Urban Transportation Network

Yosef Sheffi

1985

Chap.1＆Chap.2(pp.1~pp.55)

2014 /5/1

スタートアップゼミ#1

B4　森部伸一

「Urban Transportion Network」について

渋滞と移動に関する意思決定の相互作用のモデル化

都市交通ネットワークにおける移動パターンを求め方

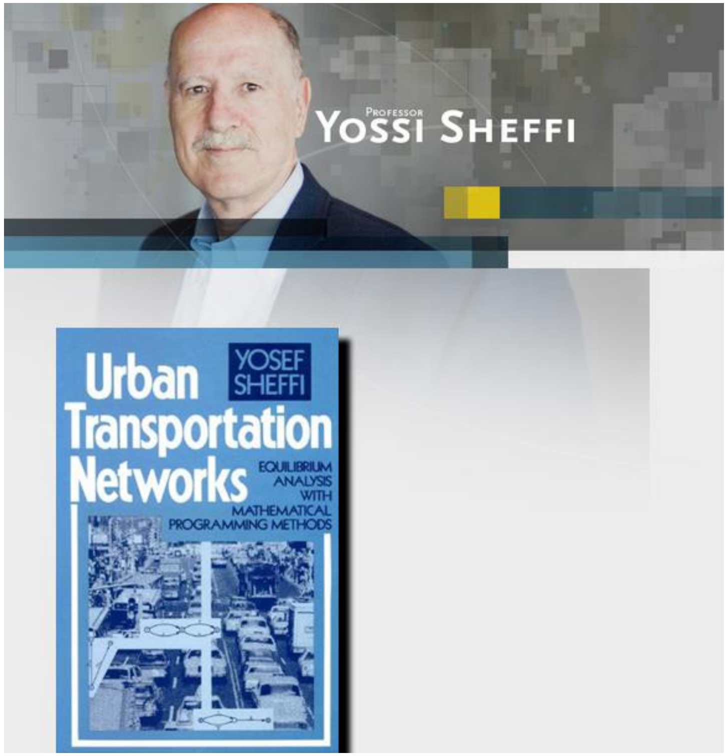


図１ーSheffi

Contents

- Chap.1 Urban Transport Network Analysis

  ・均衡分析 （Equilibrium Analysis）

  ・ネットワーク表現

  →都市交通ネットワークにおける均衡

- Chap.2 Basic Concepts in Minimization Problems

  ・1変数における最小化問題

  ・多変数における最小化問題

Chap.1
Urban Transport Network Analysis

・均衡分析　（Equilibrium Analysis）
・ネットワーク表現
　　→都市交通ネットワークにおける均衡

都市交通に対するsystem approach

もともとは、一つの要素に関して別々に分析していた
(ex.信号機・交差点のデザイン・駐車規制）

規模の大きい計画になると波及効果などの様々な要素を考慮に入れないといけない

(ex.幹線道路の拡張)

計画による影響を広い範囲で考慮するために全体を俯瞰するようなアプローチが(ex.最適化)が必要になった

均衡(equilibrium)について　１

市場における例

(supply functionとdemand function)

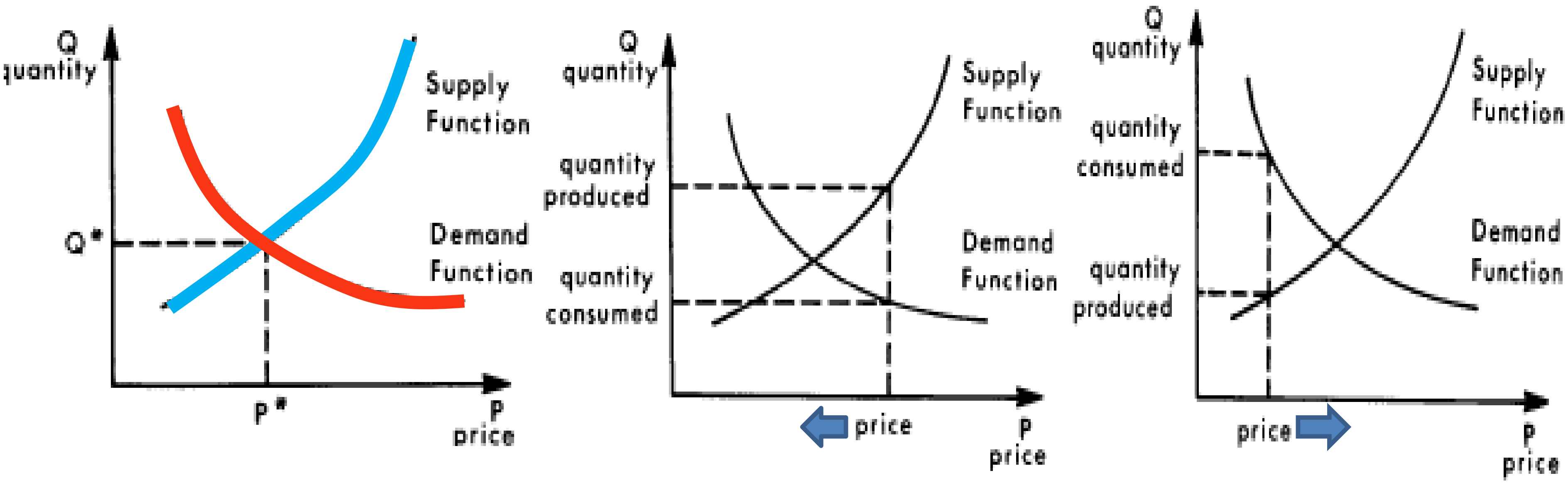


図２－需要関数と供給関数

均衡(equilibrium)について　２

ガソリンスタンドにおける例

(performance functionとdemand function)

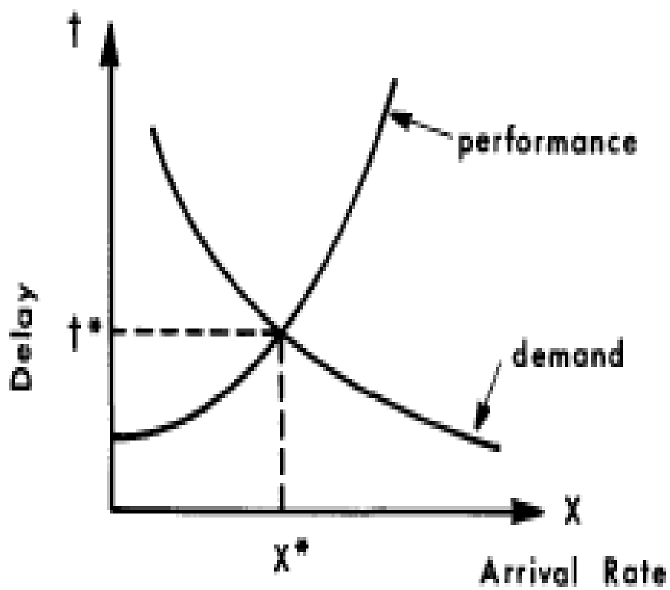
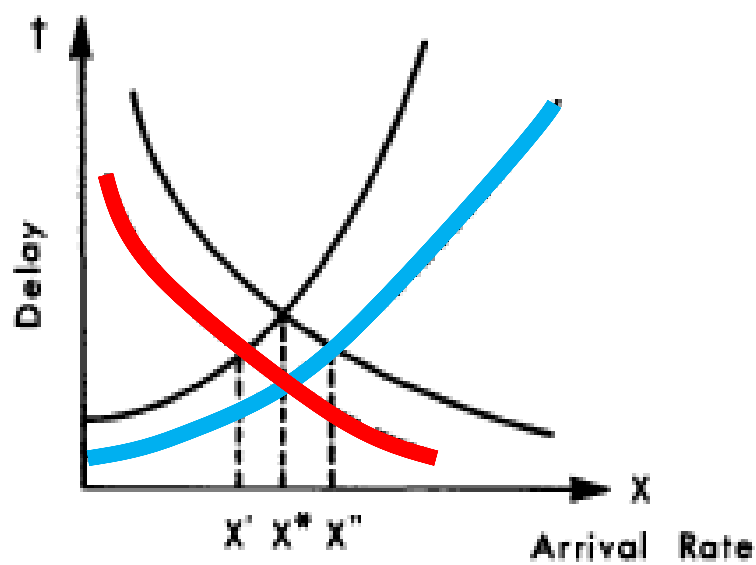


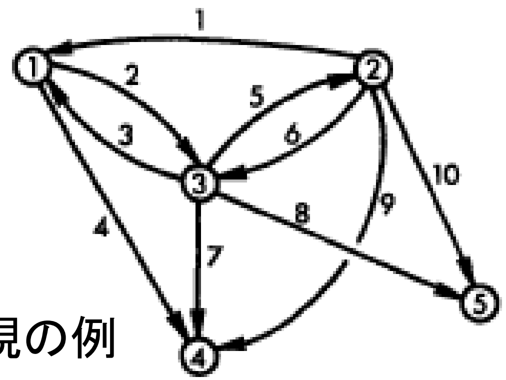
図３－performance/demand function



水色：ガソリンの配給機材を増やしたとき
赤色：値段を上げたとき

ネットワーク表現　１

NodeとLinkとPath



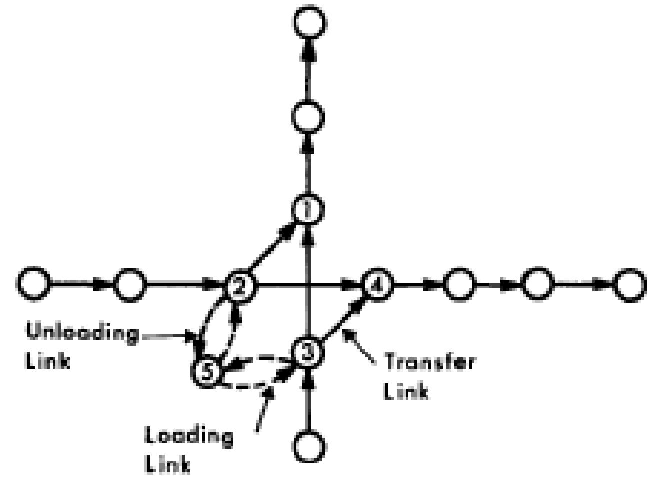


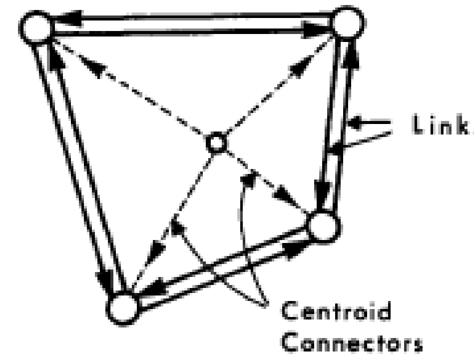
図４－ネットワーク表現の例

“Impedance”(インピーダンス)

Linkごとの抵抗(時間・お金)のことを指す

Pathとしてのインピーダンスは Linkのインピーダンスの和→これがPathを選択する基準になる

ネットワーク表現　２



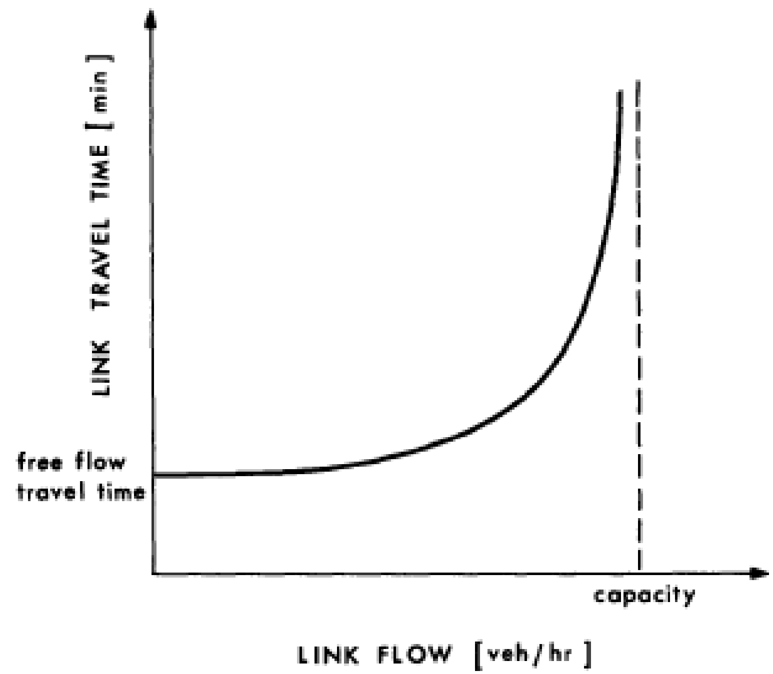
CentroidとConnectorとは

Centroid：
出発地や目的地になるNodeのこと

(Centroid) Connector
Centroidと外部のノードを結ぶ

交通ネットワークにおける均衡　1

Link Performance Function

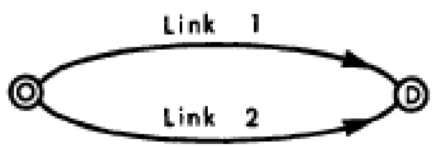


インピーダンスには時間を使用

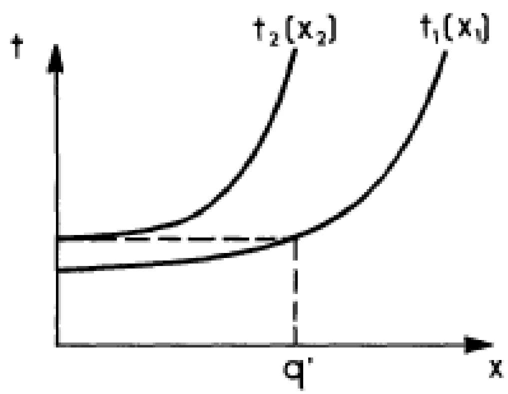
移動時間がどのPathでも等しくなったときに、均衡状態

交通ネットワークにおける均衡　２

計算例

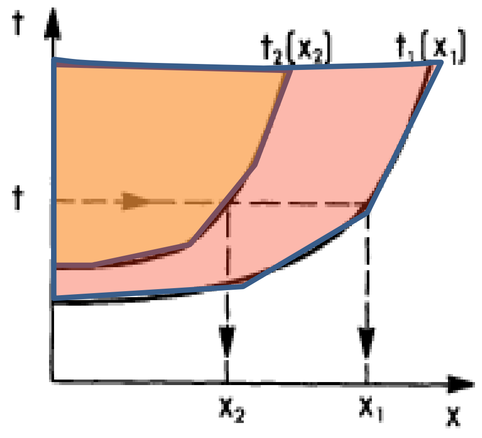


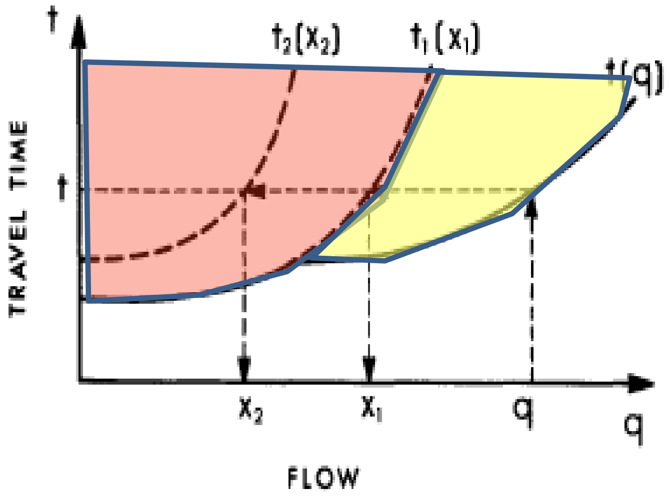
q'≧q　のとき
全員Link1を使う



q'＜q　のとき
どうなるのか？

交通ネットワークにおける均衡　３





Chap1. まとめ

Performance関数とdemand関数による均衡

ネットワークはLinkとNodeによって形成される

Linkはimpedanceをもつ

交通ネットワークでは、Performance関数を使うことで均衡状態が求められる

Chap.2
Basic Concepts in Minimization Problem

・1変数における最小化問題
　制約条件なし/制約条件あり
・多変数における最小化問題
　制約条件なし/制約条件あり

はじめに

$$\min z(x_1, \ldots, x_I)$$

subject to

$$g_1(x_1, \ldots, x_I) \geq b_1$$
$$g_2(x_2, \ldots, x_I) \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$g_J(x_1, \ldots, x_I) \geq b_J$$

$$\min z(\mathbf{x})$$

subject to

$$g_j(\mathbf{x}) \geq b_j; \qquad j = 1, \ldots, J$$

以下の章では
・制約条件を満たすxは少なくとも一つは存在
・**x**が有限の場合、最小値も有限
- 目的関数や制約条件は連続微分可能

１変数における最小化問題　１
制約条件なし

＜1変数最小値問題の解法 min z(x)＞

$\frac{dz(\boldsymbol{x}^*)}{dx}$=0 となる点(停留点：stationary point)を求める

↓

下に凸な関数か調べる

↓

極小値(local minimum)のうち、
どれが最小値なのかを求める

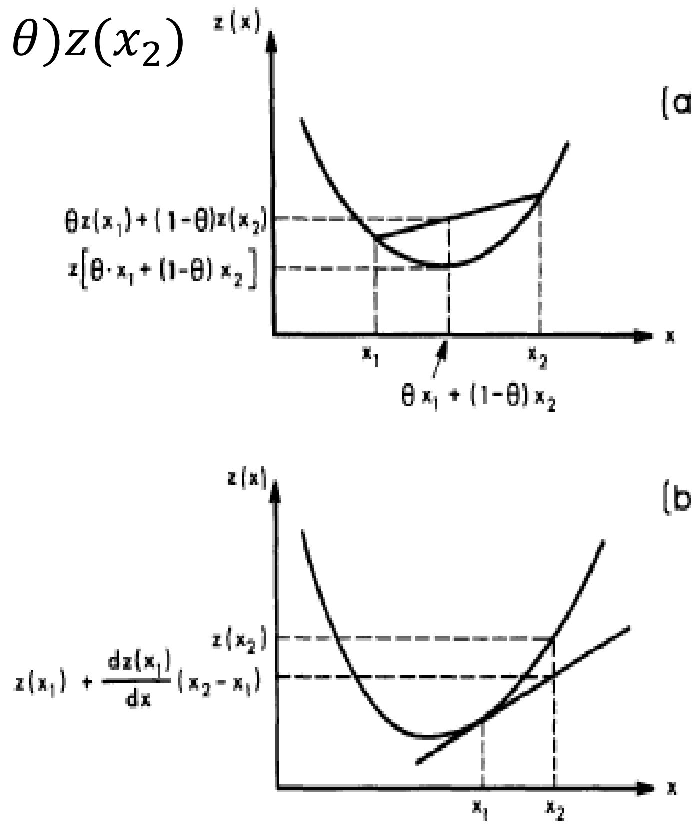
１変数における最小化問題　２
制約条件なし

下に狭義の凸(strictly convex)
である条件

a. $\mathrm{z}[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] < \theta z(x_1) + (1-\theta)z(x_2)$

b. $\mathrm{z}(x_1) + \frac{dz(x_1)}{dx}(x_2 - x_1) < z(x_2)$

c. $\frac{d^2 z(x^*)}{dx^2} > 0$



１変数における最小化問題　３
制約条件なし

最小値の決定について

極小値が複数ある場合は比較して最小値を求めるが、極小値が一つならそれが最小値になる

では、極小値が一つであること示す条件とは？

→すべてのxにおいて、（広義の意味で）下に凸の関数であること

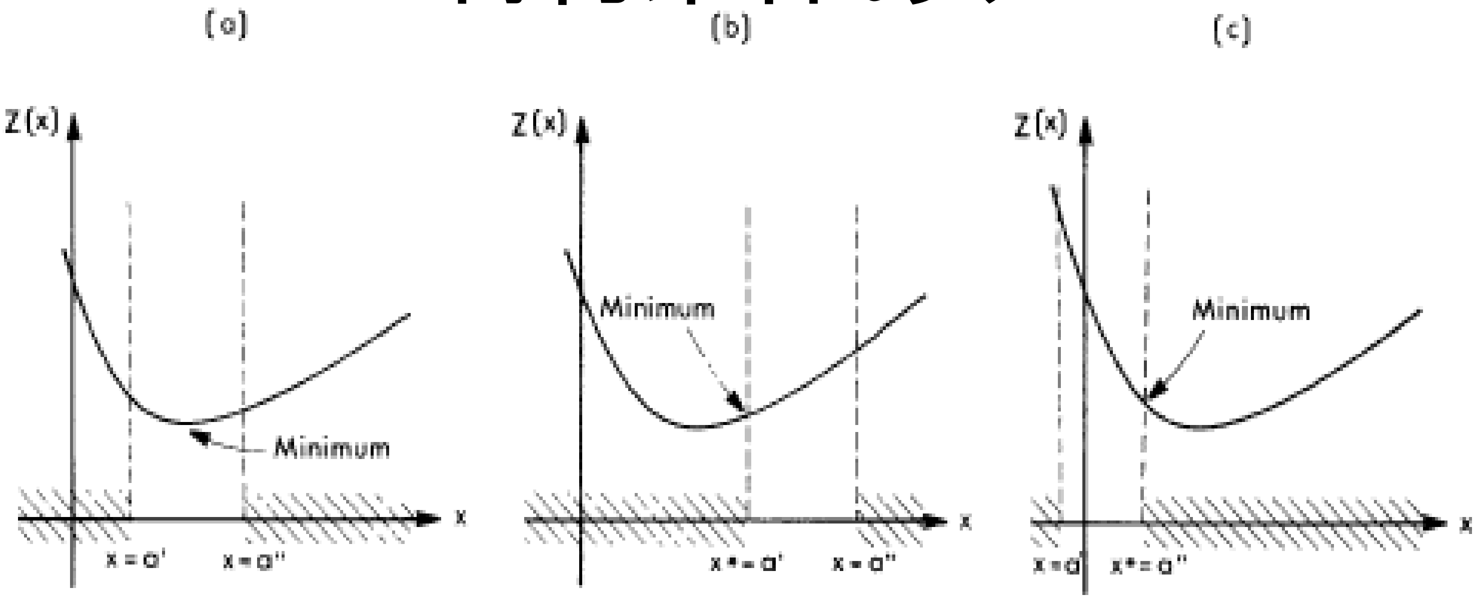
１変数における最小化問題　４ 制約条件あり

＜制約条件付きの場合＞

最小値の必要条件

- $\dfrac{\partial z(x^*)}{\partial x} = \sum_j u_j \dfrac{\partial g_j(x^*)}{\partial x}$
- $u_j \geq 0$
- $u_j * \left(b_j - g_j(x^*)\right) = 0$
- $b_j - g_j(x^*) \geq 0$

１変数における最小化問題　５ 制約条件あり



制約条件： *g1(x)=x≧a’*　　*g2(x)=-x≧-a”*

グラフ[b]

$$\frac{dg_1(x^*)}{dx} = 1$$

$$\frac{dz(x^*)}{dx} > 0$$

グラフ[c]

$$\frac{dg_2(x^*)}{dx} = -1$$

$$\frac{dz(x^*)}{dx} < 0$$

制約条件gj(x)の境界上で最小値になる場合、以下のような特徴が存在

$$\frac{dz(x^*)}{dx} = u_j \frac{dg_j(x^*)}{dx}$$

ujは非負

１変数における最小化問題　６
制約条件あり

前のスライドの特徴より

・ $\frac{\partial z(x^*)}{\partial x} = \sum_j u_j \frac{\partial g_j(x^*\ )}{\partial x}$ ・・・①

・ $u_j \geq 0$ ・・・②

・ $u_j * \left(b_j - g_j(x^*)\right) = 0$ ・・・③

・ $b_j - g_j(x^*) \geq 0$ ・・・④

がつくられた

(i)ある制約条件の境界上で最小値を取る場合

その制約条件に対応するujのみ0より大きい数をとることによって①～④の条件を満たす

(ii)制約条件の境界の内部で最小値を取る場合

すべてのujを0とすることで、①～④の条件を満たす

①～④式は、最小値の必要条件

多変数における最小化問題　1
制約条件なし

停留点stationary pointである必要条件は

$$\nabla z(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial z(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial z(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_I} \right) = \mathbf{0}$$

多変数における最小化問題　2
制約条件なし

停留点(stationary point)が極小値であるための条件

▪$\mathrm{z}[\theta \boldsymbol{x}' + (1-\theta)\boldsymbol{x}''] < \theta z(\boldsymbol{x}') + (1-\theta) z(\boldsymbol{x}'')$

▪$\mathrm{z}(\boldsymbol{x}') + \nabla z(\boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}')^{T} < z(\boldsymbol{x}'')$

▪$\nabla^2 z(x^*)$が正値であること

多変数における最小化問題　３

$$\nabla^2 z(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_1\, \partial x_I} \\ \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_I\, \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 z(\mathbf{x})}{\partial x_I^2} \end{bmatrix}$$

上をヘッセ行列という。実対称行列の一種。

・行列Hが正値ならば、ゼロベクトル以外の任意のベクトルhに対して

h・H・h^T>0が成立する

実対称行列において

固有値がすべて正⇔正値行列

多変数における最小化問題　4

＜制約条件がある場合＞

最小値の必要条件(クーン･タッカー条件式)

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j * \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}$$

$$u_j \geq 0$$

$$u_j * \left(b_j - g_j(\boldsymbol{x}^*)\right) = 0$$

$$b_j - g_j(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$$

クーンタッカー条件　計算例1

$$z(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

クーンタッカー条件

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} = \sum_j u_j * \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}$$

$$u_j \geq 0$$

$$u_j * \left(b_j - g_j(\boldsymbol{x}^*)\right) = 0$$

$$b_j - g_j(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$$

$$2x_1^* + 2x_2^* - 2 = u$$

$$4x_2^* + 2x_1^* - 4 = u$$

$$u(2 - x_1^* - x_2^*) = 0$$

$$x_1^* + x_2^* \geq 2$$

$$u \geq 0$$

クーンタッカー条件　計算例2

u=0は条件を満たさない

$$2x_1^* + 2x_2^* - 2 - u = 0$$
$$2x_1^* + 4x_2^* - 4 - u = 0$$
$$x_1^* + x_2^* - 2 = 0$$

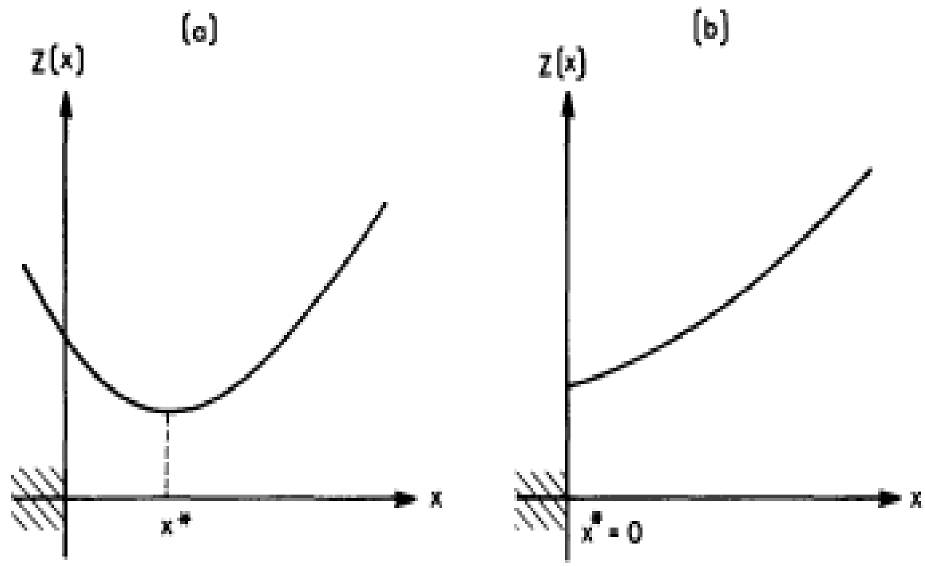
⇒

$$x_1^* = 1$$
$$x_2^* = 1$$
$$u^* = 2$$

特殊な制約条件の場合
Nonnegativity Constraints

非負条件の場合(x≧0)

一次変数で考えると



[a]のとき

$$\frac{dz(x^*)}{dx} = 0$$

[b]のとき

$$x^* = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{dz(x^*)}{dx} \geq 0$$

$$x^* \frac{dz(x^*)}{dx} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{dz(x^*)}{dx} \geq 0$$ が必要条件となる

多変数の場合

$$x_i^* \frac{\partial z(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial z(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \geq 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, I$$

まとめ

1変数と多変数の最小化問題の必要条件をしっかり理解することが大切

特に、制約条件ありの場合の多変数最小化問題の必要条件はクーンタッカー条件であり、今後の章で大事になってくる