最短経路探索
&
User Equilibrium with variable demand

交通研　スタートアップゼミ#3
橋梁研究室　B4
中須賀　淳貴

参考文献

・Yossi Sheffi(1985),『URBAN TRANSPORTATION NETWORKS』,Prentice Hall
Chapter 6『User Equilibrium with Variable Demand』,134-163

・土木学会　土木計画学究委員会「交通ネットワーク」出版小委員会(1998)
『交通ネットワークの均衡分析』,土木学会
第８章　利用者均衡モデルの解法 133-165

今日のテーマ

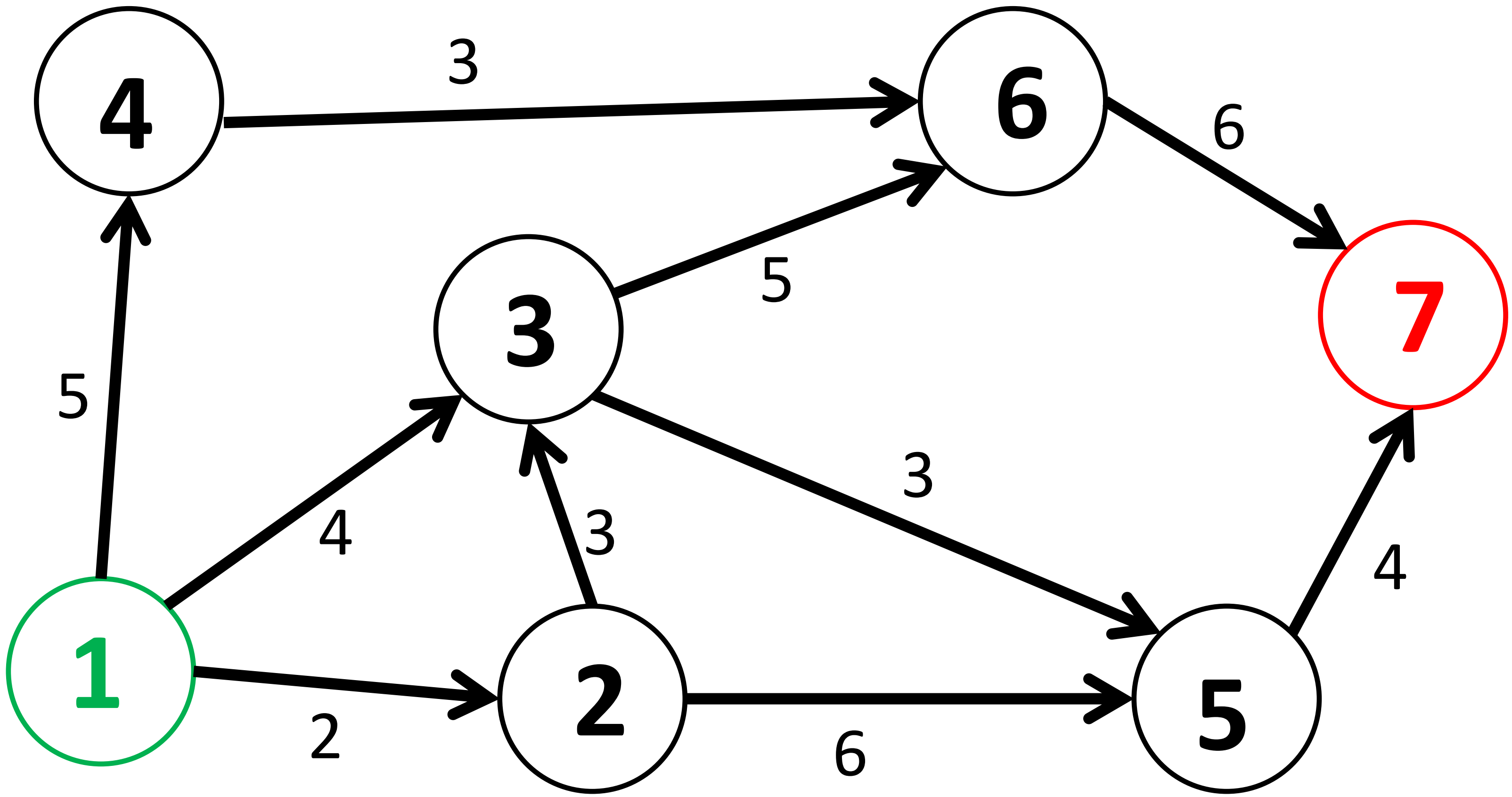
- 最短経路探索アルゴリズムの紹介
  →Dijkstra法（ダイクストラ法）、ラベル修正法

- 利用者均衡モデルの解法
  →Frank-Wolfe法
  →User Equilibrium with variable demand
  （変動需要下での利用者均衡）

最短経路探索モデル

例題

・各経路の添え字は距離あるいは費用
・①が始点(O)、⑦が終点(D)
・最短経路を求めるモデルを考える



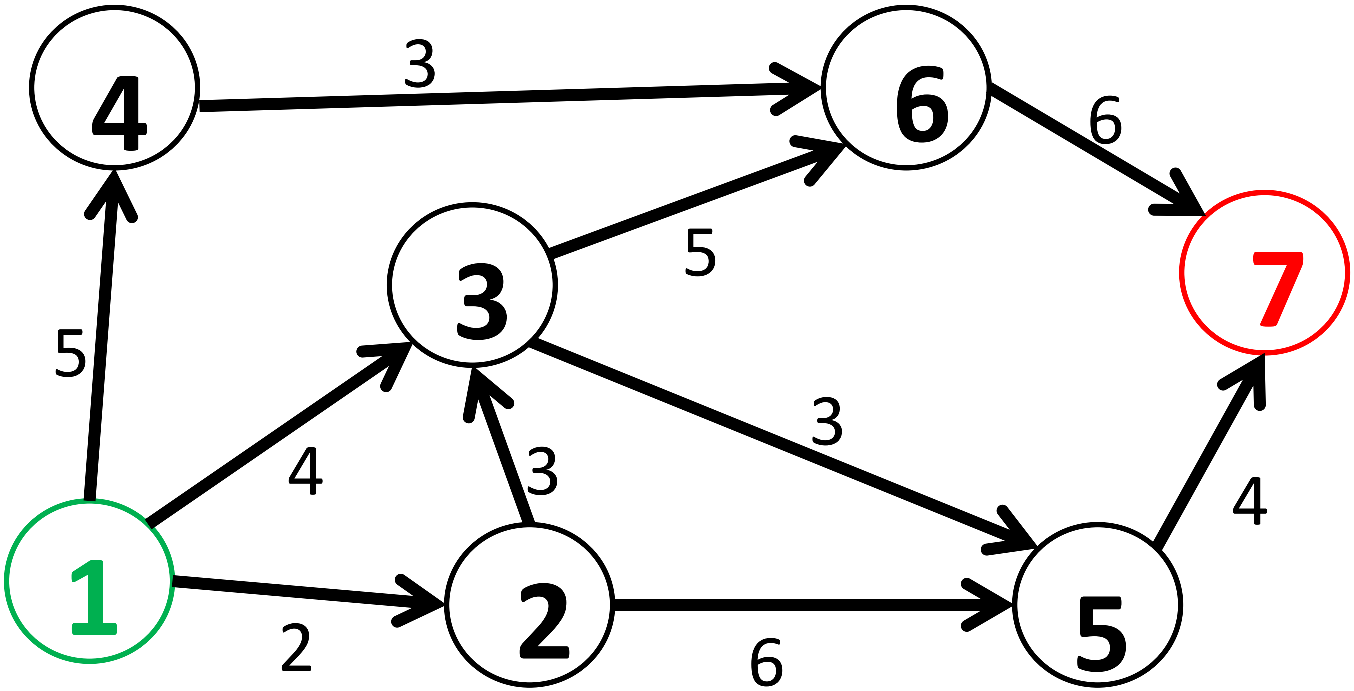
最短経路探索モデル

- 以下で紹介する2つの手法はいずれも、1ペアの起終点間の最短経路を一回一回求めていくものではなく、一つの起点から全ての終点までの最短距離を一回の計算で同時に求める方法である。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法

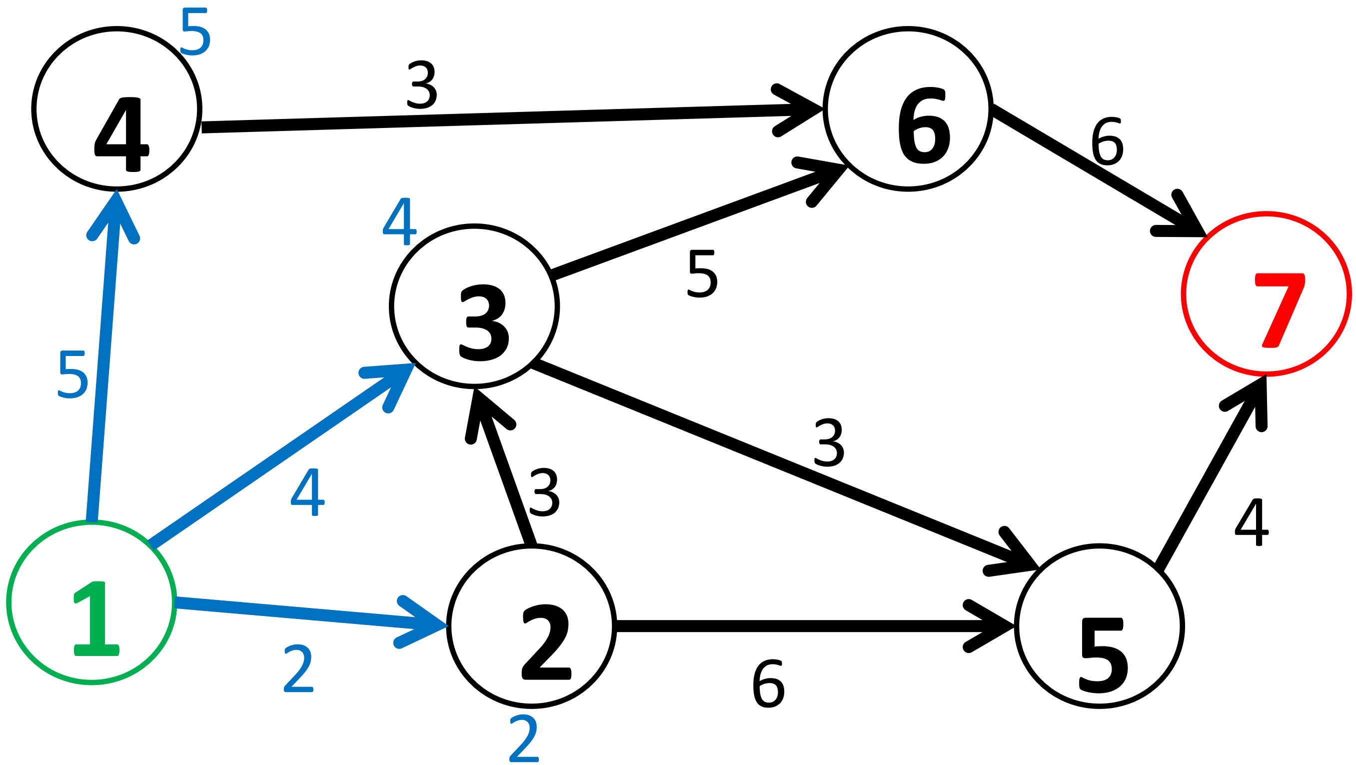
- 各経路が非負であるときに用いられる
- 最短経路が分かったノードを順々に決定していく
- 先行ポインタ（あるノードiへ向かうのに最短経路となるルートを通り、そのノードiの一つ前に通るノード）を用いて、後ろから最短ルートが決定していく

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



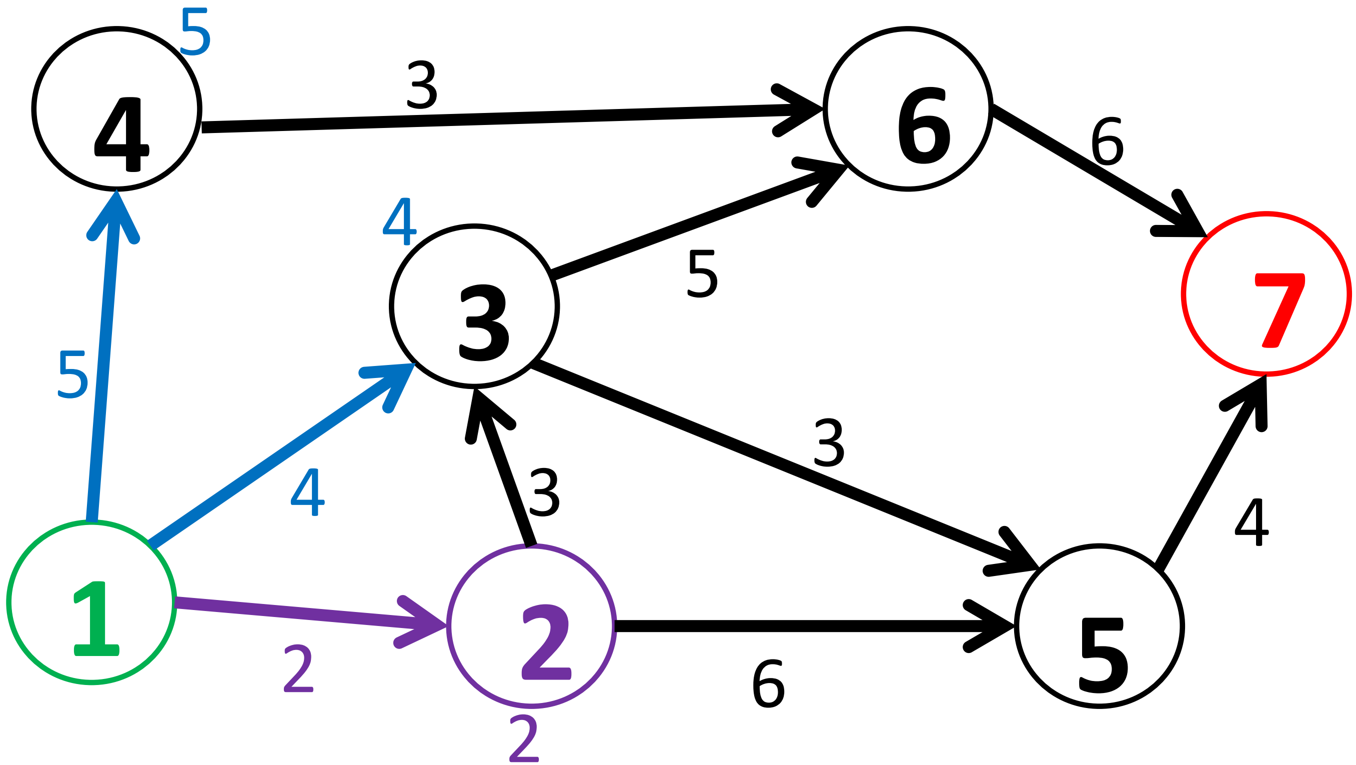
・①を始点として、①から直接向かうことのできるノードへの距離をそのノードの暫定最短距離とする。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



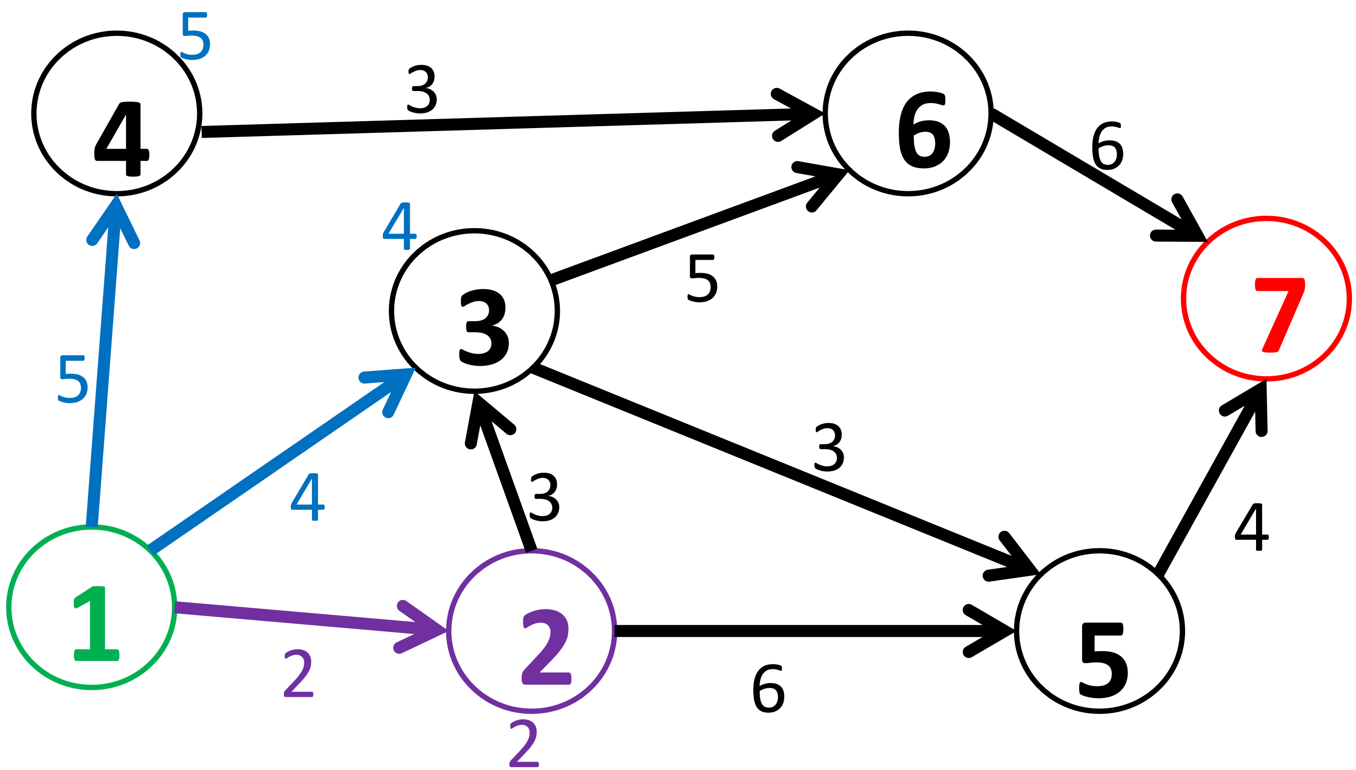
・①を始点として、①から直接向かうことのできるノードへの距離をそのノードの暫定最短距離とする。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



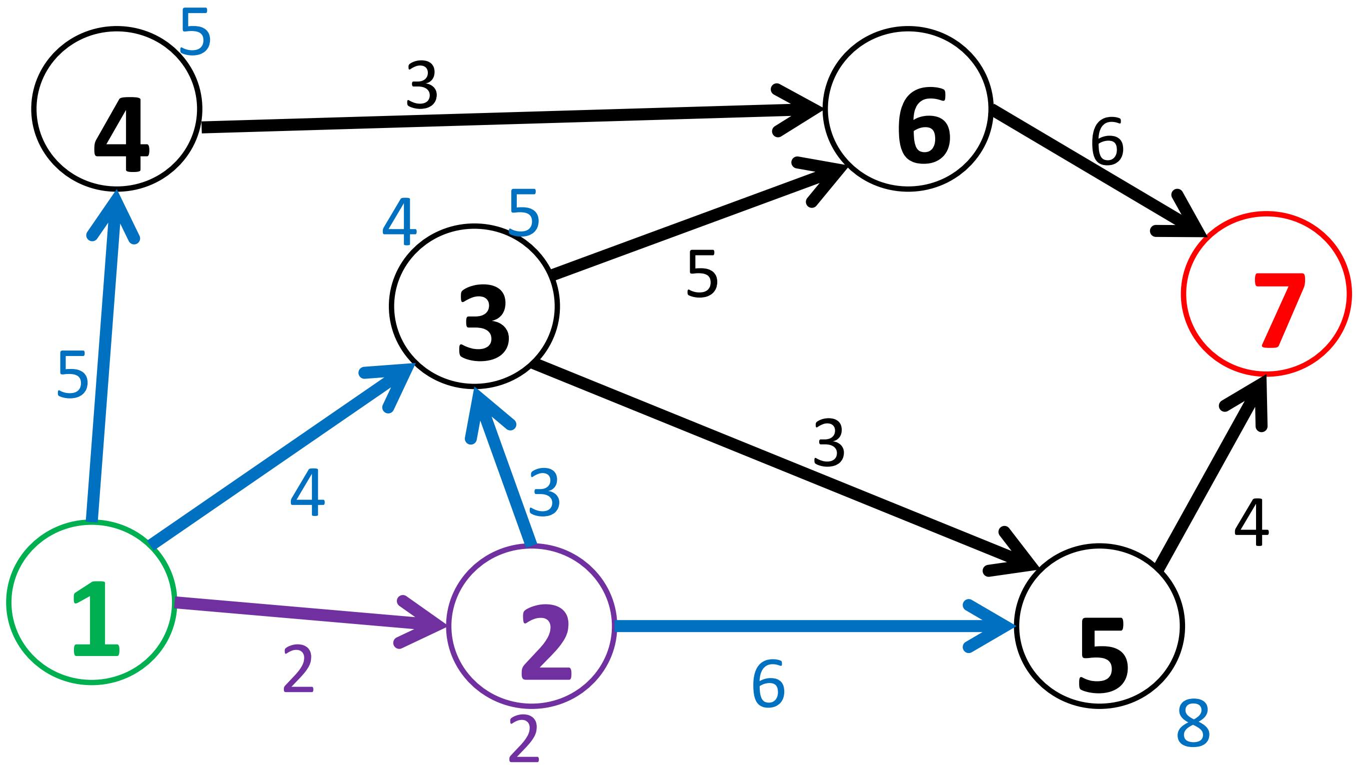
・各経路は非負であることから、暫定最短距離の中で最も値が小さいものが確定最短距離に、その経路が確定最短経路となる。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



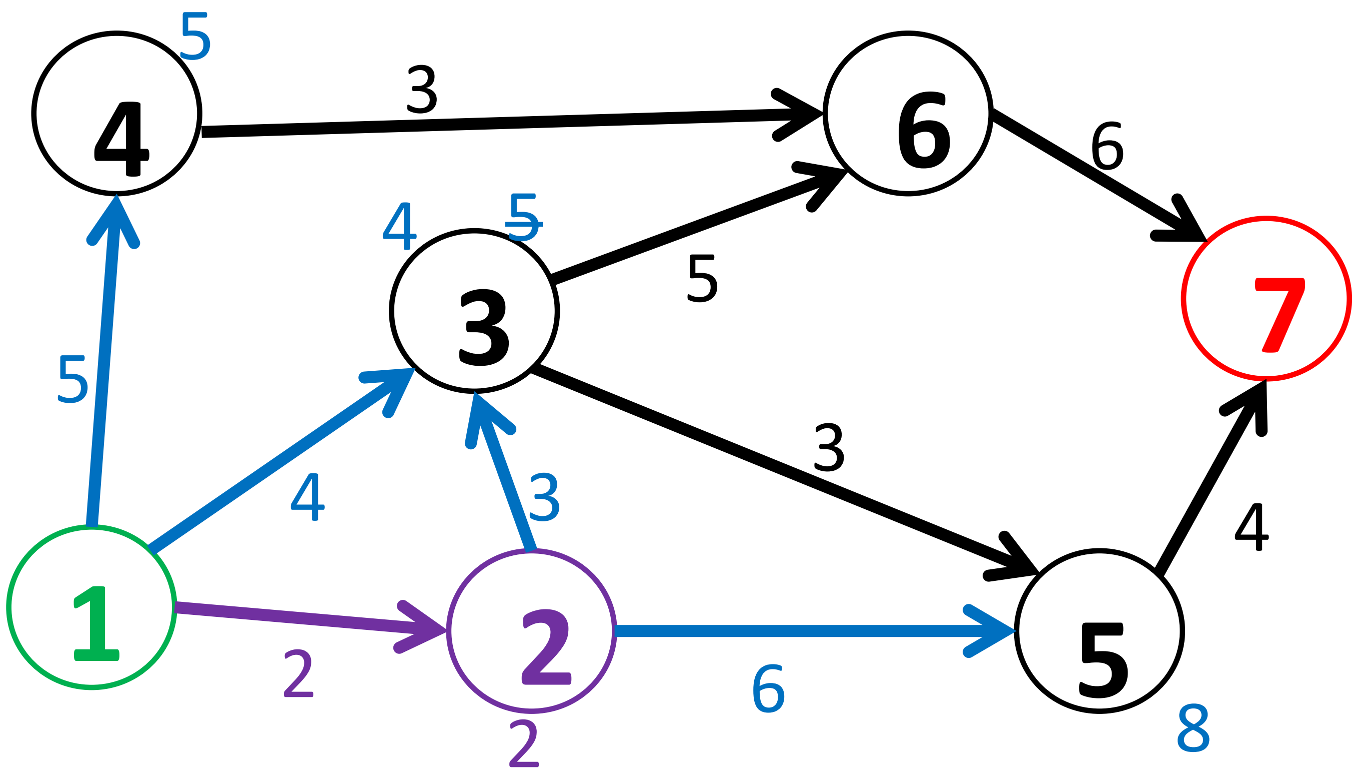
・次に、①からの最短経路が確定したノード②を通り、②から直接向かうことのできるノードまでの、①からの距離を、再びそのノードの暫定最短距離とする。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



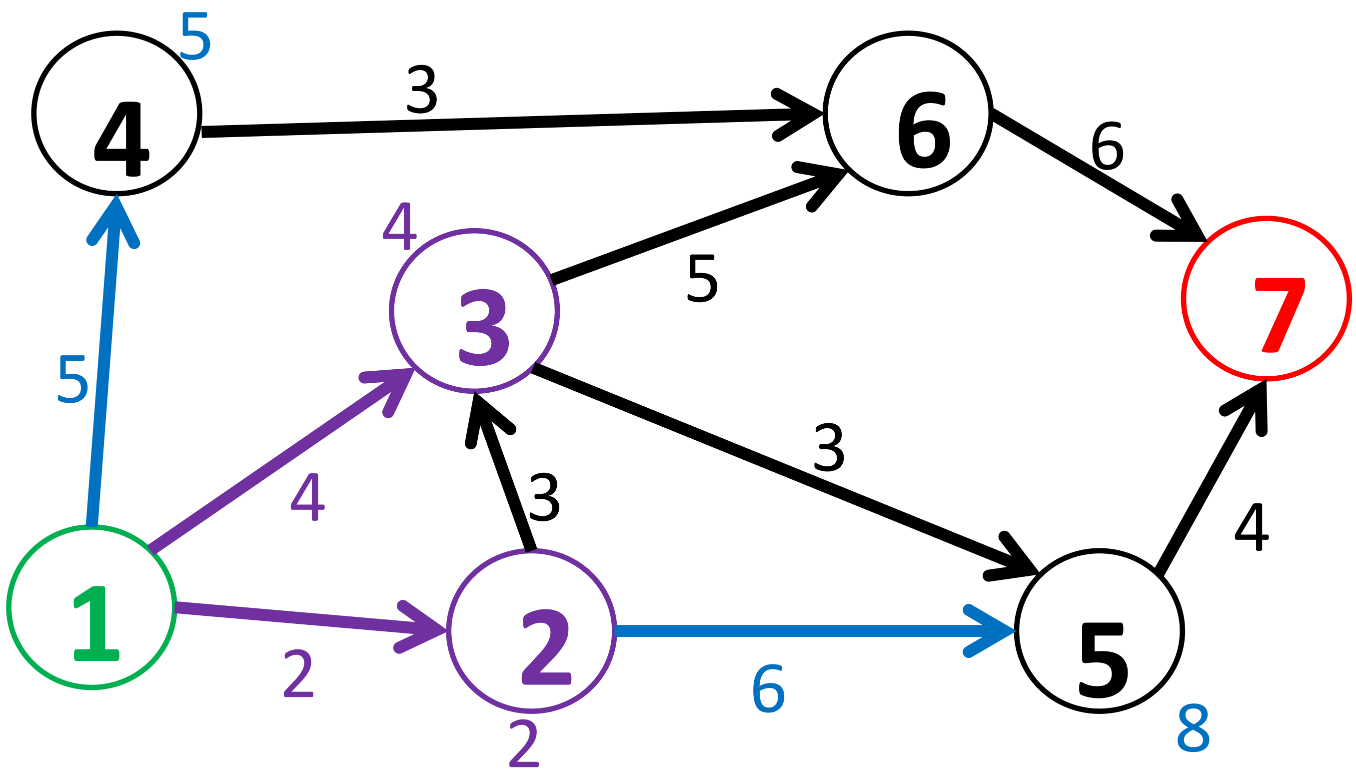
・次に、①からの最短経路が確定したノード②を通り、②から直接向かうことのできるノードまでの、①からの距離を、再びそのノードの暫定最短距離とする。

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



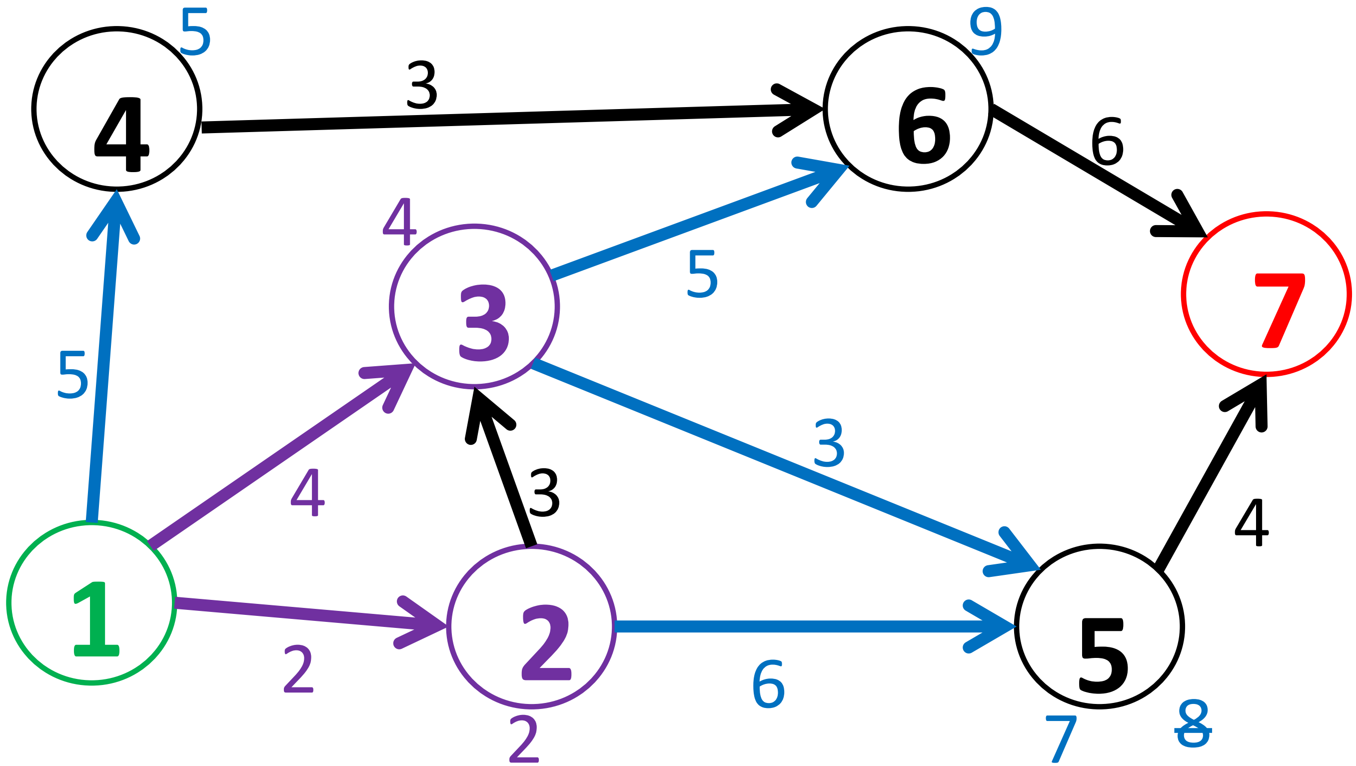
※異なるルートで同じノードへ複数の暫定最短距離が求まった場合には、数が大きい方を棄却する

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



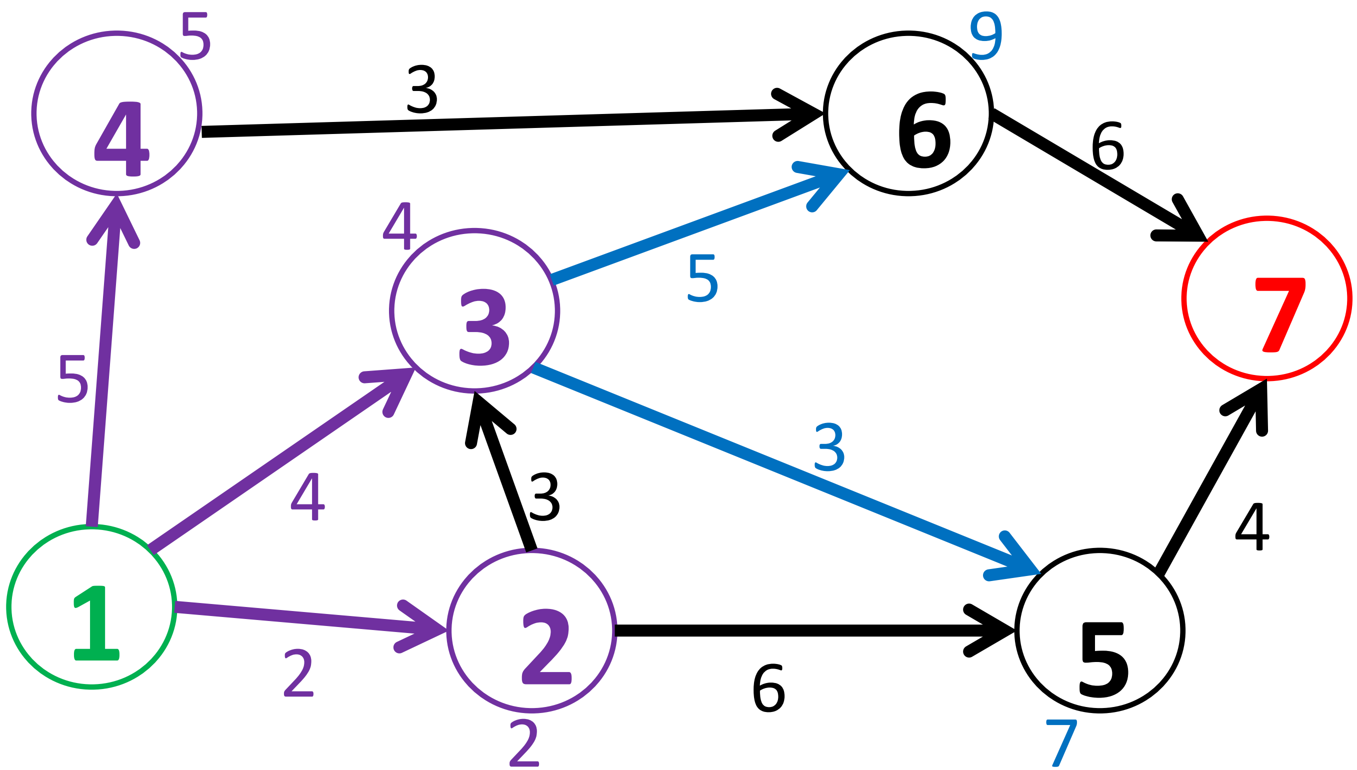
・先程と同様にして、今ある暫定最短距離の中で、値が一番小さいものが確定最短距離、その経路が確定最短経路となる

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



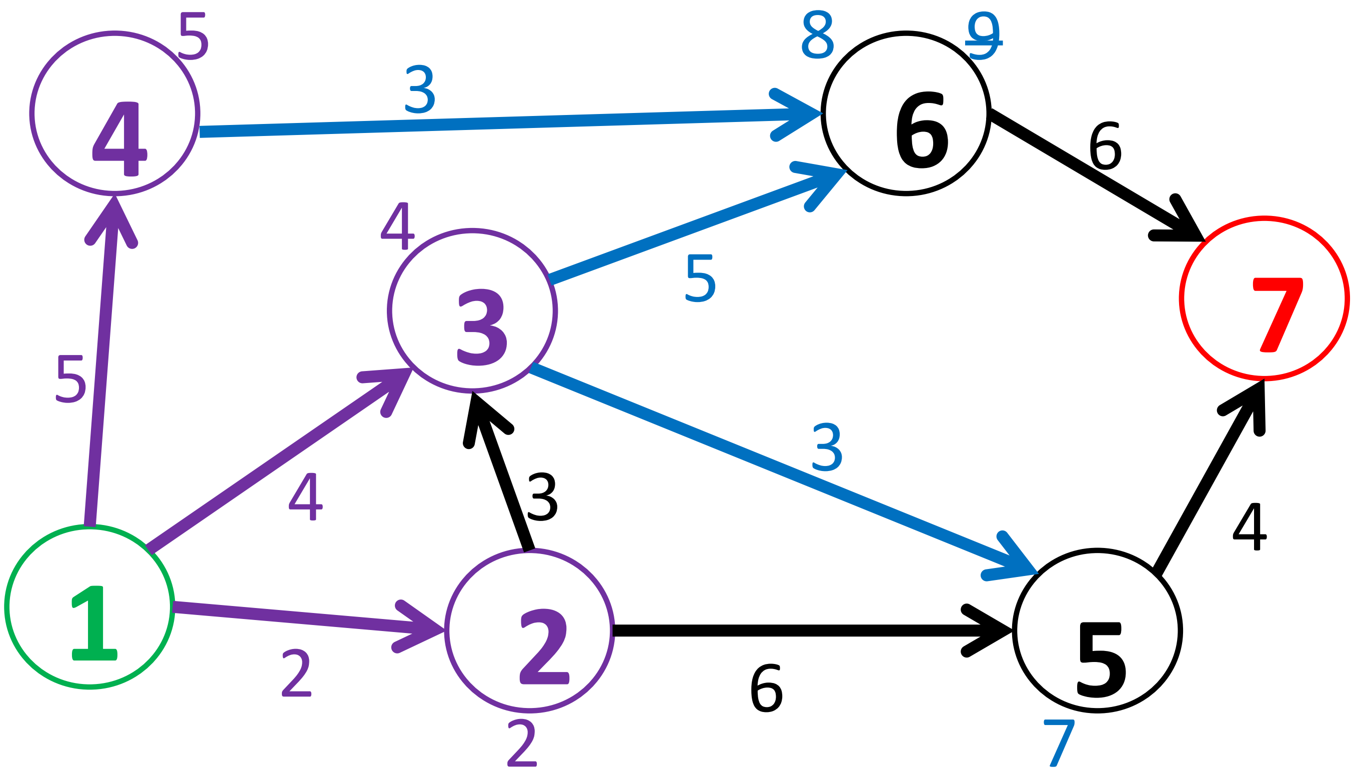
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



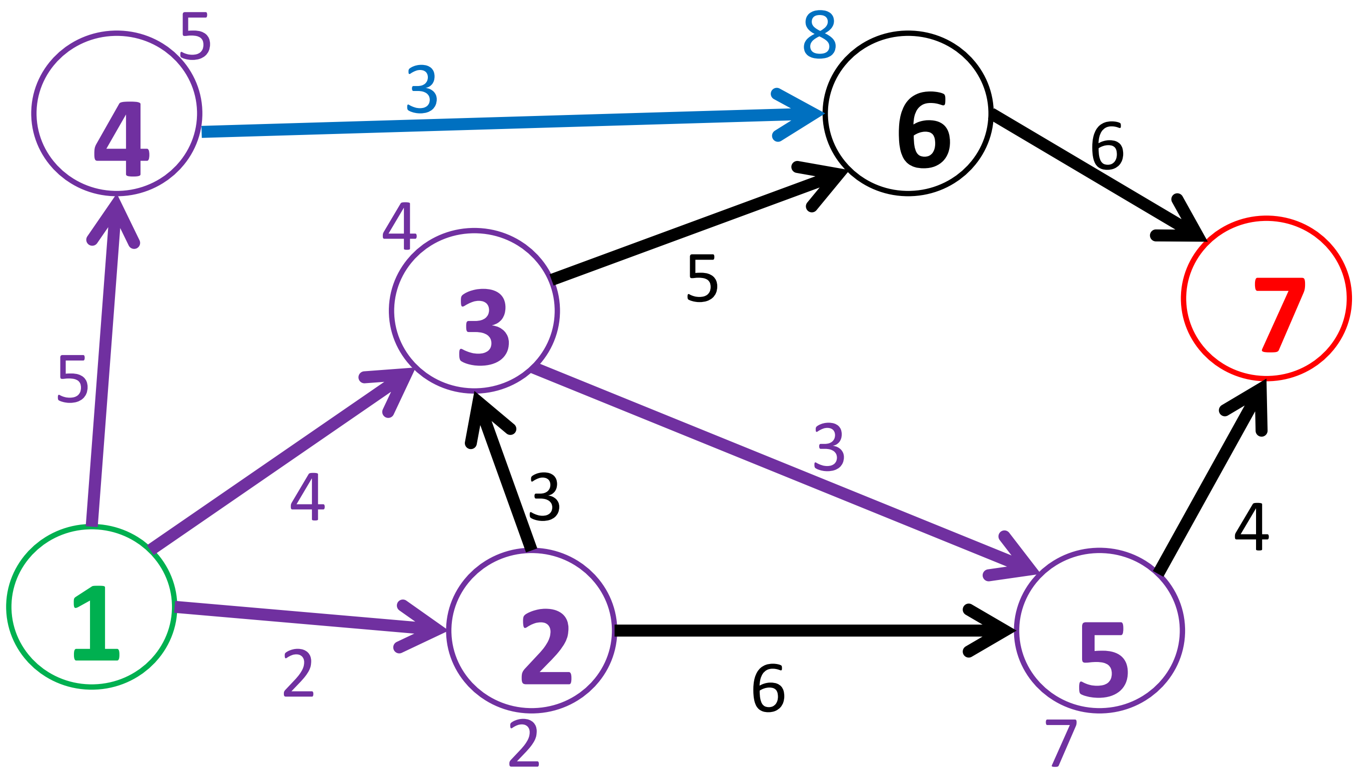
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



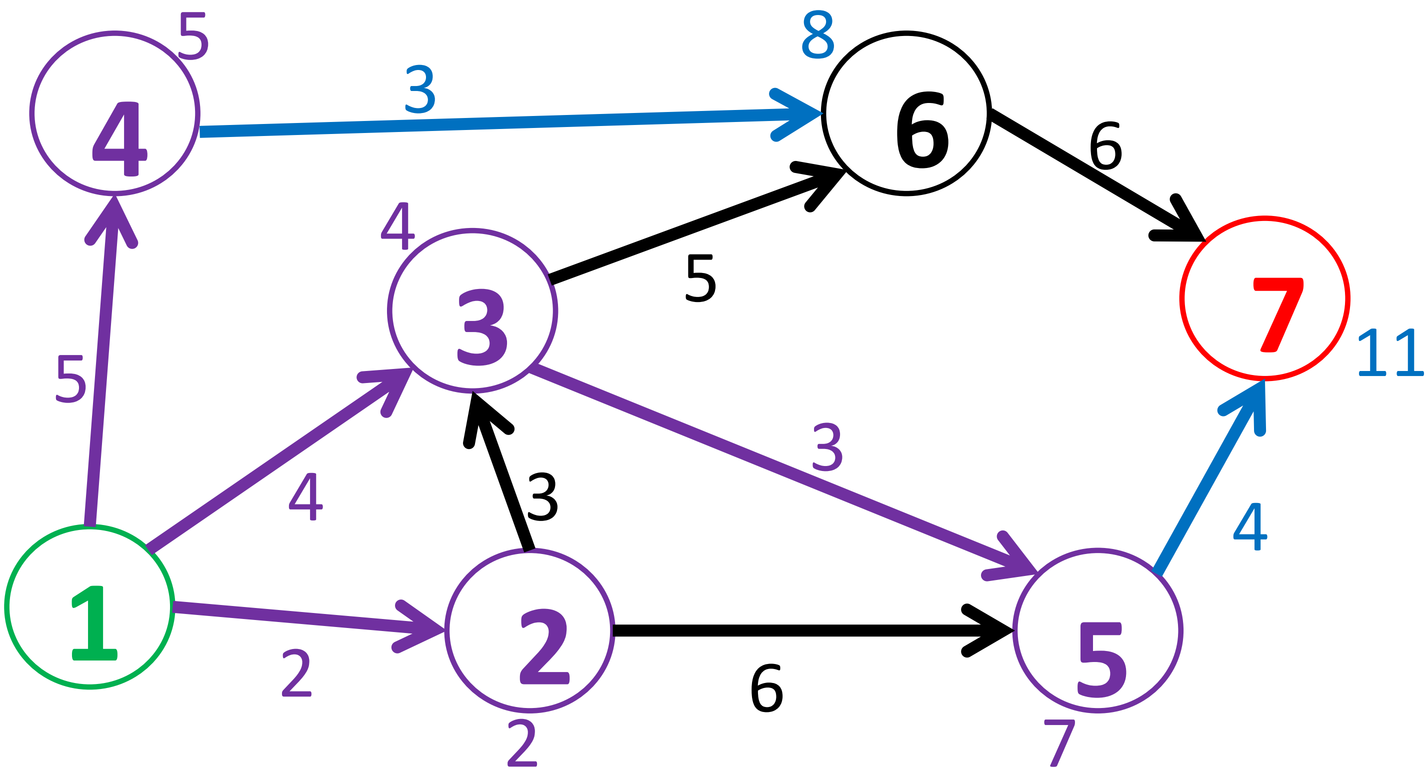
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



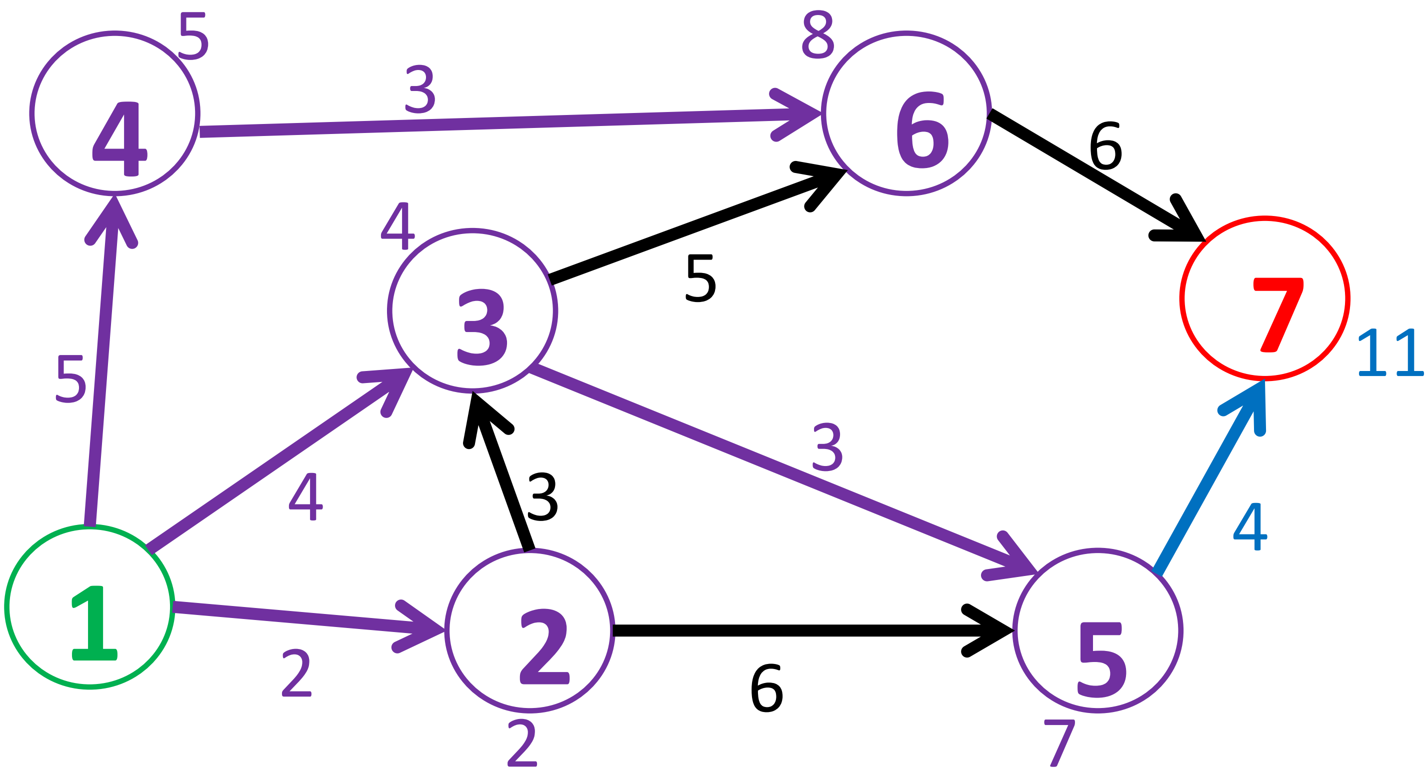
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



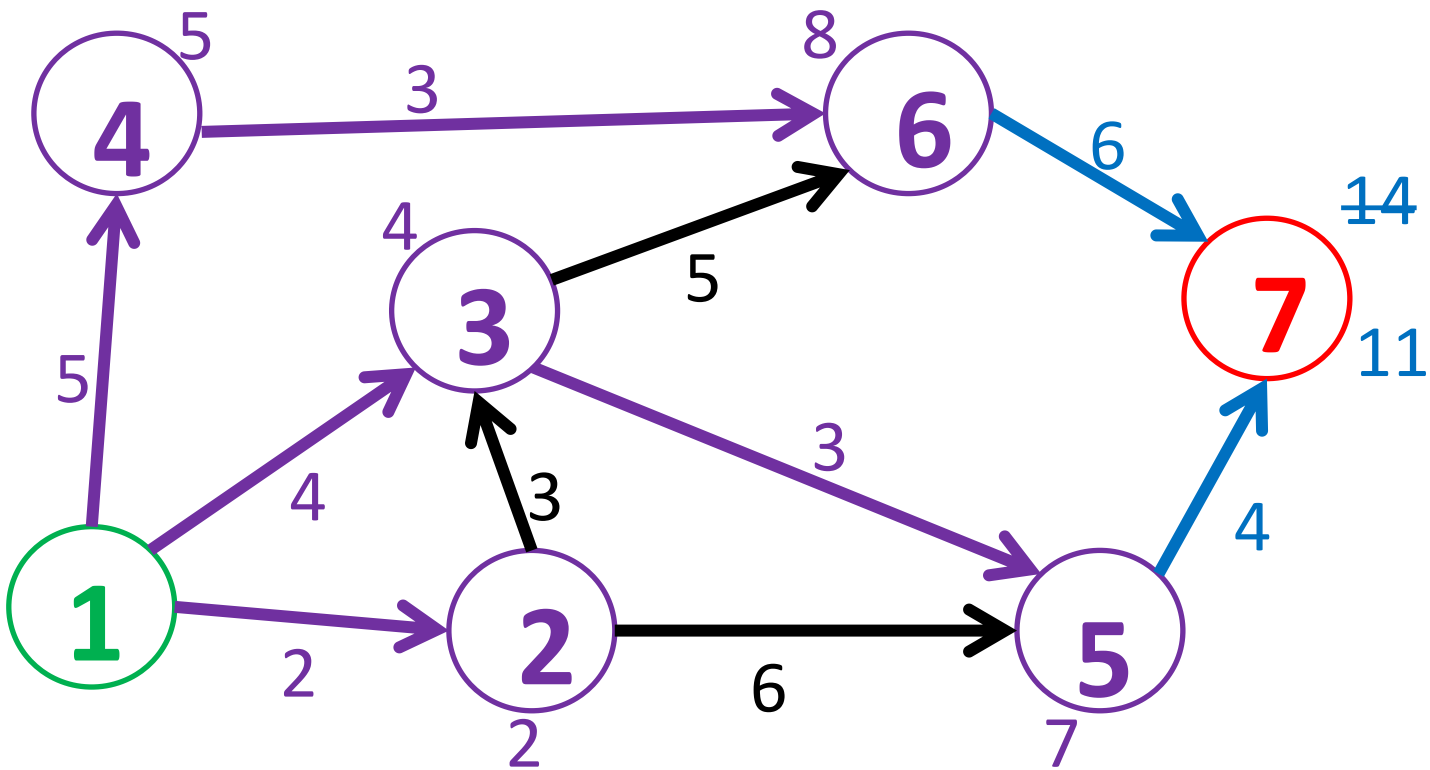
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



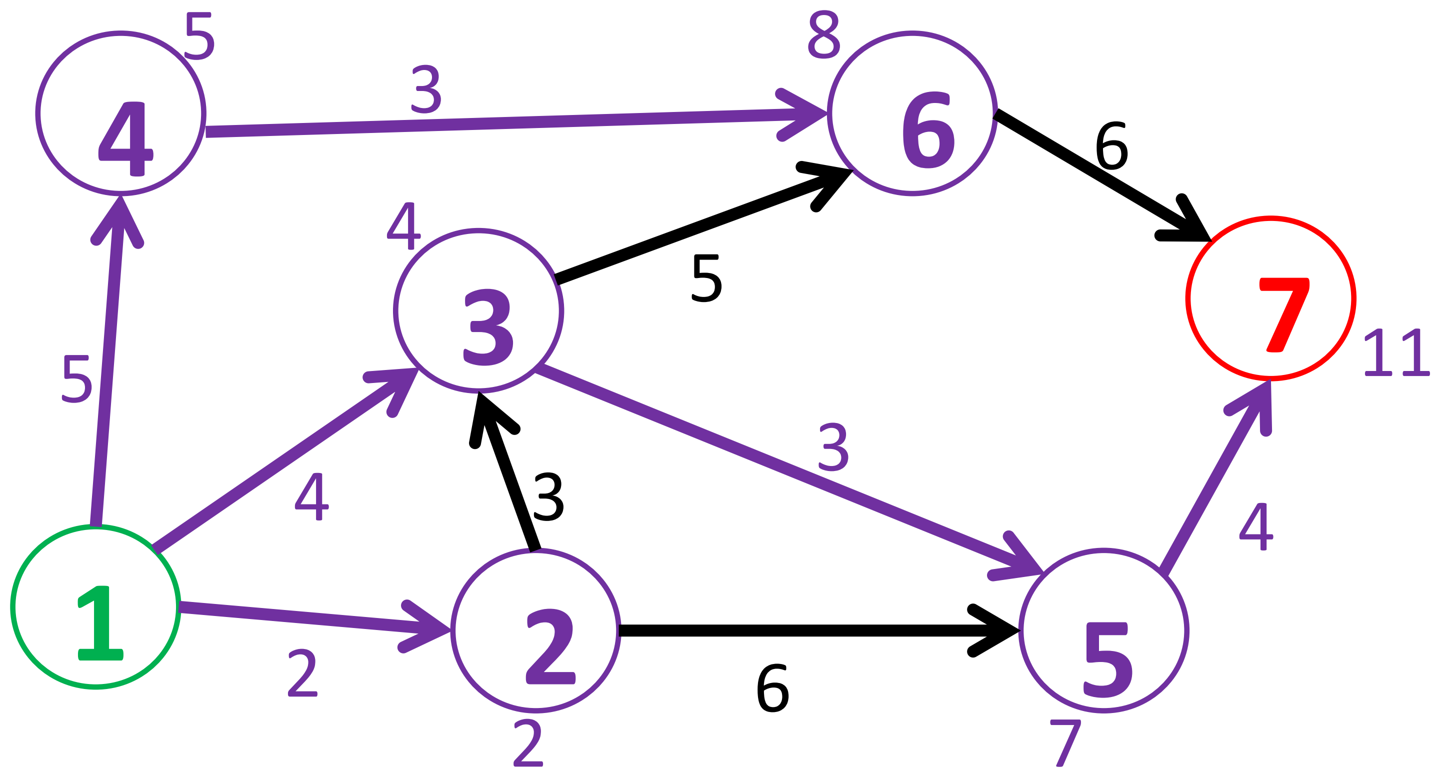
・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



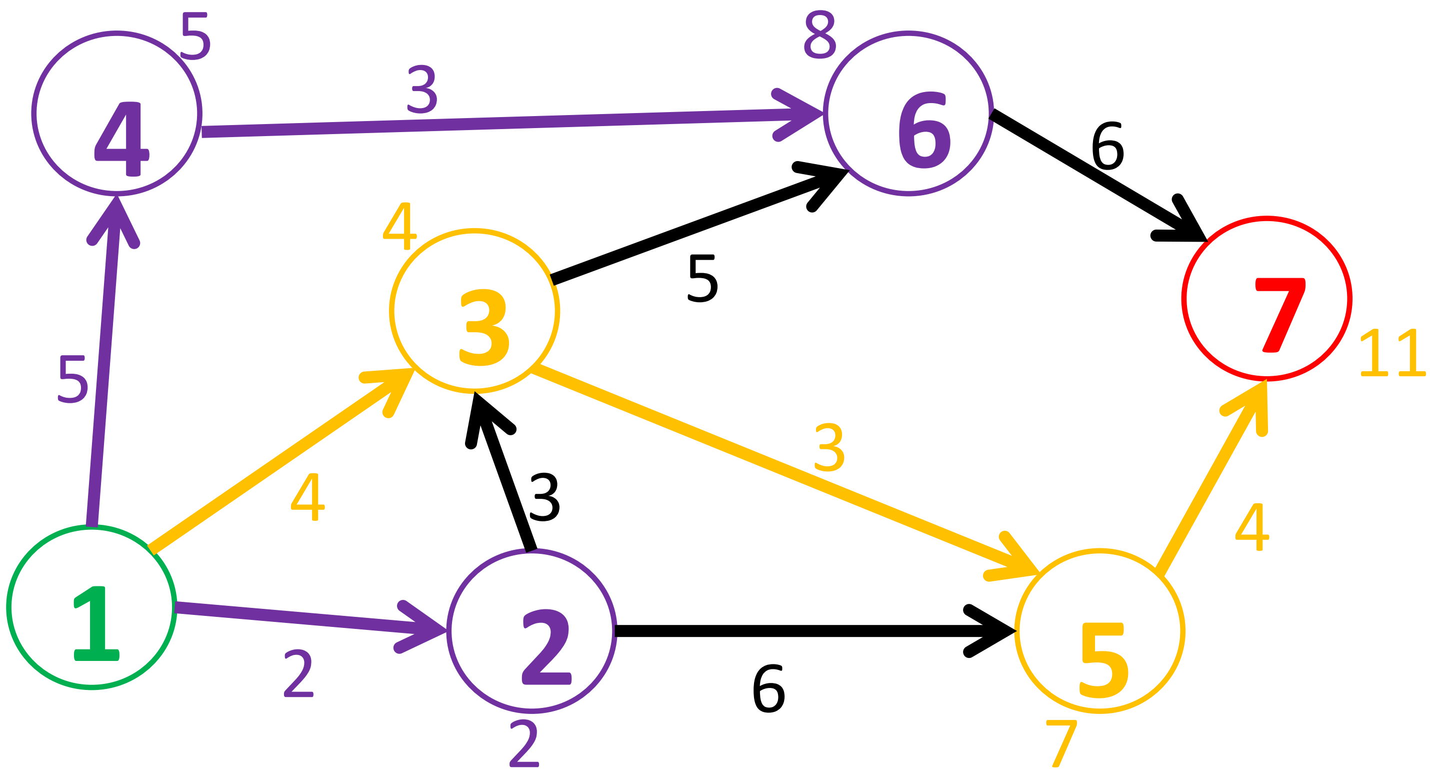
・これを繰り返すと...

最短経路探索モデル-ダイクストラ法



・これを繰り返すと…

最短経路探索モデル-ダイクストラ法

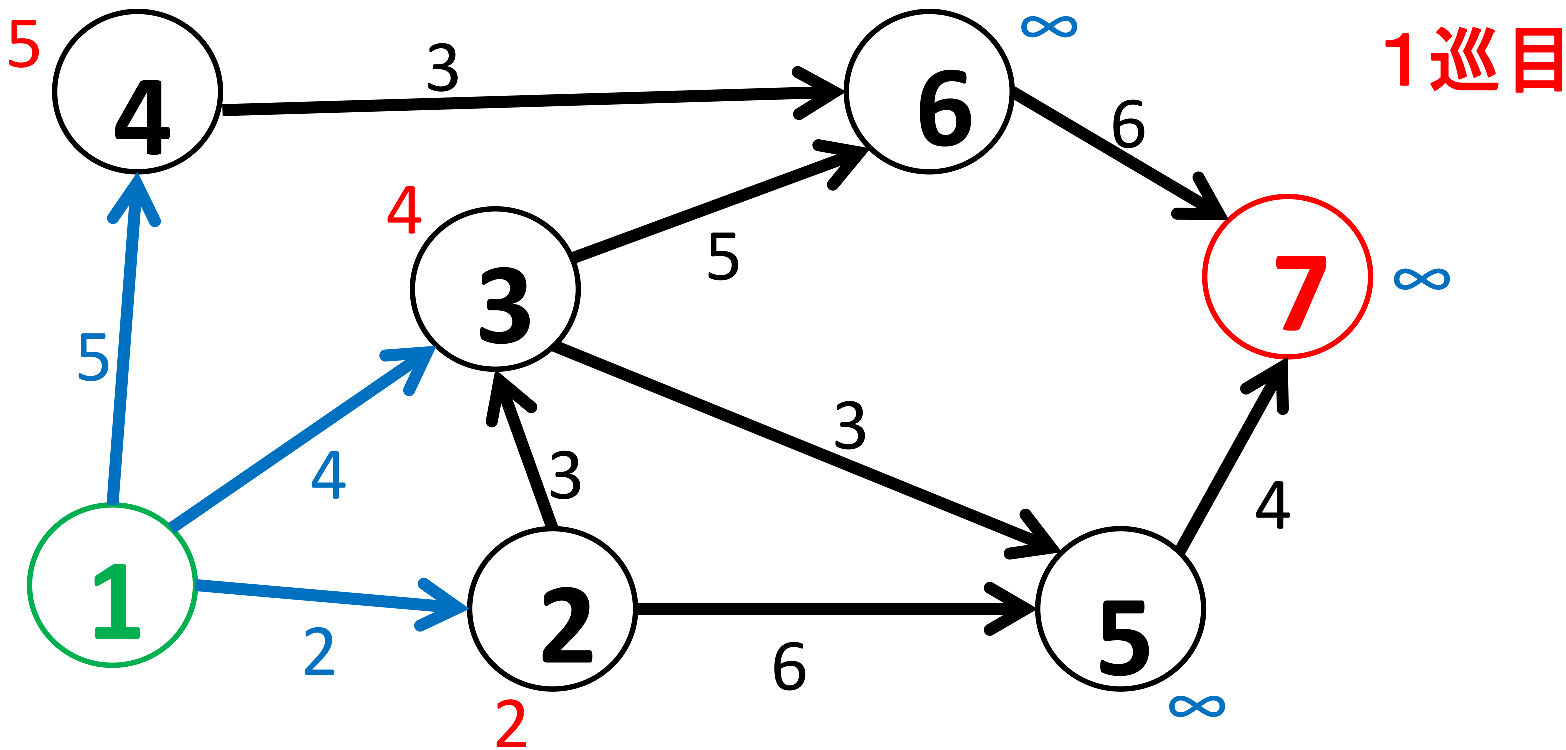


・先行ポインタを辿ることで、最短経路が分かる

最短経路探索モデル-ラベル修正法

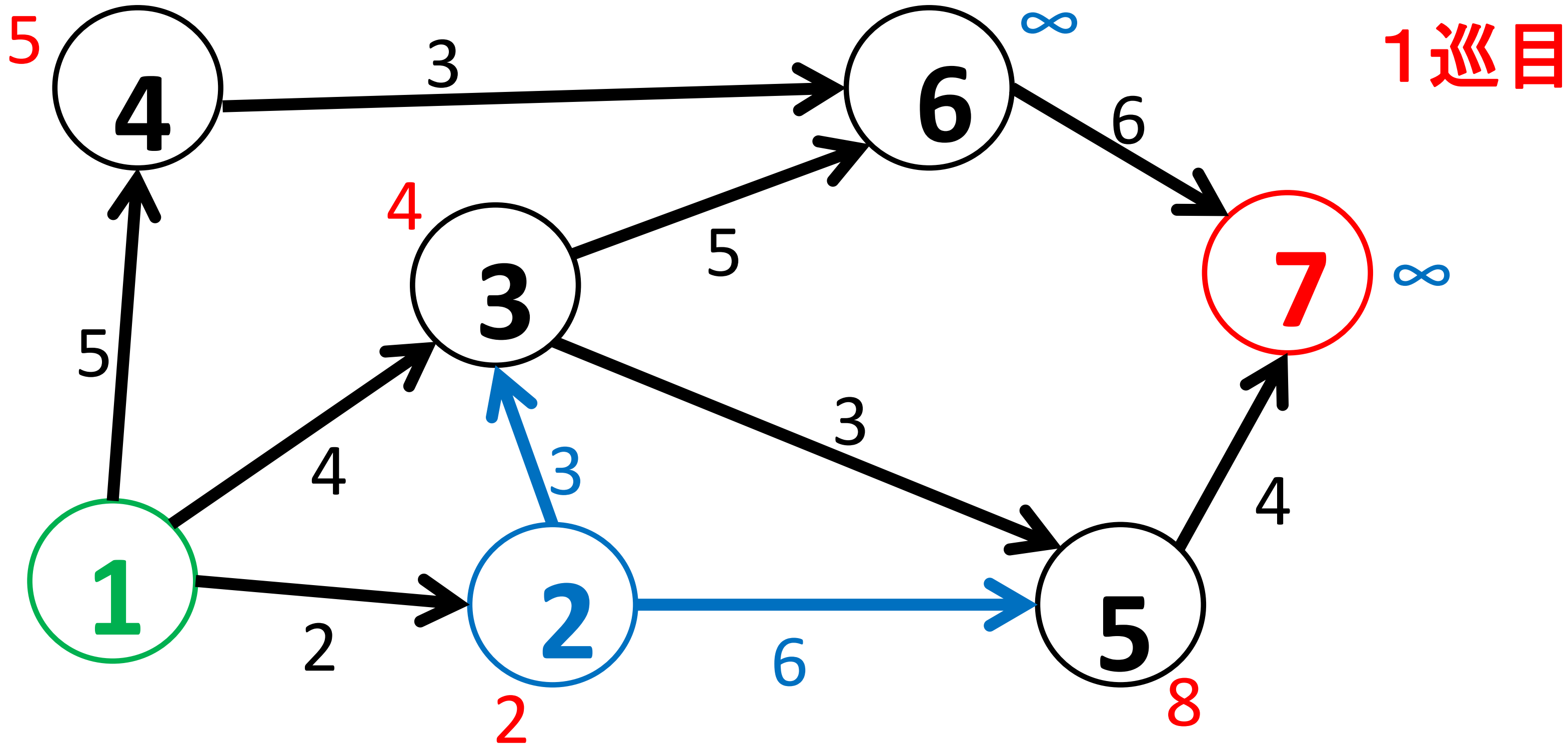
- 経路中に負の値があるときでも使える
- 各ノードから出るすべてのリンクの終点ノードについて、より短い経路が存在するかを検証し、更新していく(最初は＋∞とする)
- 更新がなくなった時点で最短距離が決定する(最短経路の求め方はダイクストラ法と同じ)
  →更新が起こるたびに、そのリンクの始点を先行ポインタとして保存

最短経路探索モデル-ラベル修正法



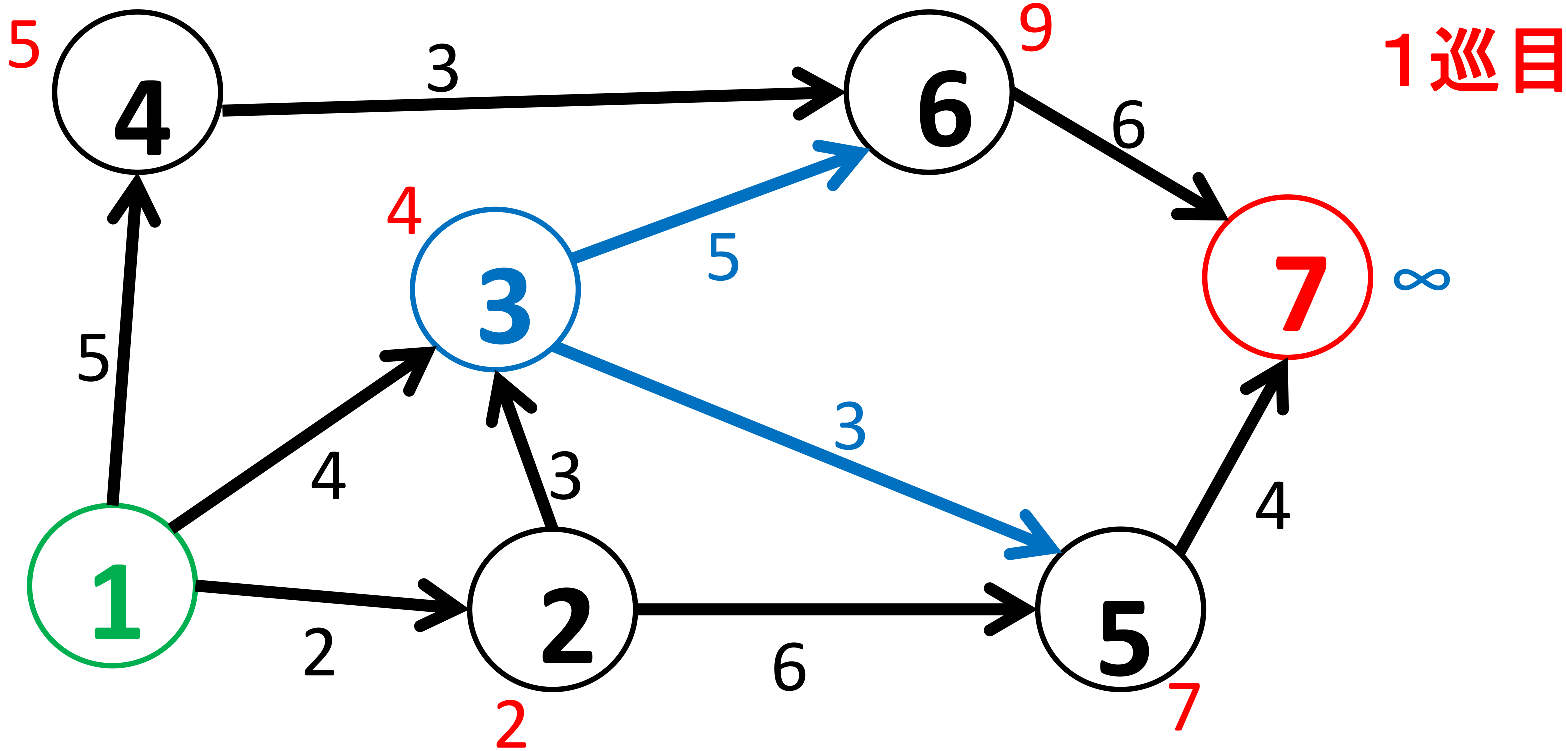
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく(更新が起こった時に赤字で表すことにする)

最短経路探索モデル-ラベル修正法



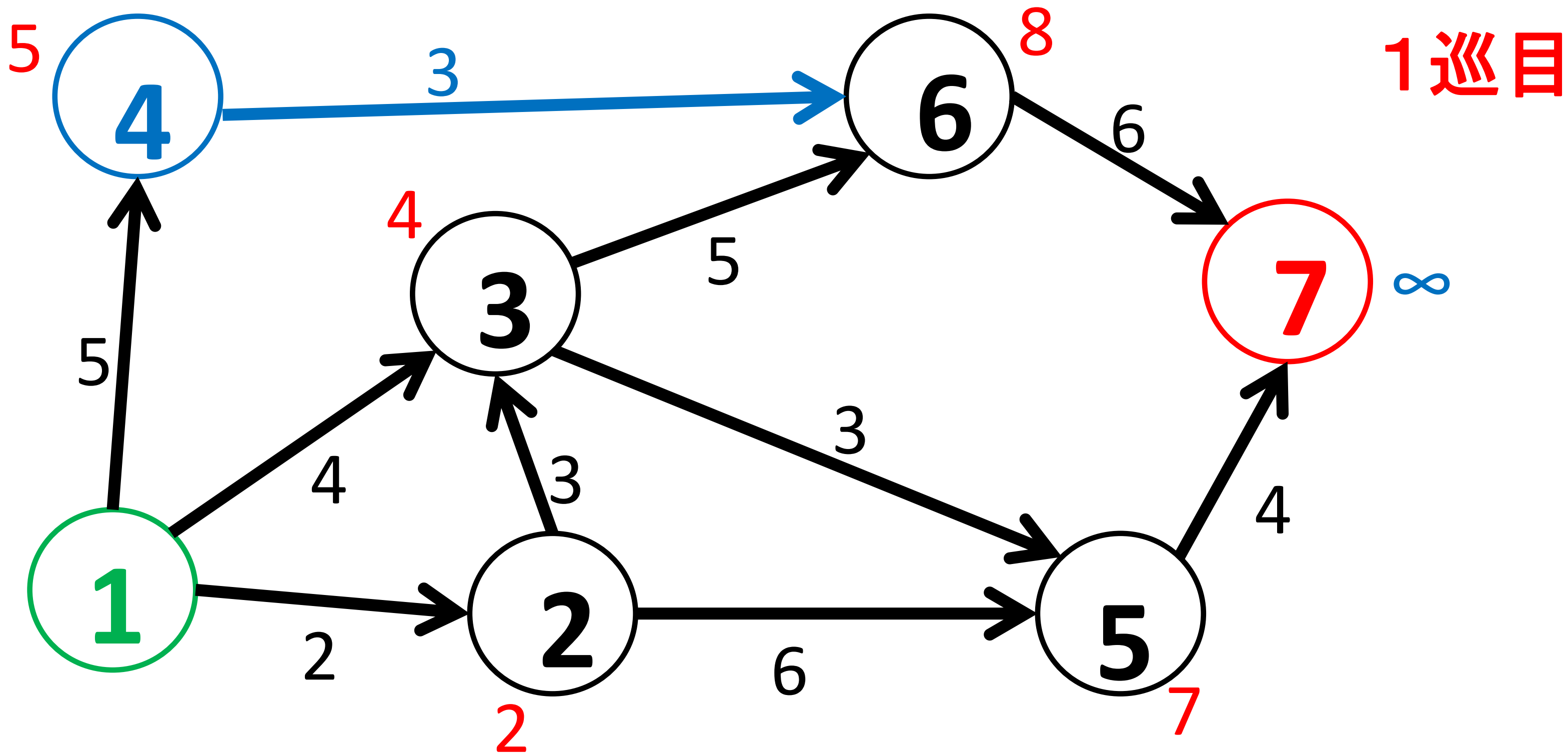
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく(更新が起こった時に赤字で表すことにする)

最短経路探索モデル-ラベル修正法



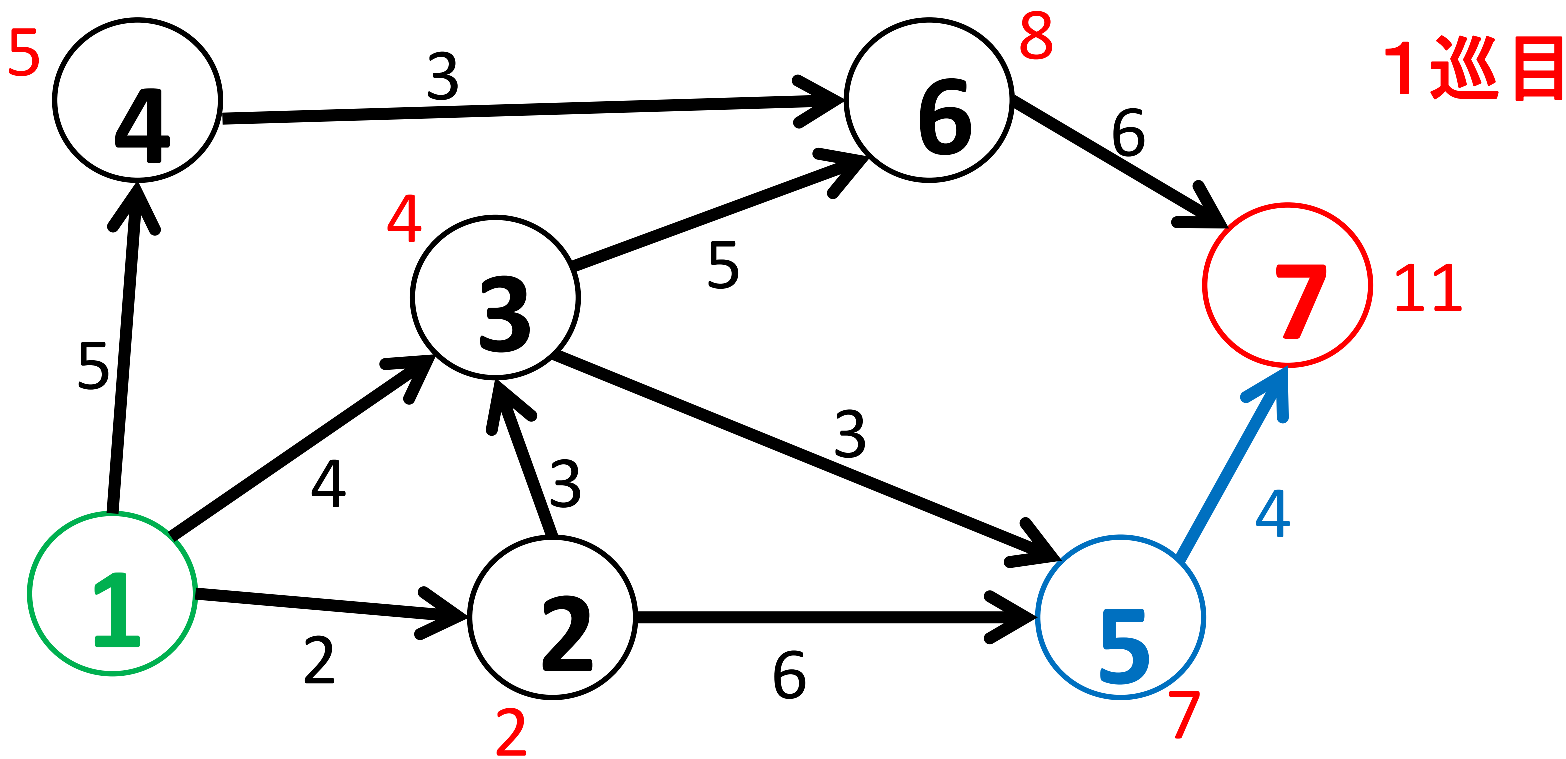
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



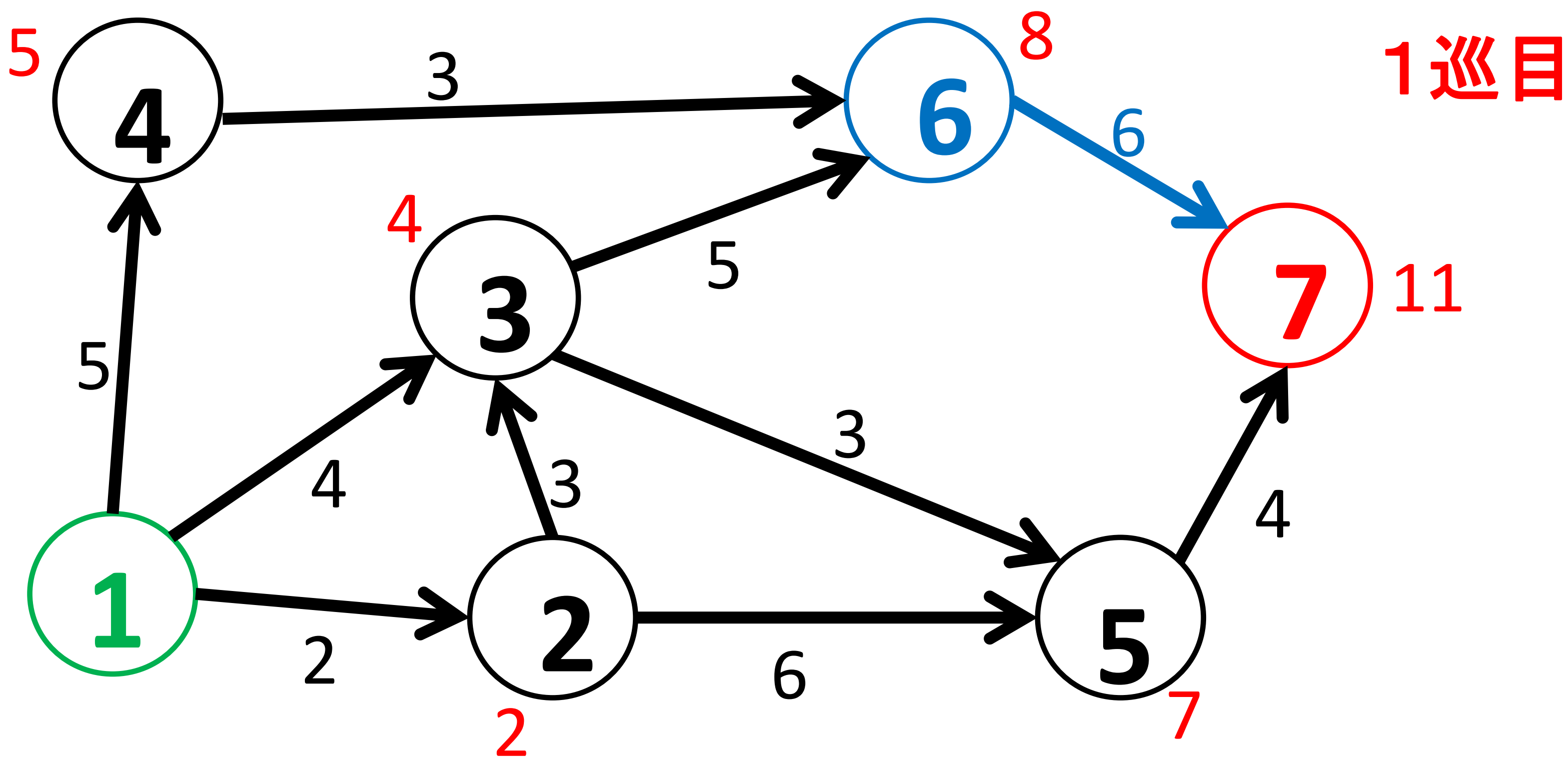
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく(更新が起こった時に赤字で表すことにする)

最短経路探索モデル-ラベル修正法



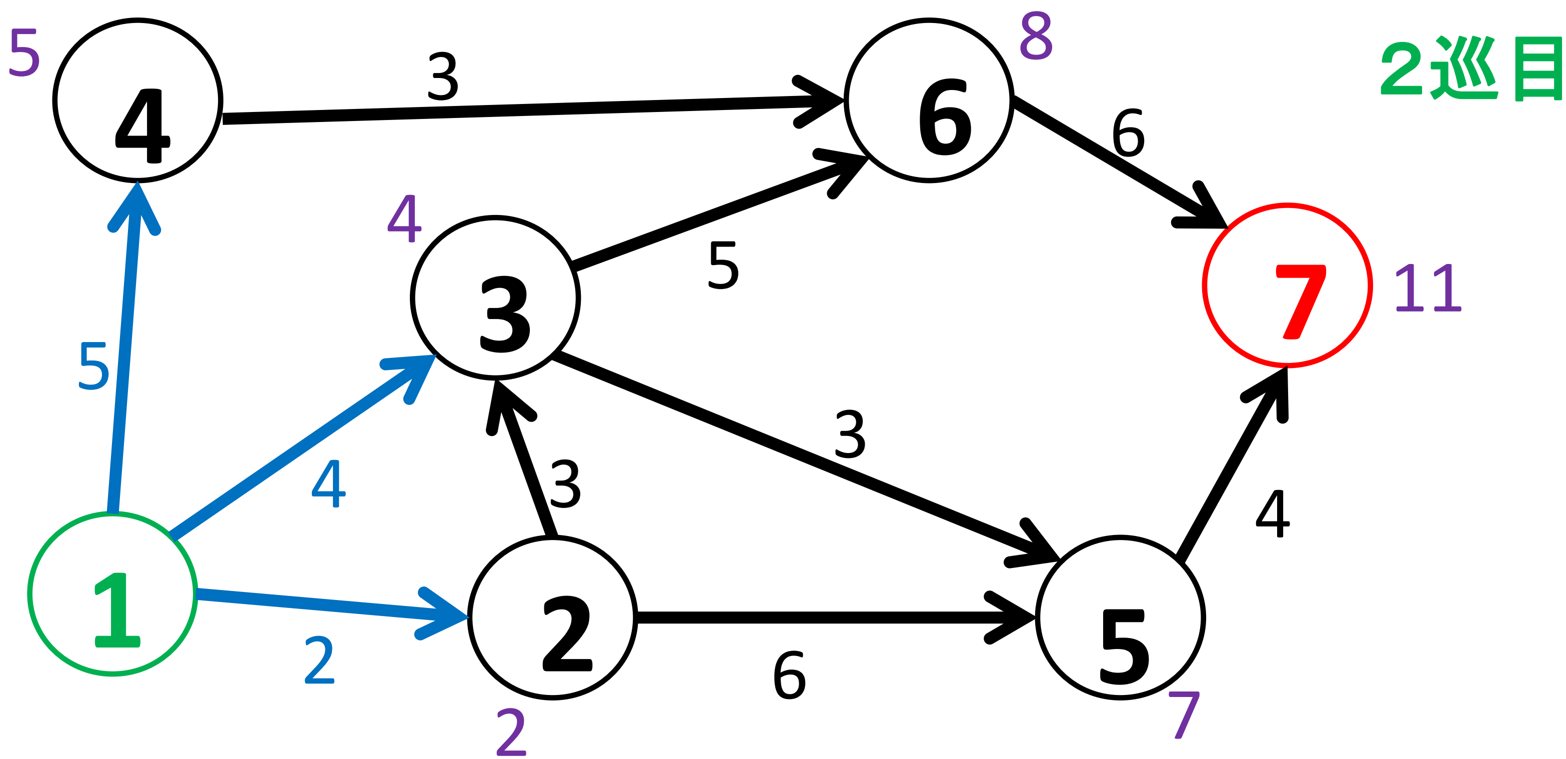
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



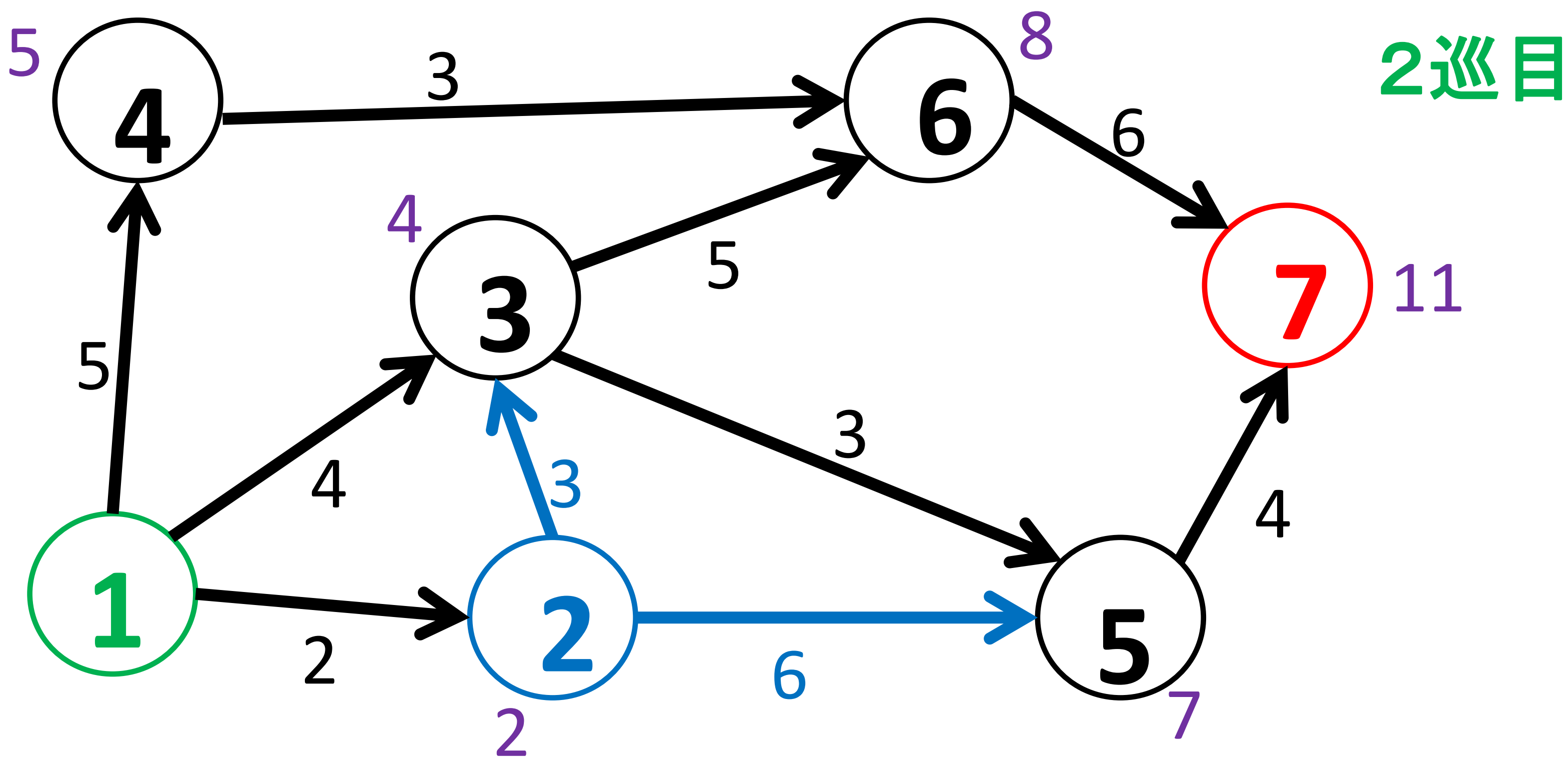
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）←一巡で一回の計算

最短経路探索モデル-ラベル修正法



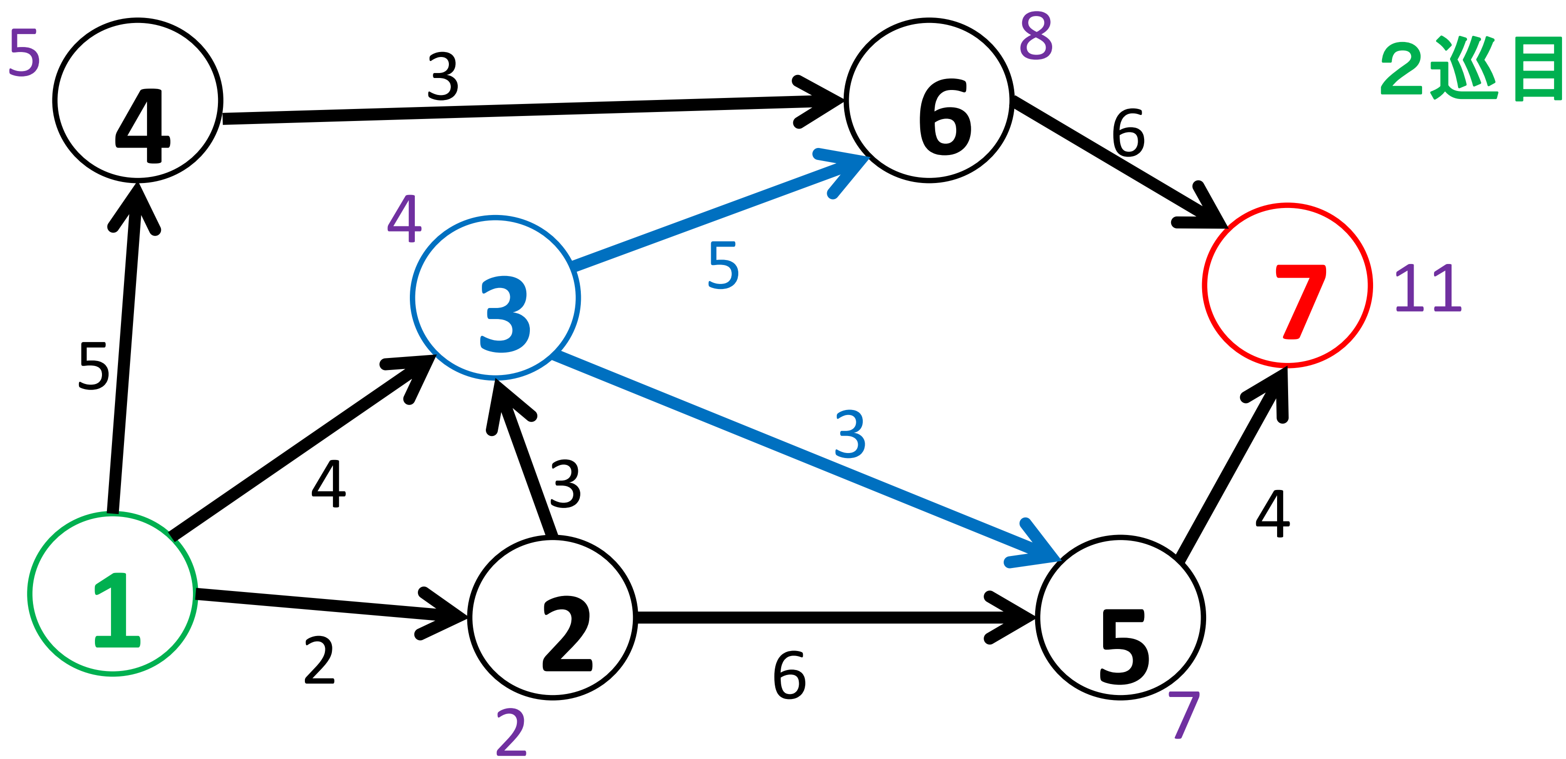
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



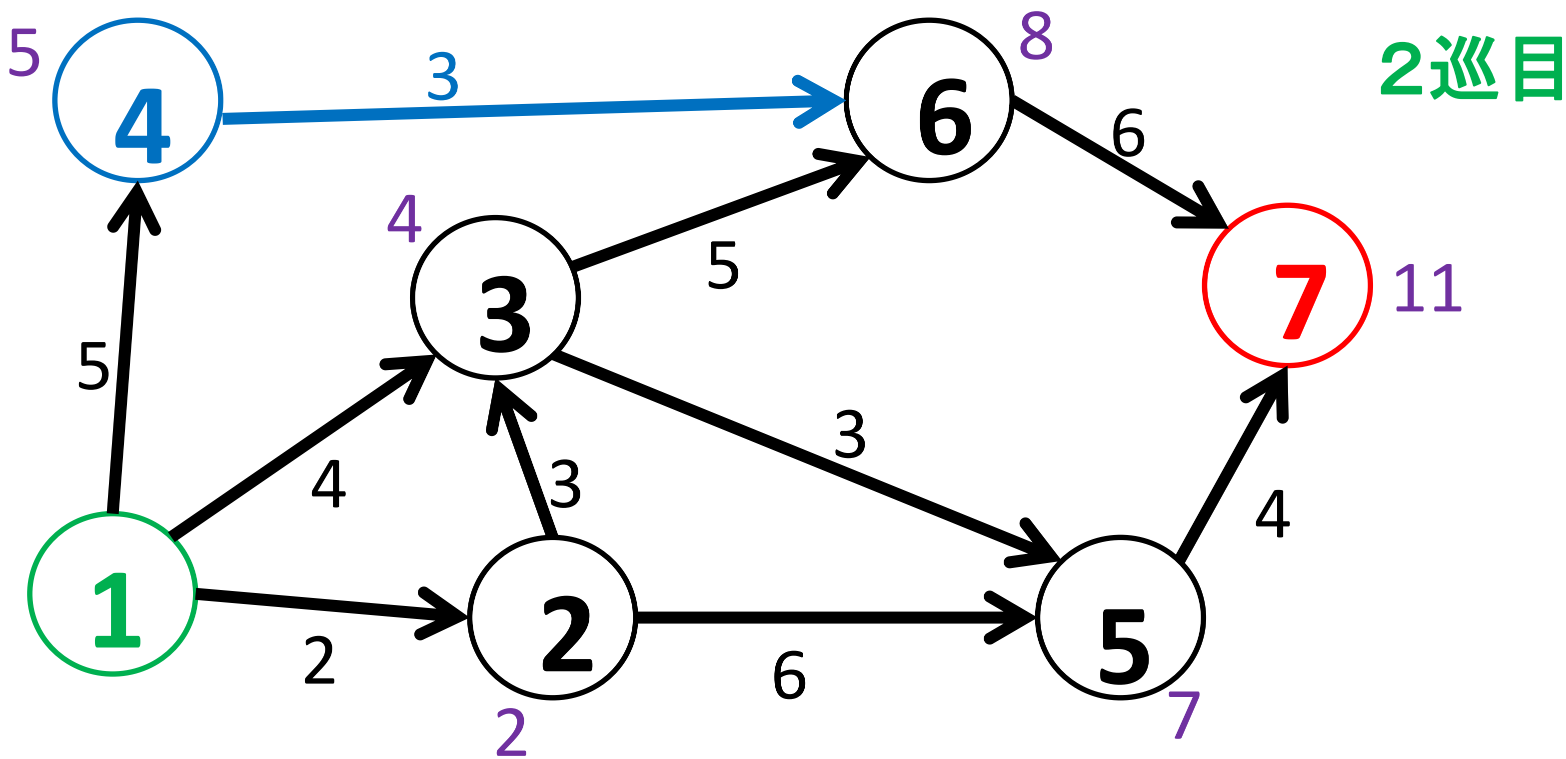
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



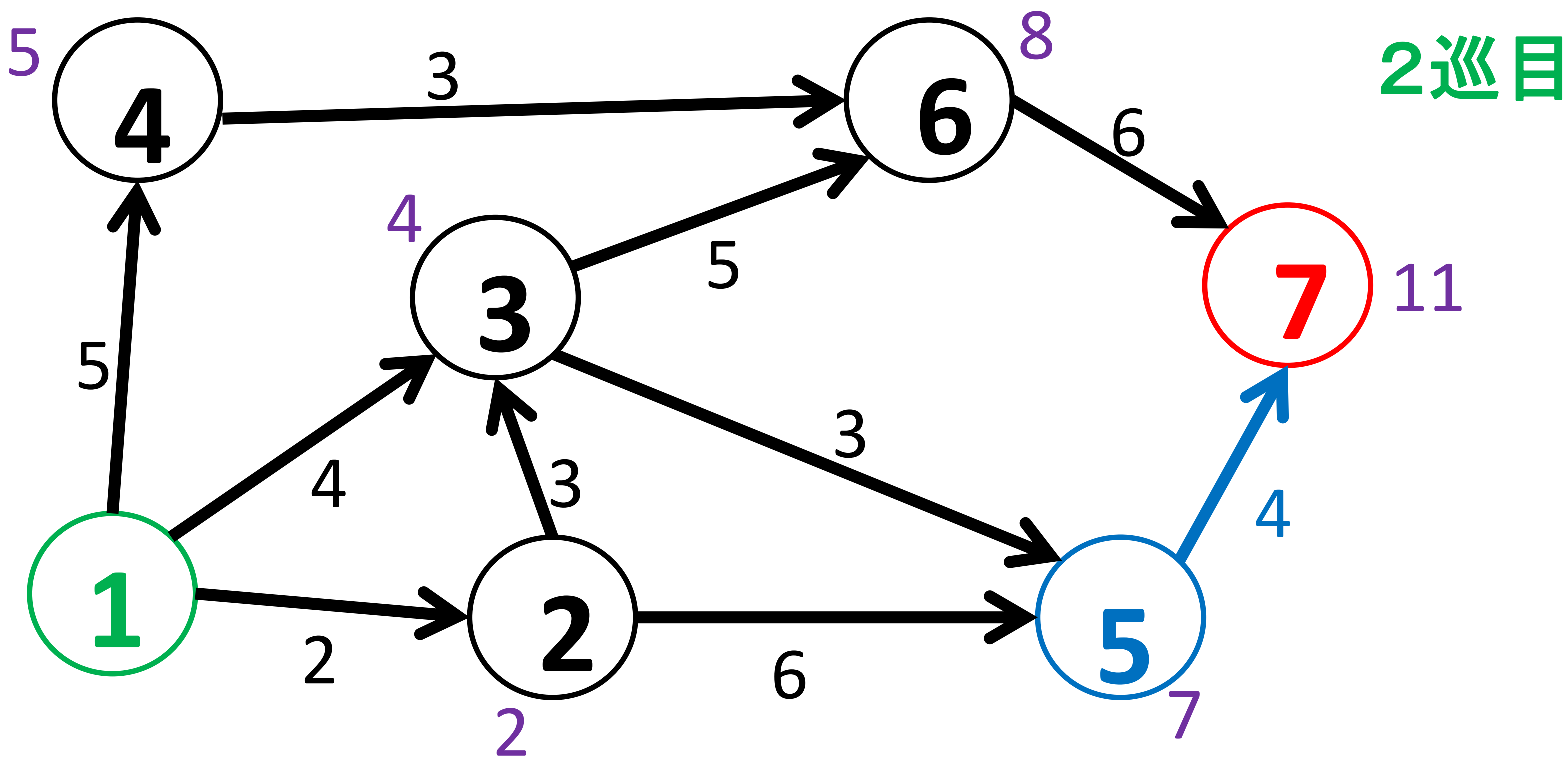
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく(更新が起こった時に赤字で表すことにする)

最短経路探索モデル-ラベル修正法



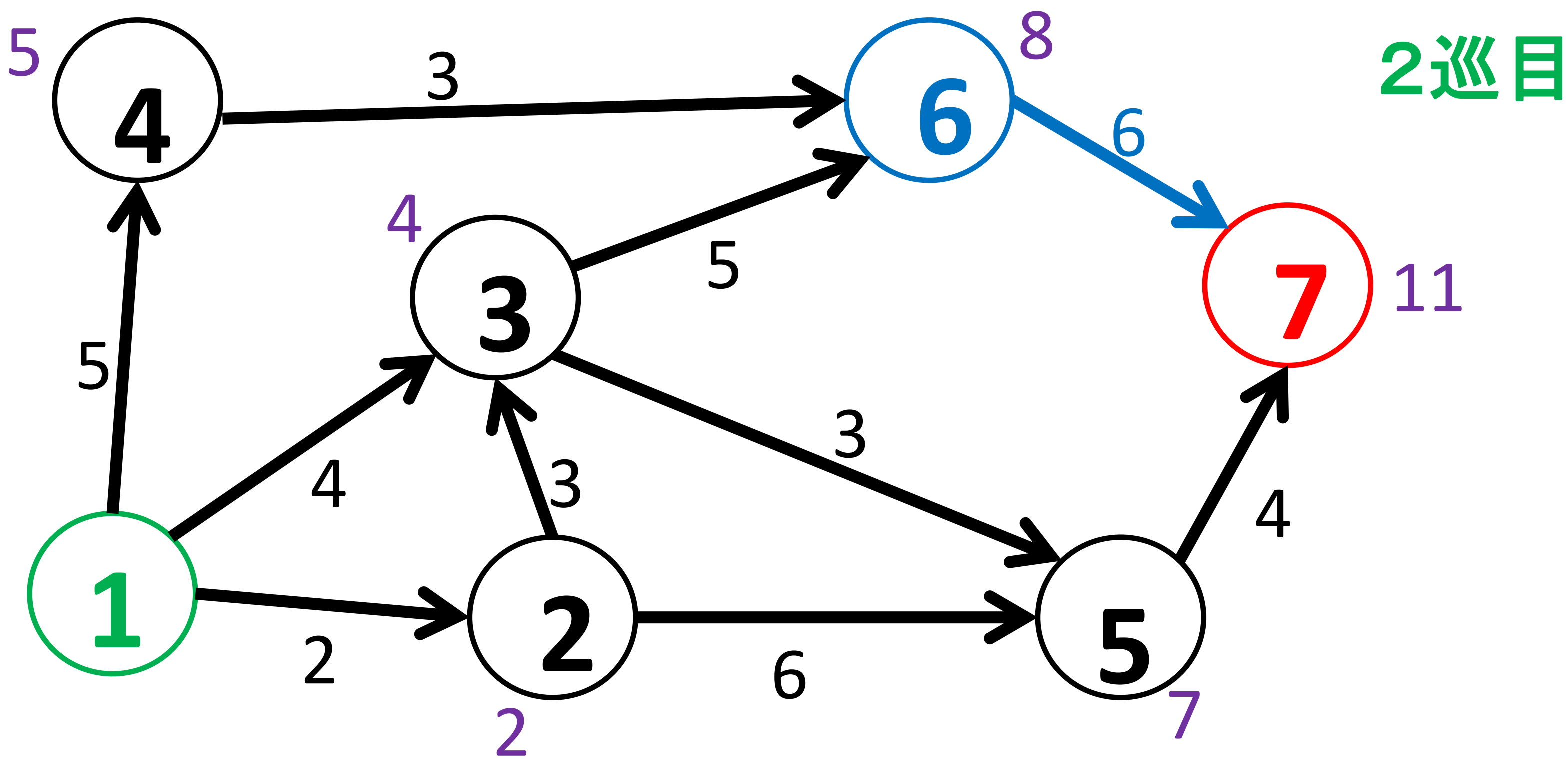
・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法



・①～⑦を始点とするすべてのリンクについての暫定最短距離を順番に求めていく（更新が起こった時に赤字で表すことにする）

最短経路探索モデル-ラベル修正法

- 更新がなくなったので、計算終了

- ⑦の先行ポインタは⑤、⑤の先行ポインタは③、③の先行ポインタは①、というように**後ろから**最短経路が決定していく

利用者均衡モデルの解法

- 利用者均衡状態とは、

  ・ドライバーは、経路に関する情報を完全に得ている

  ・ドライバーは、最短経路を選択する

  という前提のもとで、各ドライバーが行動した結果生じる状態のこと。

- 利用者均衡状態となるような交通量配分方法を、利用者均衡配分と呼ぶ。

↓

四段階推定法における「配分交通量の推定」を行うモデルとして有用である。

利用者均衡モデルの解法

- Wordropの第一原則(利用者均衡)

　起終点間に存在する経路のうち、利用される経路の所要時間は皆等しく、利用されない経路の所要時間よりも小さいか、せいぜい等しい。」

- Wordropの第二原則(システム最適)

　道路ネットワーク上の総旅行時間(交通量×時間)が最小となる。

利用者均衡モデルの解法

目的関数

$$min. Z_p = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_k \sum_{rs} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \quad x_a \geq 0$$

ここで、

a:あるリンク　x_a:リンク*a*での交通量　f_k^{rs}:ODペア*rs*間第*k*経路の経路交通量

$t_a(x)$:リンクaに交通量xが流れる時のリンク所要時間

Q_{rs}:ODペア*rs*間分布交通量

$\delta_{a,k}^{rs}$:= 1　ODペア*rs*間第*k*経路がリンク*a*を含むとき

= 0　そうでないとき

(*r*:起点ノード　*s*:終点ノード)

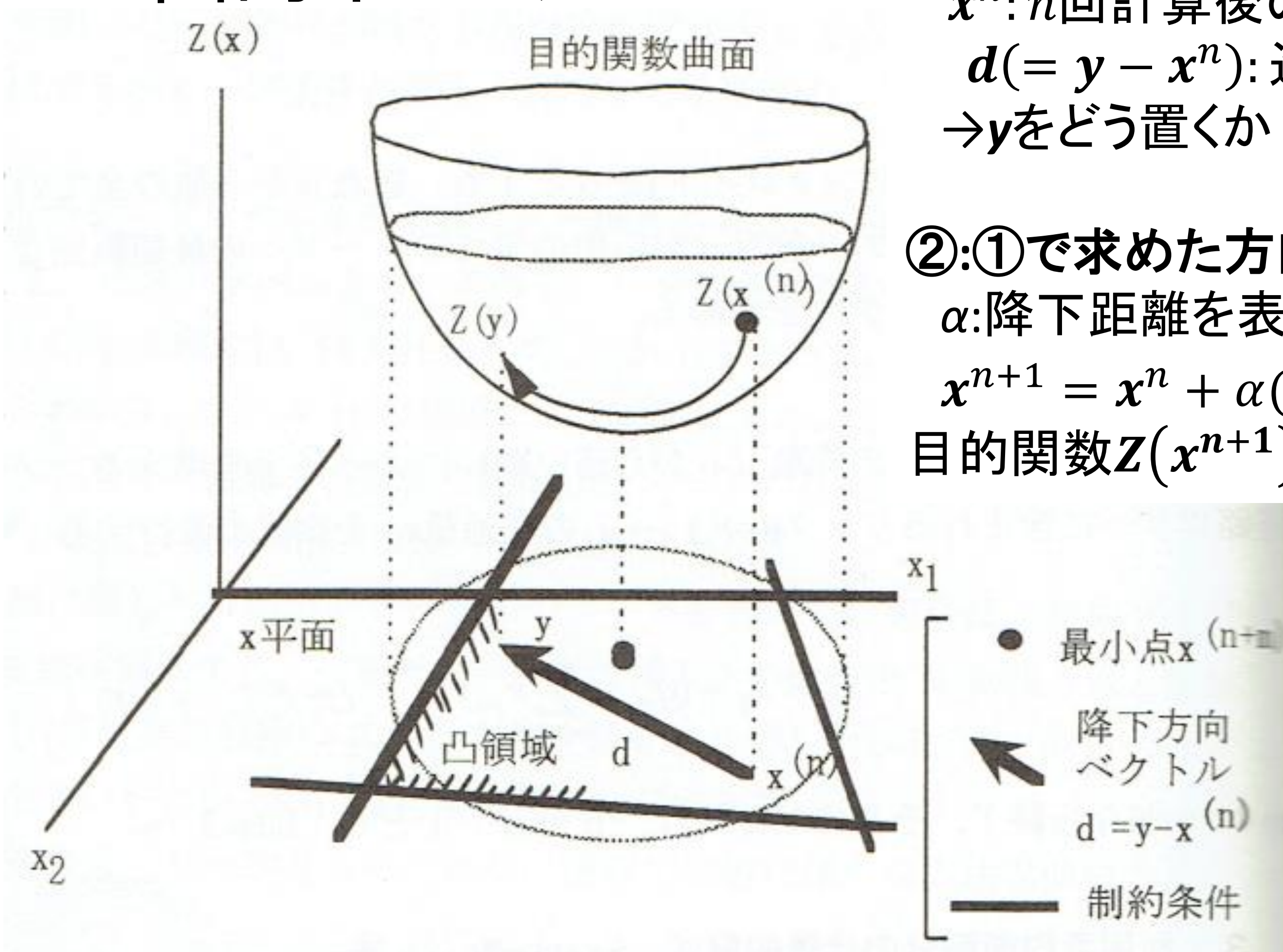
利用者均衡モデルの解法

- 非線形最適化問題の解法
  →変数が少なければKT条件でok
  →しかし、変数の数が膨大となると面倒

- 考えるべきことは2つ
- ①:最適化へ向かう降下方向ベクトルの識別
- ②:①で求めた方向に、どれだけ進むか？

利用者均衡モデルの解法

- 図的イメージ



①:最適化へ向かう方向ベクトルの識別

$\boldsymbol{x}^{n}$: n回計算後のリンク交通量ベクトル

$\boldsymbol{d}(=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^{n})$: 進む降下方向ベクトル

→***y***をどう置くか？

②:①で求めた方向にどれだけ進むか？

α:降下距離を表す1次パラメータ

$\boldsymbol{x}^{n+1}=\boldsymbol{x}^{n}+\alpha(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^{n})$は、

目的関数$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}})$を最小化するようなもの

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- 計算プログラムの作成が非常に簡単で、利用者均衡モデルのアルゴリズムでよく用いられる

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- ①最適化へ向かう方向ベクトルの識別

→計算された$\boldsymbol{x}^n$に対して適切な$\boldsymbol{y}$（補助ベクトル）を探す

　→<u>目的関数を$\boldsymbol{y}$について線形近似する</u>

$$Z_p(\boldsymbol{y}) \approx Z_p(\boldsymbol{x}^n + \boldsymbol{d}) = Z_p(\boldsymbol{x}^n) + \nabla Z_p(\boldsymbol{x}^n)^T \big(\overset{\boldsymbol{d}}{\boxed{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n}}\big)$$

$$= Z_p(\boldsymbol{x}^n) + \sum_{a \in A} (y_a - x_a^n)\, \partial Z_p(\boldsymbol{x}^n) / \partial x_a^n$$

$$= Z_p(\boldsymbol{x}^n) + \sum_{a \in A} (y_a - x_a^n)\, t_a(x_a^n)$$

$$= \underbrace{Z_p(\boldsymbol{x}^n) - \sum_{a \in A} x_a^n\, t_a(x_a^n)}_{\text{定数項（計算可能）}} + \underbrace{\sum_{a \in A} y_a\, t_a(x_a^n)}_{\text{変数項（}y_a\text{未知）}}$$

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- ①最適化へ向かう方向ベクトルの識別

前式より、

$$min.\, Z_p(\boldsymbol{y}) = \sum_{a \in A} y_a\, t_a(x_a^n)$$

Subject to

$$\sum_k f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega \qquad\qquad y_a = \sum_k \sum_{rs} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \quad \forall a \in A$$

という補助問題を得る。

ここで上式は、$\{t_a(x_a^n)\}$の元で総走行時間を最小にする$\boldsymbol{y}$を求めることである。$\{t_a(x_a^n)\}$は定数であることから、$\{t_a(x_a^n)\}$のリンク所要時間で求められる最短経路に全てのOD交通量を流すというall-or-nothing配分をすれば、$Z_p(\boldsymbol{y})$を最小にするような$\boldsymbol{y}$が得られる。

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- ①最適化へ向かう方向ベクトルの識別

  さらに…

  $Z_p(\boldsymbol{y}) \approx Z_p(\boldsymbol{x}^n) + \nabla Z_p(\boldsymbol{x}^n)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n)$ が最小

  → $\nabla Z_p(\boldsymbol{x}^n)^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n)$ が最も小さい負の値を与える

  →$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n$ は目的関数Z_pの点$\boldsymbol{x}^n$におけるもっとも急な下り勾配に沿った方向ベクトルである

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n$を最小化へ向かう降下方向ベクトルとして利用

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- ②:①で求めた方向に、どれだけ進むか？

降下方向ベクトルが与えられた後は、

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^n)$$
$$(\boldsymbol{x}^{n+1} = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^n)$$
$$(0 \leq \alpha \leq 1)$$

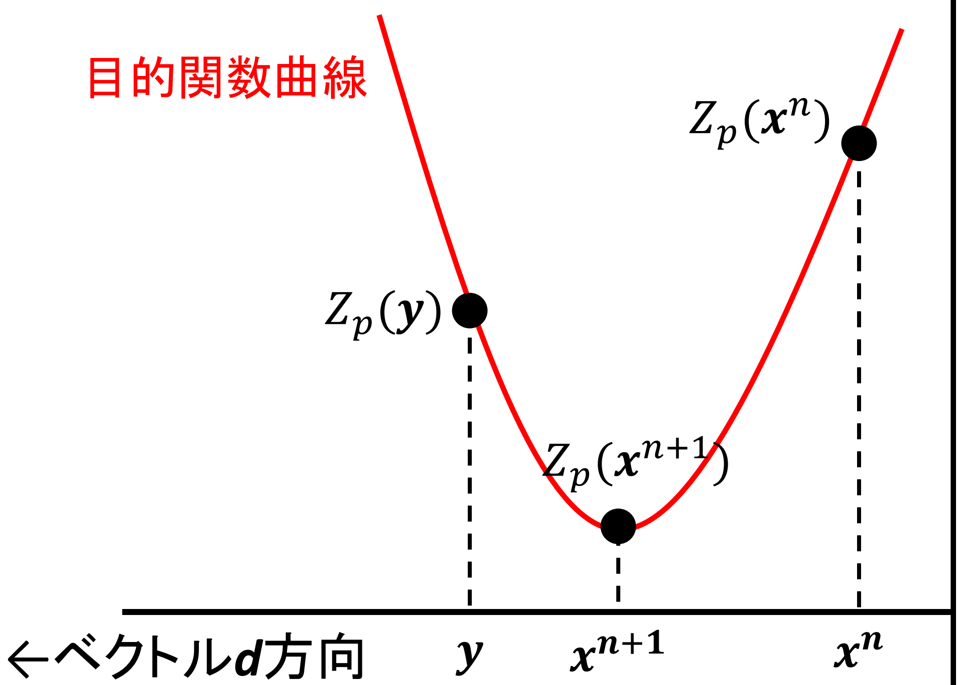
なる$\boldsymbol{x}^{n+1}$を目的関数Z_pに代入し、αによる一次元最適化を行うことによって、次の試行点$\boldsymbol{x}^{n+1}$を求める。その点に対しても新たな***y'***、***d'***が求まり…という作業を、収束判定を満たすまで繰り返し行う。

(n=1では、$t_a(0)$の状態でのall-or-nothing配分を$\boldsymbol{x}^1$とする)

利用者均衡モデルの解法-Frank-Wolfe法

- ②:①で求めた方向に、どれだけ進むか？

図的イメージ



上図は目的関数の***d***方向断面

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^n$$

$\boldsymbol{x}^{n+1}$は、２点$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{x}^n$を$(1-\alpha):\alpha$に内分する点である。左図から、目的関数の***d***方向断面においては、αおよび$min.Z_p(\boldsymbol{x}^{n+1})$は一意に定まる。

しかし、これは***d***方向断面における目的関数の最小化には成功しているが、もともとの目的関数の最小化を行っているわけではない。そのため、こうして求まったx^{n+1}に対して、新たに降下方向ベクトルを考える必要がある。

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 今まで考えてきたのは、交通量に関しての需要固定型の最適化問題であるが、例えば渋滞の時に、多少時間がかかっても他の交通手段を使用することがある。

  →需要が変動する場合はどうなるだろうか？

- 以下のような需要関数を作る

$$q_{rs} = D_{rs}(u_{rs}) \qquad \forall r, s$$

q_{rs}: ODペアrs間の経路交通量　u_{rs}: ODペアrs間を通る所要時間

$D_{rs}(\cdot)$: ODペアrs間の需要関数

「rs間を通るのにu_{rs}だけの時間がかかるならば、人々はrs間に交通量q_{rs}が流れるところまでは我慢できる」というニュアンス

<u>基本的には単調減少関数ととらえることができる</u>

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定

$$min. z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

subject to

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

$$q_{rs} \geq 0 \qquad \forall r,s$$

$u_{rs} = D_{rs}^{-1}(q_{rs})$:逆需要関数（需要関数の逆関数）

「*rs*間にある交通量q_{rs}が流れている時、人々はそこを通るのにかかる時間がu_{rs}までなら我慢できる」というニュアンス

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-解の唯一性

$$min.\, z(x,q) = \underbrace{\sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)d\omega}_{\text{狭義に凸関数 下に凸な関数}} - \underbrace{\sum_{rs} \int_{0}^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega}_{\text{狭義に凹関数 上に凸な関数}}$$

狭義に凸関数

→最小値が唯一定まる

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-ラグランジュ関数の定義

$$min.\, z(x,q) = \underbrace{\sum_{a} \int_{0}^{x_a} t_a(\omega)d\omega}_{z_1[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})]} - \underbrace{\sum_{rs} \int_{0}^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega}_{z_2(\boldsymbol{q})}$$

$$\sum_{k} f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall r,s$$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}) = z_1[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})] - z_2(\boldsymbol{q}) + \sum_{rs} u_{rs}(q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs})$$

$\boldsymbol{u} = \{\ldots, u_{rs}, \ldots\}$はラグランジュの未定乗数

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-KT条件の利用

$f_k^{rs} \geq 0, q_{rs} \geq 0$という特殊な制約条件化において、1次のKT条件は、以下のように表される。

$$f_k^{rs} \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})}{\partial f_k^{rs}} = 0 \qquad and \qquad \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$q_{rs} \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})}{\partial q_{rs}} = 0 \qquad and \qquad \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})}{\partial q_{rs}} \geq 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})}{\partial u_{rs}} = 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s$$

$$q_{rs} \geq 0 \qquad \forall r, s$$

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-偏微分の計算

実際に$\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial f_l^{mn}}$、$\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial q_{mn}}$は以下のように計算される

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial f_l^{mn}} &= \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}}\left\{z_1[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})] - \cancel{z_2(\boldsymbol{q})} + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right)\right\} \\
&= c_l^{mn} - u_{mn}
\end{aligned}
$$

c_l^{mn}: ODペアmnの第l番目の経路を通るのにかかる旅行時間

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial q_{mn}} &= \frac{\partial}{\partial q_{mn}}\left\{\cancel{z_1[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})]} - z_2(\boldsymbol{q}) + \sum_{rs} u_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right)\right\} \\
&= -D_{mn}^{-1}(q_{mn}) + u_{mn}
\end{aligned}
$$

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-KT条件の利用(数値代入)

以上より、1次のKT条件は具体的に次のように書くことができる。

$$f_k^{rs}\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad and \quad \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad and \quad (c_k^{rs} - u_{rs}) \geq 0}$$

$$q_{rs}\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial q_{rs}} = 0 \quad and \quad \frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial q_{rs}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{rs}\{-D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + u_{rs}\} = 0 \quad and \quad -D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + u_{rs} \geq 0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})}{\partial u_{rs}} = 0 \Rightarrow \boxed{q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} = 0}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s \qquad\qquad q_{rs} \geq 0 \quad \forall r, s$$

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-ちなみに…

$$\boxed{f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad and \quad (c_k^{rs} - u_{rs}) \geq 0}$$

- 上の式は、1次のKT条件の一つを抜き出したもの
- 上の式を言葉で説明すると、

「交通量f_k^{rs}が0でない(存在する)ところでは、$c_k^{rs} = u_{rs}$となるが、
交通量f_k^{rs}が0のところでは、$c_k^{rs} \geq u_{rs}$となる。」

<u>u_{rs}を最短経路時間とすると、見事にwordropの第一原則と一致!!</u>

→上のKT条件は変動需要に関する項を持たないため、需要固定型の利用者均衡モデルにおける条件が出てくる。

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 問題の設定-さらに…

$$q_{rs}\{-D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + u_{rs}\} = 0 \quad and \quad -D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + u_{rs} \geq 0$$

- 前のスライドから、u_{rs}が最短経路時間であることが分かった
- $q_{rs} \neq 0$の時、$-D_{rs}^{-1}(q_{rs}) + u_{rs} = 0$、すなわち$q_{rs} = D_{rs}(u_{rs})$より、需要関数から$q_{rs}$を求めることができる。
- $q_{rs} = 0$の時、$-D_{rs}^{-1}(0) + u_{rs} \geq 0$、すなわち$u_{rs} \geq D_{rs}^{-1}(0)$
- 「交通量0でも誰も我慢できないほど長い旅行時間($D_{rs}^{-1}(0)$)よりも、さらに長い旅行時間u_{rs}を持つようなODペア区間rs」

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム

$$min.\, z(x,q) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}} D_{rs}^{-1}(\omega)d\omega$$

subject to

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k,r,s$$

$$q_{rs} \geq 0 \qquad \forall r,s$$

$$\boxed{q_{rs} \leq \overline{q_{rs}} \qquad \forall r,s}$$

q_{rs}の値が大きすぎると、何度計算を行っても一向に解が求まらない
→あらかじめq_{rs}の上限を設定しておく必要がある

を解けばよかった。解の唯一性は示されているから、

先述のFrank-Wolfe法と同じように計算しいけば、解が求まるはず

利用者均衡モデルの解法
-需要変動下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-変数の抽出

$$x_a = x_a(\boldsymbol{f}) = \sum_k \sum_{rs} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a$$

$$q_{rs} = q_{rs}(\boldsymbol{f^{rs}}) = \sum_k f_k^{rs} \qquad \forall r, s$$

x_aもq_{rs}も$\boldsymbol{f}$の関数であるから、目的関数zも$\boldsymbol{f}$の関数であり、結局、

$$min.\, z(\boldsymbol{f}) = \sum_a \int_0^{x_a(\boldsymbol{f})} t_a(\omega) d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}(\boldsymbol{f^{rs}})} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s$$

$$\sum_k f_k^{rs} \leq \overline{q_{rs}} \qquad \forall r, s$$

を解けばよいことになる。

利用者均衡モデルの解法

-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-①:最適化へ向かうベクトルの識別

需要固定型では$\boldsymbol{y}$と置いていた補助ベクトルを、需要変動下では$\boldsymbol{g}$と置くことにする。そして$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}$とすれば、線形近似により、

$$
\begin{aligned}
min.\, z\,(\boldsymbol{g}) &\approx z(\boldsymbol{f}^n + \boldsymbol{d}) = z(\boldsymbol{f}^n) + \nabla z(\boldsymbol{f}^n)^T(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}^n) \\
&= z(\boldsymbol{f}^n) + \sum_{rs} \sum_k (g_k^{rs} - f_k^{rs})\, \partial z(\boldsymbol{f}^n)/\partial f_k^{rs} \\
&= \underbrace{z(\boldsymbol{f}^n) - \sum_{rs} \sum_k \frac{\partial z(\boldsymbol{f}^n)}{\partial f_k^{rs}} f_k^{rs}}_{\text{定数項(計算可能)}} + \underbrace{\sum_{rs} \sum_k \frac{\partial z(\boldsymbol{f}^n)}{\partial f_k^{rs}} g_k^{rs}}_{\text{変数項(}g_k^{rs}\text{未知)}}
\end{aligned}
$$

$$
min.\, z(\boldsymbol{g}) = \sum_{rs} \sum_k \frac{\partial z(\boldsymbol{f}^n)}{\partial f_k^{rs}} g_k^{rs}
$$

注)需要固定型では補助ベクトル $\boldsymbol{y}$ はリンクのベクトルであるが、
変動需要下では補助ベクトル$\boldsymbol{g}$は経路のベクトルである。

利用者均衡モデルの解法

-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-①:最適化へ向かうベクトルの識別

ここで、$\frac{\partial z(\boldsymbol{f}^n)}{\partial f_l^{mn}}$は、以下のように計算される。

$$\frac{\partial z(\boldsymbol{f}^n)}{\partial f_l^{mn}} = \frac{\partial}{\partial f_l^{mn}} \left\{ \sum_a \int_0^{x_a(\boldsymbol{f})} t_a(\omega) d\omega - \sum_{rs} \int_0^{q_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega \right\}$$

$$= c_l^{mn}(\boldsymbol{f}^n) - D_{mn}^{-1}(\boldsymbol{f}^n)$$

$c_l^{mn}(\boldsymbol{f}^n)$:$\boldsymbol{f}^n$を配分した時の、ODペア*mn*中の第*l*番目の経路を通るのに要する旅行時間

これらより、以下のような補助問題を得る。

$$min.\, z(\boldsymbol{g}) = \sum_{rs} \sum_k \left[c_k^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) \right] g_k^{rs}$$

Subject to

$$g_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k, r, s$$

$$\sum_k g_k^{rs} \leq \overline{q_{rs}} \qquad \forall r, s$$

利用者均衡モデルの解法

-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-①:最適化へ向かうベクトルの識別
- 今、$c_k^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)$は定数であり、かつ制約条件は各ODペアに関して独立であることを示している。よって、特にODペア*rs*に関して

$$min.\, z^{rs}(\boldsymbol{g}^{rs}) = \sum_k \left[c_k^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)\right] g_k^{rs}$$

subject to

$$g_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k$$

$$\sum_k g_k^{rs} \leq \overline{q_{rs}}$$

のようになる。

→各ODペアは独立であるので、先の補助問題は、あるひとつのODペアを抜き出し、その経路について最小化を行う、という作業を行えばよい。

利用者均衡モデルの解法

-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-①:最適化へ向かうベクトルの識別
- この補助問題を解くルールは、以下のようである。

定数$\left[c_k^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)\right]$を最小にするような$k = m$について、

If $c_m^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) < 0,\ set\ g_m^{rs^n} = \overline{q_{rs}}\quad and\quad g_k^{rs^n} = 0 \qquad \forall k \neq m$

If $c_m^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) > 0,\ set\ g_k^{rs^n} = 0 \qquad \forall k$

- $c_m^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)$の正負は、<u>勾配の方向を表している。</u>
- 仮にrs間の全ての経路において$c_m^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n) > 0$の時（下式）、<u>これ以上降下する方向ベクトルは存在しない</u>。
- $c_m^{rs^n} - D_{rs}^{-1}(q_{rs}^n)$が負に最小値を持つとき、そこに全交通量を配分

　→all-or-nothing配分と言える。

　こうして、ODペアrs間経路における補助ベクトル$\boldsymbol{g}^{rs}$が決定

利用者均衡モデルの解法
-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-①:最適化へ向かうベクトルの識別
- 得られた補助ベクトル$\boldsymbol{g}^{rs}$を、リンクベクトル$\boldsymbol{y}$、経路ベクトル$\boldsymbol{v}$に割り当てる

$$y_a^n = \sum_k \sum_{rs} \delta_{a,k}^{rs} g_k^{rs^n} \qquad \forall a$$

$$v_{rs}^n = \sum_k g_k^{rs^n} \qquad \forall r, s$$

リンクベクトル方向では$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{x}^n$
経路ベクトル方向では$\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{q}^n$
が、最急勾配なベクトルである。

利用者均衡モデルの解法
-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-②:①で求めた方向にどれだけ進むか

- 需要固定型と同様にして、$z(\boldsymbol{f}^{n+1}) = z(\boldsymbol{f}^{n} + \boldsymbol{\alpha d})$が最小となるようなαを、一次元探索によって求める。先に求めた$\boldsymbol{y}^{n}, \boldsymbol{v}^{n}$を用いて、

$$min. z(f^{n+1}) = z(\alpha) = \sum_{a} \int_{0}^{x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)} t_a(\omega) d\omega - \sum_{rs} \int_{0}^{q_{rs}^n + \alpha(v_{rs}^n - q_{rs}^n)} D_{rs}^{-1}(\omega) d\omega$$

subject to

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

この結果得られた$\alpha = \alpha_n$を用いて、x, qを更新する。すなわち、

$$x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha_n (y_a^n - x_a^n)$$

$$q_{\mathrm{rs}}^{\mathrm{n+1}} = q_{rs}^n + \alpha_n (v_{rs}^n - q_{rs}^n)$$

利用者均衡モデルの解法
-変動需要下での利用者均衡

- 解法アルゴリズム-収束判定

- アルゴリズム中で収束判定を行い、それを満たせば計算終了、満たさなければ、n=n+1として、再び計算を行う。

- 収束判定には様々なものがある。例えば、以下のようなもの

$$\underbrace{\sum_{rs} \frac{|D_{rs}^{-1}(q_{rs}^{n}) - u_{rs}^{n}|}{u_{rs}^{n}}}_{\text{どれだけ最短時間に近づいたか}} + \underbrace{\sum_{rs} \frac{|u_{rs}^{n} - u_{rs}^{n-1}|}{u_{rs}^{n}}}_{\text{計算間でどのくらい値が変化したか}} \leq \kappa$$

まとめ

- 利用者均衡モデルの解法の確立
  -変数の少ない単純なモデルではKT条件から直接導くことができるが、大規模な問題となると大変である。

- Frank-Wolfe法は、中規模ネットワークを考えるには十分かもしれない。しかし、より大規模なネットワークでは、計算回数が膨大となる・リンク相互干渉等の問題が生じる。