの時間だけサービスを受ける
- siは独立で平均1/μの分布Gに従う

1: 窓口の数

GI/G/1待ち行列

定理: $\lambda < \mu$とすると，窓口の労働割合の極限はλ / μである

証明

Tn: n番目までの客が来る時刻
Tnまでの窓口での労働の総時間An
n人におこなったサービス総時間Sn

$$A_n = S_n - Z_n$$

時刻Tn以後，システム内に誰もいなくなるまでの時間
λ / μでは，待ち行列はなくなるので，EZnは有界

$$Z_n / n \to 0$$

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{S_n / n}{T_n / n} \to \frac{Es_i}{Et_i} = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{A_n}{T_n} = \frac{S_n - Z_n}{T_n} \to \frac{\lambda}{\mu}$$

□

コスト方程式

平均の客数L

時刻s，客の総数Xs(窓口＋待ち行列)

$$L = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_s ds$$

平均滞在時間W

m番目に到着した客がシステム内で過ごす滞在時間Wm

$$W = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} W_m$$

十分に時間が経過したときに列に加わる割合λa

Na(t)は時刻t以前に到着して列に加わった客の数

$$\lambda_a = \lim_{t \to \infty} \frac{N_a(t)}{t}$$

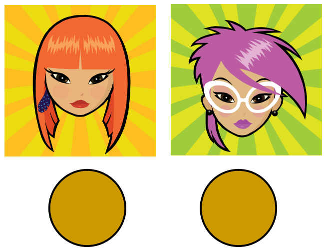
リトルの公式 $L = \lambda_a W$

時間あたりの客数＝客の到着割合×客がいる時間
（収入）　　（入り客）　　（客の支払い）

BehaviorInNetworks
都市生活行動学研究室

床屋連鎖

客はパラメータ2の
ポアソン過程で到着



1時間あたり3人髪を切る
（パラメータ3で髪を切る
平均20分）

椅子は2つ，
空いていない場合は帰る

詳細つりあい条件式：　$2\pi(0)=3\pi(1)\quad 2\pi(1)=3\pi(2)\quad 2\pi(2)=3\pi(3)$

$\pi(0)=c$ とおくと、 $\pi(0)=c\quad \pi(1)=\frac{2}{3}c\quad \pi(2)=\frac{2}{3}\pi(1)=\frac{4}{9}c\quad \pi(3)=\frac{2}{3}\pi(2)=\frac{8}{27}c$

$$\pi(0)+\pi(1)+\pi(2)+\pi(3)=0$$

解くと、

57/65の時間は客が入ってくる　　イス両方埋まっている割合

定常分布 $\boxed{\pi(0)=\frac{27}{65}\quad \pi(1)=\frac{18}{65}\quad \pi(2)=\frac{12}{65}}\ \boxed{\pi(3)=\frac{8}{65}}$

床屋連鎖

平均の客数 $L = 0 \cdot \frac{27}{65} + 1 \cdot \frac{18}{65} + 2 \cdot \frac{12}{65} + 3 \cdot \frac{8}{65} = \frac{66}{65}$ 平均利用人数？

列に加わる割合 $\lambda_a = 2(1 - \pi(3)) = 114/65$ 利用する客の到着数

平均滞在時間 $W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{66/65}{114/65} = 0.579(h)(= 34.74\,\min)$ 車利用時間

平均待ち時間 $W_Q = W - Es_i = 0.579 - \underbrace{0.333}_{\text{サービス時間}} = 0.246(h)(= 14.76\,\min)$

M/G/1 待ち行列での仕事量

時刻tでの仕事量Vtを，システムにいる客（サービス中，待ち中）全てに対する残りのサービス時間の総和として考える

リトルの公式　$V = \lambda Y$

$$Y = \underbrace{E(s_i q_i)}_{\text{待ち行列の客のサービス時間}} + \underbrace{E\left(\int_0^{s_i} s_i - x dx\right)}_{\text{サービス中（時間x）への残りのサービス時間}}$$

V: 平均仕事量V
λ: 列に加わる割合
Y: サービス時間
si: i番目の客のサービス時間
qi: i番目の客の待ち時間

サービス時間と待ち時間は独立なので

$$Y = (Es_i)W_Q + E\left(s_i^2 / 2\right)$$

到着をポアソン過程とすると，

$$W_Q = V = \lambda Y = \lambda(Es_i)W_Q + \lambda E\left(s_i^2 / 2\right)$$

ポラチェック・ヒンチンの公式

$$W_Q = \frac{\lambda E(s_i^2)}{2(1 - \lambda E s_i)}$$

リトルの公式とあわせて，
平均の客数，滞在時間も導出可能

年齢と余命の定義

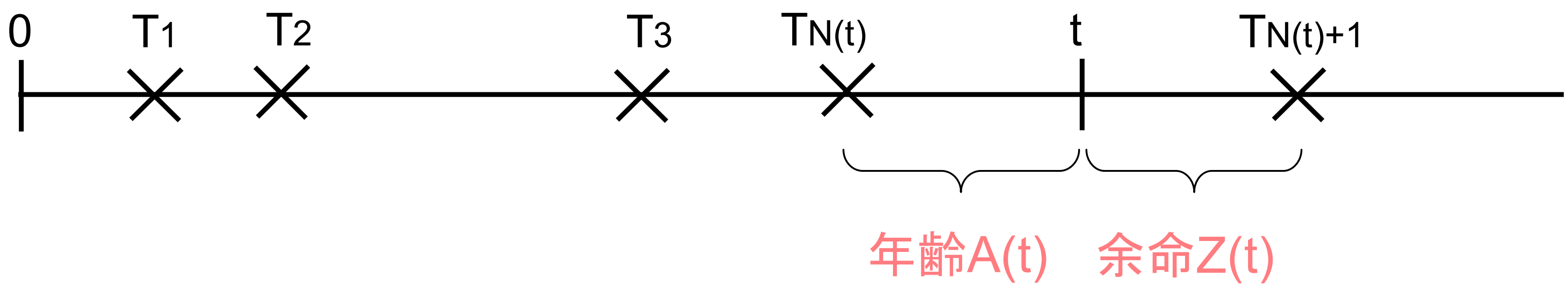
{ti}は独立同分布な確率変数

n回目の再生の起こる時間$T_n=t_1+\cdots+t_n$

時刻tまでの再生回数 $N(t)=\max\{n:T_n\le t\}$

年齢 $A(t)=t-T_{N(t)}$

余命 $Z(t)=T_{N(t)+1}-t$



余命，年齢の平均

余命の平均

i回目の平均 $$\int_{T_i-1}^{T_i} Z(s)ds = \int_0^{t_i} rdr = t_i^2 \big/ 2$$

$$\int_0^t Z(s)ds \approx \sum_{i=1}^{N(t)} t_i^2 \big/ 2$$ 全時間帯の和

再生報酬過程と同様に
余命の平均 $$\frac{1}{t}\int_0^t Z(s)ds \to \frac{Et_i^2 \big/ 2}{Et_i}$$

年齢の平均

年齢の平均も同様に $$\frac{1}{t}\int_0^t A(s)ds \to \frac{Et_i^2 \big/ 2}{Et_i}$$

検査のパラドクス

時刻tで使用している商品の寿命をL(t)=A(t)+Z(t)と表す

$$\frac{1}{t}\int_0^t L(s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \{A(s)+Z(s)\}ds \to \frac{Et_i^2}{Et_i}$$

i) $$\mathrm{var}(t_i) = Et_i^2 - \left(Et_i\right)^2 > 0 \Leftrightarrow Et_i^2 > \left(Et_i\right)^2 \Leftrightarrow \frac{Et_i^2}{Et_i} > Et_i$$

ii) 最初のn個の商品の平均寿命 $$\frac{t_1 + \cdots + t_n}{n} \to Et_i$$

再生過程　終