Urban Transportation Network
(Yossi Sheffi, 1985)
Chap.5 (p.111~132)

交通量配分編 #2

交通研究室　学部4年

日下部　達哉

Contents (Chap. 5)

1. 利用者均衡 (User Equilibrium)
2. ヒューリスティックに解く
3. 凸結合法で解く

1. 利用者均衡 (User Equilibrium)

- 利用者「個々人」が、所要時間を最小とするような状態
- 利用者均衡を求める式

$$\min.\ z(\boldsymbol{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

<u>リンク</u>所要時間が<u>リンク</u>交通量の関数

$$\text{subject to} \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ , 0 \leq f_k^{rs}$$

R-S間を結ぶ<u>経路</u>kの交通量

R-S間の全体の交通量

2. ヒューリスティックに解く

- ヒューリスティック … 必ず正しい答えを導けるわけではないが、
  ある程度のレベルで正解に近い解を得ることが出来る方法

- “Capacity Restraint” と “Incremental Assignment” の二種類

- All-or-Nothing … 最短となる経路に「全ての交通量」を配分する
  ※その経路の交通量が増えると、同時に所要時間も増えて、
  　その経路が最短経路では無くなって…ということは考えない
  ※反復的な計算をする際、この配分を最初に行う

2. ヒューリスティックに解く

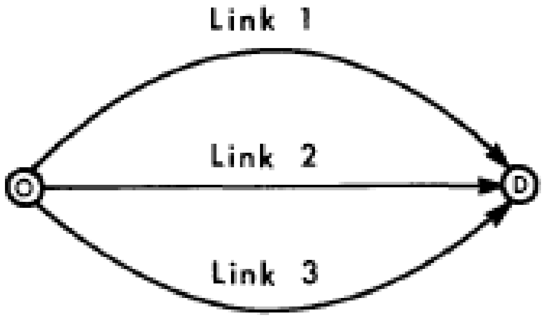
- Capacity Restraint

① リンク交通量を「全て0」として、All-or-Nothing 配分を行う
② 各リンク（→各経路）の所要時間を求める
③ ②の結果をもとに、All-or-Nothing 配分を行う
④ ②と③を繰り返していく

×二つの安定状態を行き来するだけで、計算結果が収束しない

TABLE 5.1 Capacity Restraint Algorithm Applied to the Network in Figure 5.1

Iteration Number	Algorithmic Step	Link 1	Link 2	Link 3
0	Initialization	$t_1^0 = 10$ $x_1^0 = 10$	$t_2^0 = 20$ $x_2^0 = 0$	$t_3^0 = 25$ $x_3^0 = 0$
1	Update Loading	$t_1^1 = 947$ $x_1^1 = 0$	$t_2^1 = 20$ $x_2^1 = 10$	$t_3^1 = 25$ $x_3^1 = 0$
2	Update Loading	$t_1^2 = 10$ $x_1^2 = 10$	$t_2^2 = 137$ $x_2^2 = 0$	$t_3^2 = 25$ $x_3^2 = 0$
3	Update Loading	$t_1^3 = 947$ $x_1^3 = 0$	$t_2^3 = 20$ $x_2^3 = 10$	$t_3^3 = 25$ $x_3^3 = 0$
		⋮	⋮	⋮



$t_1 = 10[1+0.15(\frac{x_1}{2})^4]$ time units

$t_2 = 20[1+0.15(\frac{x_2}{4})^4]$ time units

$t_3 = 25[1+0.15(\frac{x_3}{3})^4]$ time units

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ flow units

Figure 5.1 Network example, with three links and one O–D pair.

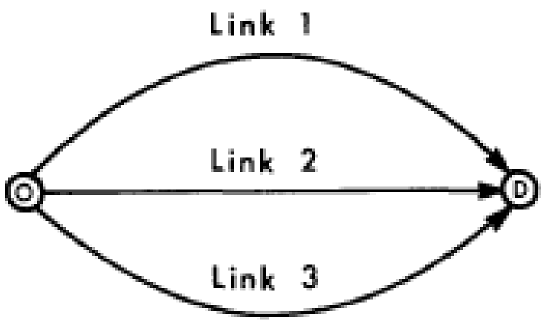
2. ヒューリスティックに解く

➤ Incremental Assignment

① リンク交通量を「全て0」として、All-or-Nothing 配分を行う
② 各リンク（→各経路）の所要時間を求める
③ ②の結果をもとに、All-or-Nothing 配分を行う
④ 各リンク（→各経路）の所要時間を求める
⑤ 直近2回の時刻を組み合わせて、所要時間を定義する
⑥ ⑤の結果をもとに、All-or-Nothing 配分を行う
⑦ ④～⑥を決められた回数だけ繰り返していく
⑧ 直近4回の配分を平均、配分交通量と所要時間を求める

TABLE 5.2 Modified Restraint Algorithm Applied to the Network in Figure 5.1

Iteration Number	Algorithmic Step	Link 1	Link 2	Link 3
0	Initialization	$t_1^0 = 10$	$t_2^0 = 20$	$t_3^0 = 25$
		$x_1^0 = 10$	$x_2^0 = 0$	$x_3^0 = 0$
1	Update	$\tau_1^1 = 947$	$\tau_2^1 = 20$	$\tau_3^1 = 25$
	Smoothing	$t_1^1 = 244$	$t_2^1 = 20$	$t_3^1 = 25$
	Loading	$x_1^1 = 0$	$x_1^1 = 10$	$x_3^1 = 0$
2	Update	$\tau_1^2 = 10$	$\tau_2^2 = 137$	$\tau_3^2 = 25$
	Smoothing	$t_2^2 = 186$	$t_2^2 = 49$	$t_3^2 = 25$
	Loading	$x_1^2 = 0$	$x_2^2 = 0$	$x_3^2 = 10$
3	Update	$\tau_1^3 = 10$	$\tau_2^3 = 20$	$\tau_3^3 = 488$
	Smoothing	$t_1^3 = 142$	$t_2^3 = 42$	$t_3^3 = 141$
	Loading	$x_1^3 = 0$	$x_2^3 = 10$	$x_3^3 = 0$
Average		$x_1^* = 2.5$	$x_2^* = 5.0$	$x_3^* = 2.5$
		$t_1^* = 13.7$	$t_2^* = 27.3$	$t_3^* = 26.8$



$t_1 = 10[1+0.15(\frac{x_1}{2})^4]$ time units

$t_2 = 20[1+0.15(\frac{x_2}{4})^4]$ time units

$t_3 = 25[1+0.15(\frac{x_3}{3})^4]$ time units

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ flow units

Figure 5.1 Network example, with three links and one O–D pair.

3. 凸結合法で解く

	経路	リンク
所要時間	u	t
交通量	f	$x \ or \ y$

- （二点の）凸結合…$0 \leq \lambda \leq 1$ を満たす λ を定義したとき、
  二点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に関して $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ を表す点集合

- 凸結合法…最適解に到達するためのアルゴリズム。
  ある地点 $\boldsymbol{x}^n$ から、次にどこに移動すれば、
  最も効率的に最適解に近づけるかを考える。

二点 $\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n$ の
凸結合

① 動く方向 $\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{x}^n$ を求める
② 動く大きさ λ を求める（移動先が $\boldsymbol{x}^n + \lambda(\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{x}^n)$ になる）
③「収束」と判定されるまで計算を続ける

3. 凸結合法で解く

	経路	リンク
所要時間	u	t
交通量	f	$x\ or\ y$

- 利用者「個々人」が、所要時間を最小とするような状態
- 利用者均衡を求める式

$$min.\ z(\boldsymbol{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega$$

リンク所要時間がリンク交通量の関数

$$\text{subject to } \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}\ , 0 \le f_k^{rs}$$

R-S間を結ぶ経路kの交通量

R-S間の全体の交通量

3. 凸結合法で解く

	経路	リンク
所要時間	u	t
交通量	f	x or y

- 動く方向 $\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{x}^n$ を求める

  … $min.\ z(\boldsymbol{y}^n)$ を満たす $\boldsymbol{y}^n$ に動けば最も効率的

① 近似… $z(\boldsymbol{y}^n) = z(\boldsymbol{x}^n) + \nabla z(\boldsymbol{x}^n)\cdot(\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{x}^n)^T$

② 公式… $\dfrac{\partial z(\boldsymbol{x}^n)}{\partial x_a} = t_a^n$ (x_a^n の関数、y_a^n には影響されない)

①② より $min.\ z(\boldsymbol{y}^n) = min.\ \nabla z(\boldsymbol{x}^n)\cdot\boldsymbol{y}^{nT}$

$= min.\ \sum_a \dfrac{\partial z(\boldsymbol{x}^n)}{\partial x_a} y_a^n = min.\ \sum_a t_a^n y_a^n$ (t_a^n は y_a^n によらず一定)

⇒ All-or-Nothing 配分をすれば最も効率的

3. 凸結合法で解く

	経路	リンク
所要時間	u	t
交通量	f	x or y

- 動く大きさλを求める

$$min. \sum_a \int_0^{x_a^n+\lambda(y_a^n-x_a^n)} t_a(\omega)d\omega$$

$$subject\ to\ \ 0 \leq \lambda \leq 1$$

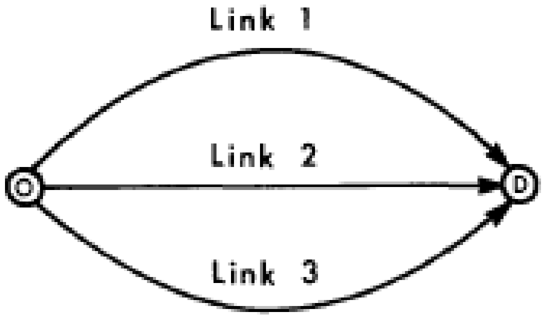
- 「収束」と判定されるまで計算を続ける

$$\sum_{rs} \frac{|u_{rs}^n - u_{rs}^{n-1}|}{u_{rs}^n} < \kappa$$

<u>経路</u>所要時間が
収束してきている
（あくまで一例）

TABLE 5.4 Convex Combinations Algorithm Applied to the Network in Figure 5.1

Iteration Number	Algorithmic Step	Link 1	Link 2	Link 3	Objective Function	Step Size
0	Initialization	$t_1^0 = 10.0$	$t_2^0 = 20.0$	$t_3^0 = 25.0$		
		$x_1^1 = 10.00$	$x_2^1 = 0.00$	$x_3^1 = 0.00$		
1	Update	$t_1^1 = 947.0$	$t_2^1 = 20.0$	$t_3^1 = 25.0$	$z(\mathbf{x}) = 1975.00$	
	Direction	$y_1^1 = 0$	$y_2^1 = 10$	$y_3^1 = 0$		$\alpha_1 = 0.596$
	Move	$x_1^2 = 4.04$	$x_2^2 = 5.96$	$x_3^2 = 0.00$		
2	Update	$t_1^2 = 35.0$	$t_2^2 = 35.0$	$t_3^2 = 25.0$	$z(\mathbf{x}) = 197.00$	
	Direction	$y_1^2 = 10$	$y_2^2 = 0$	$y_3^2 = 0$		$\alpha_1 = 0.161$
	Move	$x_1^3 = 3.39$	$x_2^3 = 5.00$	$x_3^3 = 1.61$		
3	Update	$t_1^3 = 22.3$	$t_2^3 = 27.3$	$t_3^3 = 35.3$	$z(\mathbf{x}) = 189.98$	
	Direction	$y_1^3 = 10$	$y_2^3 = 0$	$y_3^3 = 0$		$\alpha = 0.035$
	Move	$x_1^4 = 3.62$	$x_2^4 = 4.83$	$x_3^4 = 1.55$		
4	Update	$t_1^4 = 26.1$	$t_2^4 = 26.3$	$t_3^4 = 25.3$	$z(\mathbf{x}) = 189.44$	
	Direction	$y_1^4 = 0$	$y_2^4 = 0$	$y_3^4 = 10$		$\alpha = 0.020$
	Move	$x_1^5 = 3.54$	$x_2^5 = 4.73$	$x_3^5 = 1.72$		
5	Update	$t_1^5 = 24.8$	$t_2^5 = 25.8$	$t_3^5 = 25.4$	$z(\mathbf{x}) = 189.33$	
	Direction	$y_1^5 = 10$	$y_2^5 = 0$	$y_3^5 = 0$		$\alpha = 0.007$
	Move	$x_1^6 = 3.59$	$x_2^6 = 4.70$	$x_3^6 = 1.71$		
	Update	$t_1^6 = 25.6$	$t_2^6 = 25.7$	$t_3^6 = 25.4$	$z(\mathbf{x}) = 189.33$	



$t_1 = 10[1+0.15(\frac{x_1}{2})^4]$ time units

$t_2 = 20[1+0.15(\frac{x_2}{4})^4]$ time units

$t_3 = 25[1+0.15(\frac{x_3}{3})^4]$ time units

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ flow units

Figure 5.1 Network example, with three links and one O–D pair.