GEV(generalized extreme value) model

Modeling the choice of residential location
Daniel McFadden
Spatial Interaction Theory and Planning Models, pp.75-96, 1978

GEV
Kenneth E. Train
Discrete Choice Methods with Simulation, chapter4, pp.80-100, 2003

2015/05/01(金)

理論談話会#2

B4 三木真理子

目次

1. **GEVモデルとは**
2. $Pi=YiGi/G$**の証明**
   ①F=exp(-G)が多変量極値分布の累積分布関数であることを示す
   ②J個の選択肢からある選択肢iが選ばれる確率を求める
3. **MNLへの適用**
4. **NLへの適用**

GEVモデルとは

・復習

多項ロジットモデル(MNLモデル)

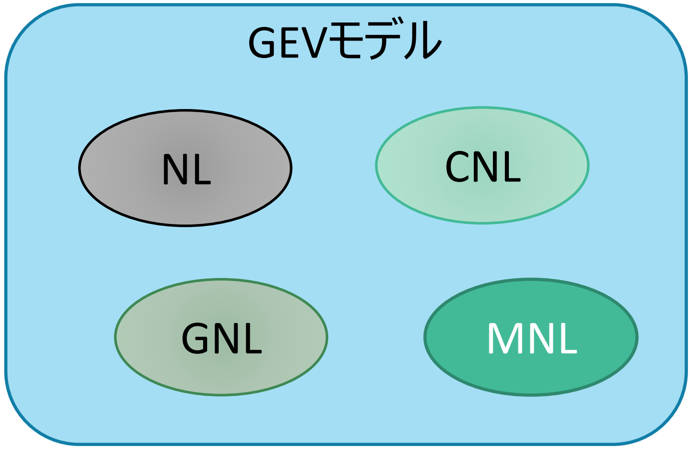
：効用の確率項が独立に同一のガンベル分布に従う（IIA特性）

→選択肢間の確率項の相関を考慮できない

ネスティッドロジットモデル(NLモデル)

:ロジットモデルのIIA特性を緩和する

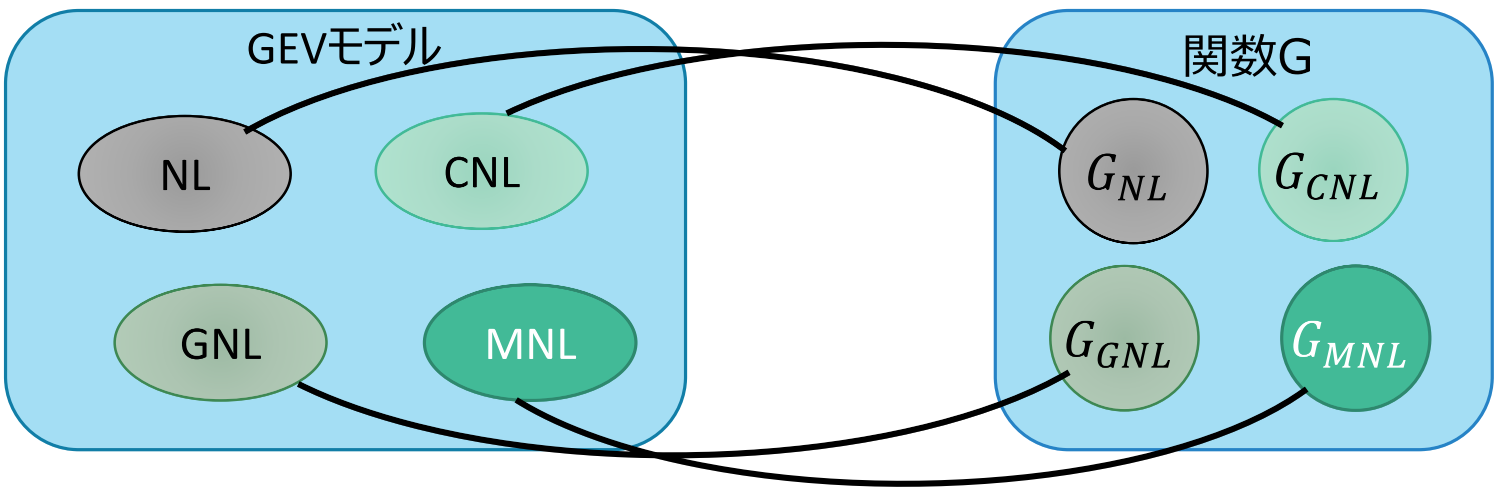
<u>どちらもGEVモデルの１つ！！</u>



GEVモデルとは

GEVモデル

：ある条件を満たす関数Gによって特徴づけられるモデル



関数Gが１つあれば、それに対応するGEVモデルが１つある！

GEVモデルとは

・関数Gの満たすべき条件

1. $G \geq 0$ for all $Y_j > 0 \ \ ^\forall j$
2. Gは1次*の同次関数.

   $G(\rho Y_1, \dots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, \dots, Y_J)$
3. $\lim_{Y_j \to \infty} G = +\infty$ for any j
4. $\partial^k G / \partial Y_{i_1} \dots \partial Y_{i_k} \begin{cases} \geq 0 \ \ if\ k\ is\ odd \\ \leq 0 \ \ if\ k\ is\ even \end{cases}$

文字の定義

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

このとき、効用最大化原則の下である人が選択肢*i*を選ぶ確率が

$P_i = \frac{Y_i G_i}{G}$ で与えられるもの → *GEV*モデル

$P_i = Y_i G_i / G$の証明

$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$

とする.

①Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す.

②J個の選択肢について, それぞれの確率項ε_jがFに従って
分布するとき, ある選択肢iが選択される確率を求める.

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$$

このFが累積分布関数であることを示す.

(1) $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F = 0$ かつ $\lim_{\{\varepsilon_j\} \to +\infty} F = 1$

(2) Fが単調増加かつ連続である, つまりFの偏微分が非負である.

以上の2点を示せばよい。

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$ について

(1) $\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F = 0$ かつ $\lim_{\{\varepsilon_j\} \to +\infty} F = 1$

を示す.

$$\varepsilon_j \to -\infty \text{ ならば } e^{-\varepsilon_j} \to +\infty$$

Gの性質3 ($\lim_{Y_j \to \infty} G = +\infty$ for any j) より、

$$\lim_{\varepsilon_j \to -\infty} G = +\infty \quad then \quad \lim_{\varepsilon_j \to -\infty} F = 0$$

また,

$$\lim_{\{\varepsilon_j\} \to +\infty} G = 0 \quad then \quad \lim_{\{\varepsilon_j\} \to +\infty} F = 1$$

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$ について

(2) Fが単調増加かつ連続である, つまりFの偏微分が非負である.

これを示す.

以下のようにQ_kを定める.

$$\begin{cases} Q_1 = G_1 \\ Q_k = Q_{k-1} G_k - \partial Q_{k-1} / \partial Y_k \end{cases}$$

k = 1,…,J について $Q_k \geq 0$ であることを帰納法で示す.

i) k = 1　のとき

Gの満たす性質4より

$G_1 = \partial G / \partial Y_1 \geq 0$

よって $Q_1 = G_1 \geq 0$

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

ii)$k \ \geq 2$ のとき

$Q_{k-1} \geq 0$ と仮定する.

$\begin{cases} Q_1 = G_1 \\ Q_k = Q_{k-1} G_k - \partial Q_{k-1} / \partial Y_k \end{cases}$ より

Q_kはGのさまざまな階数の偏微分からなる項の和.

Gの満たす性質4より,

Q_kをY_jで偏微分する

→Q_kを構成するGのn階の偏微分が$(n+1)$階の偏微分になる

→Q_kの各項の正負が入れ替わる

→ $Q_{k-1} \geq 0$ なら$\partial Q_{k-1} / \partial Y_k \leq 0$

また, $G_k = \partial G / \partial Y_k \geq 0$ より $Q_{k-1} G_k \geq 0$

よってこのとき, $Q_k \geq 0$

i), ii)より、 k = 1,…,J について $Q_k \geq 0$

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$$

$k = 1, \dots, J$ について

$$\partial^k F / \partial\varepsilon_1, \dots, \partial\varepsilon_k \geq 0$$

を帰納法により示す.

i)$k = 1$のとき

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\left\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\right\}$$

$$= F \cdot \frac{\partial e^{-\varepsilon_1}}{\partial \varepsilon_1} \cdot \frac{\partial}{\partial e^{-\varepsilon_1}}\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$$

$$= F \cdot (-e^{-\varepsilon_1}) \cdot (-G_1)$$

$$= e^{-\varepsilon_1} Q_1 F \geq 0$$

これと同様に考えて,

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_j} = e^{-\varepsilon_j} G_j F$$

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

ii)$k \geq 2$ のとき

$$\frac{\partial^{k-1} F}{\partial \varepsilon_1, \dots, \partial \varepsilon_{k-1}} = e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_{k-1}} Q_{k-1} F$$

と仮定する．　このとき

$$\frac{\partial^k F}{\partial \varepsilon_1, \dots, \partial \varepsilon_k} = e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_{k-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} (Q_{k-1} F)$$

$$= e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_{k-1}} \underline{\left(\frac{\partial Q_{k-1}}{\partial \varepsilon_k} \cdot F + Q_{k-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_k} \right)}$$

$$= \frac{\partial e^{-\varepsilon_k}}{\partial \varepsilon_k} \cdot \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial e^{-\varepsilon_k}} \cdot F + Q_{k-1} e^{-\varepsilon_k} G_k F$$

$$= \left(-e^{-\varepsilon_k} \cdot \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial Y_k} + Q_{k-1} e^{-\varepsilon_k} G_k \right) F$$

$$= e^{-\varepsilon_k} \left(Q_{k-1} G_k - \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial Y_k} \right) F$$

$$= e^{-\varepsilon_k} Q_k F$$

$$= e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_k} Q_k F$$

i), ii)より

$k = 1, \dots, J$ について

$$\partial^k F / \partial \varepsilon_1, \dots, \partial \varepsilon_k \geq 0$$

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明①

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す

$k = 1, \dots, J$ について

$$\partial^k F / \partial \varepsilon_1, \dots, \partial \varepsilon_k \geq 0$$

つまり,

(2) Fが単調増加かつ連続である, つまりFの偏微分が非負である.

を示せた.

→Fは累積分布関数ということが示せた！！

ここで, i以外のjについて$\varepsilon_j = +\infty$を与えたとき

$$F = \exp\{-a_i e^{-\varepsilon_i}\}, \quad a_i = G(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

i番目

→ガンベル分布(一変量極値分布)に一致！

→Fは多変量極値分布である

$P_i = Y_i G_i / G$の証明

$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = exp\{-G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_J})\}$

とする.

①Fが多変量極値分布の累積分布関数であることを示す.

②J個の選択肢について, それぞれの確率項ε_jがFに従って
分布するとき, ある選択肢iが選択される確率を求める.

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明②

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

J個の選択肢があり，それぞれの確率項ε_jがFに従って分布するとき，ある選択肢iが選択される確率を求める

選択肢jについて，

$$U_j = V_j + \varepsilon_j$$

U_j:選択肢jの効用

V_j:選択肢jの効用の確定項

ε_j:選択肢jの効用の確率項

とする. J個の選択肢から選択肢iが選択される確率P_iは，

$$P_i = Prob\left[U_i \geq U_j \quad for\ j = 1, \dots, J\right]$$

$$= Prob\left[V_i + \varepsilon_i \geq V_j + \varepsilon_j \quad for\ j = 1, \dots, J\right]$$

$$= Prob\left[\varepsilon_j \leq \varepsilon_i + V_i - V_j \quad for\ j = 1, \dots, J\right]$$

$$= F(\varepsilon_i + V_i - V_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)$$

ここで，Fをi番目の引数で偏微分したものをF_iとする.

$$F_i = \partial F / \partial \varepsilon_i$$

このとき，

$$F_i \sim Prob\left[\varepsilon_j = \varepsilon_i + V_i - V_j \quad for\ j = 1, \dots, J\right]$$

と考えられる(※)

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明②

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

J個の選択肢があり，それぞれの確率項ε_jがFに従って分布するとき，ある選択肢iが選択される確率を求める

$-\infty < \varepsilon_i < \infty$ より，

$F(\varepsilon_i + V_i - V_1 ,\dots, \varepsilon_i ,\dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)$

$$= \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} Prob\left[\varepsilon_j = \varepsilon_i + V_i - V_j \quad for\ j = 1, \dots, J\right] d\varepsilon_i$$

$$= \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{+\infty} F_i(\varepsilon_i + V_i - V_1 ,\dots, \varepsilon_i ,\dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)\ d\varepsilon_i$$

$P_i = F(\varepsilon_i + V_i - V_1 ,\dots, \varepsilon_i ,\dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)$ より，

$$P_i = \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{+\infty} F_i(\varepsilon_i + V_i - V_1 ,\dots, \varepsilon_i ,\dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)\ d\varepsilon_i$$

とかける．

$P_i = Y_i G_i / G$ の証明②

$Y_j = \exp(V_j)$

$G = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_J)$

$G_i = \partial G / \partial Y_i$

J個の選択肢があり，それぞれの確率項ε_jがFに従って分布するとき，ある選択肢iが選択される確率を求める

$$P_i = \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{+\infty} F_i(\varepsilon_i + V_i - V_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_i + V_i - V_J)\, d\varepsilon_i$$

$$= \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon_i} \underline{G_i(e^{-\varepsilon_i - V_i + V_1}, \dots, e^{-\varepsilon_i}, \dots, e^{-\varepsilon_i - V_i + V_J})} \cdot$$

Gの性質2より, G_iは定数関数

$$\exp\{-G(e^{-\varepsilon_i - V_i + V_1}, \dots, e^{-\varepsilon_i}, \dots, e^{-\varepsilon_i - V_i + V_J})\}\, d\varepsilon_i$$

$$= \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon_i}\, \underline{G_i(e^{V_1}, \dots, e^{V_i}, \dots, e^{V_J})} \cdot$$

$$\exp\{-e^{-\varepsilon_i} e^{-V_i}\, G(e^{V_1}, \dots, e^{V_i}, \dots, e^{V_J})\} d\varepsilon_i$$

$$= e^{V_i} \frac{G_i(e^{V_1}, \dots, e^{V_i}, \dots, e^{V_J})}{G(e^{V_1}, \dots, e^{V_i}, \dots, e^{V_J})}$$

$$= \frac{Y_i G_i}{G}$$

MNLへの適用

J個の選択肢からなるMNLモデルは

$$G(Y_1, \dots, Y_J) = \sum_{j=1}^{J} Y_j$$

から得られる.

Gの性質

1. $G \geq 0$ for all $Y_j > 0 \ \forall j$
2. Gは1次*の同次関数. すなわち
   $G(\rho Y_1, \dots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, \dots, Y_J)$
3. $\lim_{Y_j \to \infty} G = +\infty$ for any j
4. $\partial^k G / \partial Y_{i_1} \dots \partial Y_{i_k} \begin{cases} \geq 0 & if\ k\ is\ odd \\ \leq 0 & if\ k\ is\ even \end{cases}$

４つの性質の確認

1. OK!
2. $\sum_{j=1}^{J} \rho Y_j = \rho \sum_{j=1}^{J} Y_j$ → OK!
3. OK!
4. $\partial G / \partial Y_i = 1 \geq 0$
   2階以上の偏導関数の値はいずれも0
   → OK!

MNLへの適用

MNLモデルにおいて、J個の選択肢からある選択肢iが選ばれる確率P_iは

$$P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

GEVモデルの特質により，

$$G(Y_1, \ldots, Y_J) = \sum_{j=1}^{J} Y_j$$

を使ってP_iを求めると，

$$P_i = \frac{Y_i G_i}{G} = \frac{Y_i}{\sum_{j=1}^{J} Y_j} = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

NLへの適用

J個の選択肢がK個のネスト$\{B_1, \ldots, B_K\}$に分けられているNLモデルは,

$$G(Y_1, \ldots, Y_J) = \sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$$

から得られる.ただし, $0 \leq \lambda_l \leq 1$

Gの性質

1. $G \geq 0$ for all $Y_j > 0 \ {}^{\forall} j$
2. Gは1次*の同次関数. すなわち
   $G(\rho Y_1, \ldots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, \ldots, Y_J)$
3. $\lim_{Y_j \to \infty} G = +\infty$ for any j
4. $\partial^k G / \partial Y_{i_1} \ldots \partial Y_{i_k} \begin{cases} \geq 0 & if\ k\ is\ odd \\ \leq 0 & if\ k\ is\ even \end{cases}$

Gの性質をもつことを確認！

1. OK!
2. $\sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l} (\rho Y_j)^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$
   $= \sum_{l=1}^{K} \left(\rho^{1/\lambda_l} \sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$
   $= \sum_{l=1}^{K} \left(\rho^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l} \left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$
   $= \rho \sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$ → OK!
3. OK

NLへの適用

性質4を確かめる.

$$4. \partial^k G / \partial Y_{i_1} \dots \partial Y_{i_k} \begin{cases} \geq 0 \ \ if\ k\ is\ odd \\ \leq 0 \ \ if\ k\ is\ even \end{cases}$$

$$G(Y_1, \dots, Y_J) = \sum_{l=1}^{K} \left(\sum_{j \in B_l} Y_j{}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$$

k番目のネストB_kにある選択肢iについて

$$G_i = \frac{\partial}{\partial Y_i} \left(\sum_{j \in B_l} Y_j{}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l}$$

$$= \lambda_l \left(\sum_{j \in B_l} Y_j{}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_l} Y_i{}^{1/\lambda_l - 1}$$

$$= Y_i{}^{1/\lambda_l - 1} \left(\sum_{j \in B_l} Y_j{}^{1/\lambda_l} \right)^{\lambda_l - 1} \geq 0$$

NLへの適用

$$G_i = {Y_i}^{1/\lambda_l - 1}\left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l - 1} \geq 0$$

k番目のネストB_kにある選択肢mについて

$$G_{im} = \frac{\partial}{\partial Y_m} {Y_i}^{1/\lambda_l - 1}\left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l - 1}$$

$$= {Y_i}^{1/\lambda_l - 1}(\lambda_l - 1)\left(\sum\nolimits_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l - 2} \cdot \frac{1}{\lambda_l} Y_m{}^{1/\lambda_l - 1}$$

$$= (\lambda_l - 1)(Y_i Y_m)^{1/\lambda_l - 1}\left(\sum\nolimits_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l - 2} \leq 0 \ (\lambda_l \leq 1)$$

選択肢mがB_kに含まれない場合はG_{im} =0 より, まとめて$G_{im} \leq 0$

これよりも高階な偏微分においても成り立つ.

NLへの適用

J個の選択肢がK個のネスト$\{B_1, \dots, B_K\}$に分けられているNLモデルにおいて, J個の選択肢からある選択肢iが選ばれる確率P_iは

$$P_i = \frac{e^{V_i/\lambda_k}\left(\sum_{j \in B_k} e^{V_j/\lambda_k}\right)^{\lambda_k - 1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j \in B_l} e^{V_j/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}}$$

GEVモデルの特質により,

$$G(Y_1, \dots, Y_J) = \sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j \in B_l} {Y_j}^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}$$

を使ってP_iを求めると,

$$P_i = \frac{Y_i G_i}{G}$$

NLへの適用

$$P_i = \frac{Y_i G_i}{G} = \frac{Y_i Y_i^{\frac{1}{\lambda_k}-1}\left(\sum_{j\in B_k} Y_j^{1/\lambda_k}\right)^{\lambda_k-1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l} Y_j^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}}$$

$$= \frac{Y_i^{\frac{1}{\lambda_k}}\left(\sum_{j\in B_k} Y_j^{1/\lambda_k}\right)^{\lambda_k-1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l} Y_j^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}}$$

$$= \frac{\left(e^{V_i}\right)^{1/\lambda_k}\left(\sum_{j\in B_k}\left(e^{V_j}\right)^{1/\lambda_k}\right)^{\lambda_k-1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l}\left(e^{V_j}\right)^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}}$$

$$= \frac{e^{V_i/\lambda_k}\left(\sum_{j\in B_k} e^{V_j/\lambda_k}\right)^{\lambda_k-1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l} e^{V_j/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} P_i = \frac{e^{V_i/\lambda_k}\left(\sum_{j\in B_k} e^{V_j/\lambda_k}\right)^{\lambda_k-1}}{\sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l} e^{V_j/\lambda_l}\right)^{\lambda_l}} \\ G(Y_1,\dots,Y_J) = \sum_{l=1}^{K}\left(\sum_{j\in B_l} Y_j^{1/\lambda_l}\right)^{\lambda_l} \end{gathered}}$$