Urban Transport Networks

Yosshi Sheffi, Prentice Hall, 1985

Chap4: Review of Some Optimization Algorithms
Chap5: Solving for User Equilibrium

2015/05/08 (Fri)
理論勉強会#4
M1　山本　萌美

Outline

- Chap4：Review of Some Optimization Algorithms

  一般的な最適化問題の解法

  ⇒一変数から多変数へ

- Chap5：Solving for User Equilibrium

  凸結合法の利用者均衡配分問題への適用

今日のゴール
利用者均衡モデルの解法を理解する

CHAP 4

一般的な最適化問題のアルゴリズム

一変数の最適化問題

基本的な2種類のアプローチ

① **区間縮小法 (Interval Reduction Methods)**
- 黄金分割法
- 二分割法

最適解がないと思われる区間を削っていく

② **曲線あてはめ法 (Curve Fitting Methods)**
- ニュートン法 ←多次元でも
- 擬点法
- 二次形式あてはめ法

最適解に収束する点列を生成していく

多変数の最適化問題

➢ **<u>制約条件なし</u>**の最適化問題

- ニュートン法
- 降下法を用いた方法

  →最急降下法

➢ **<u>制約条件あり</u>**の最適化問題

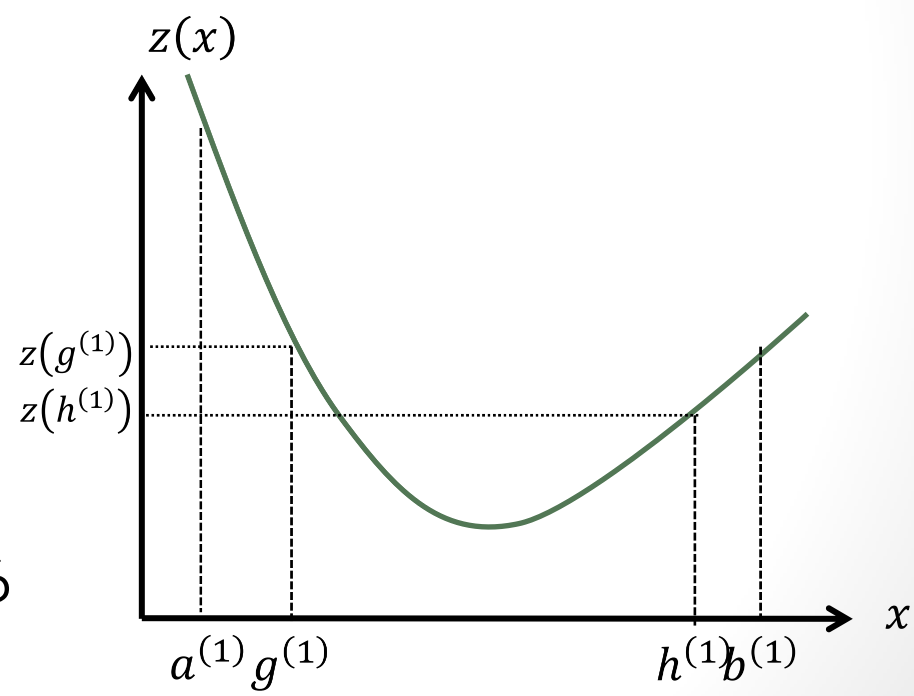
- 凸結合法

黄金分割法 Golden Section Method

関数$z(x)$の区間$[a,b]$における最小点を求めたい
ここで、関数$z(x)$はditonic(単調減少/増加・変化は一回)

アルゴリズム

Step1 $k := 1$
初期区間$[a,b]$をとる
$g^{(1)} = b^{(1)} - s(b^{(1)} - a^{(1)})$
$h^{(1)} = a^{(1)} + s(b^{(1)} - a^{(1)})$
*sは縮小率
$z(g^{(1)}), z(h^{(1)})$ を計算する



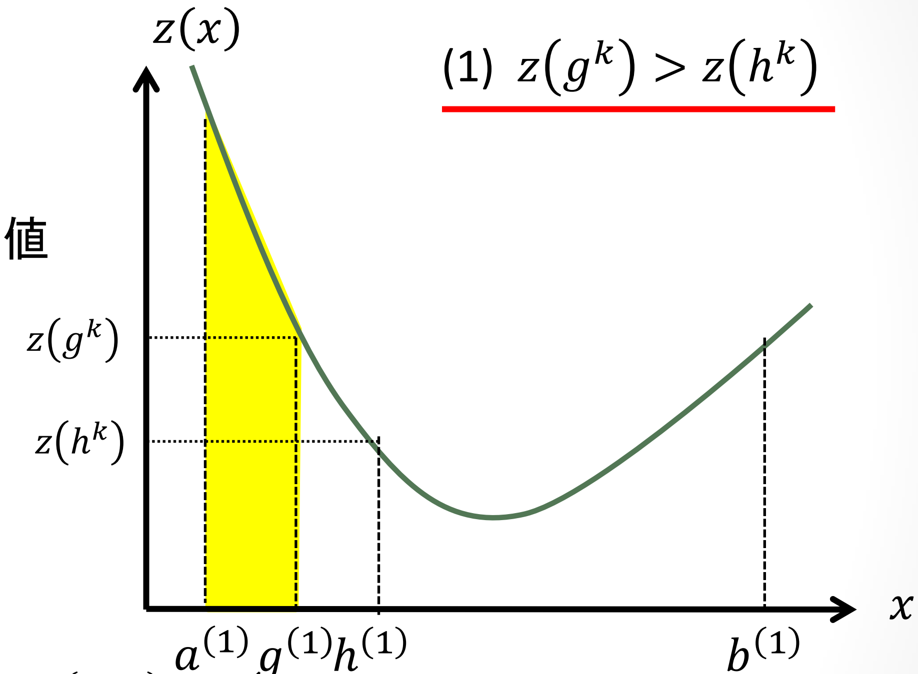
黄金分割法 Golden Section Method

Step2　$b^{(k)} - a^{(k)} < \varepsilon$ ならば最適値を

$\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$　とおき終了

*ε は終了判定基準で十分小さな値

そうでなければ、Step3へ



Step3　(1) $z\left(g^{(k)}\right) \geq z\left(h^{(k)}\right)$ ならば

$$a^{(k+1)} = g^{(k)}$$
$$g^{(k+1)} = h^{(k)}$$
$$b^{(k+1)} = b^{(k)}$$
$$h^{(k+1)} = a^{(k+1)} + s(b^{(k+1)} - a^{(k+1)})$$

とおく。

$k \coloneqq k + 1$としてstep2へ

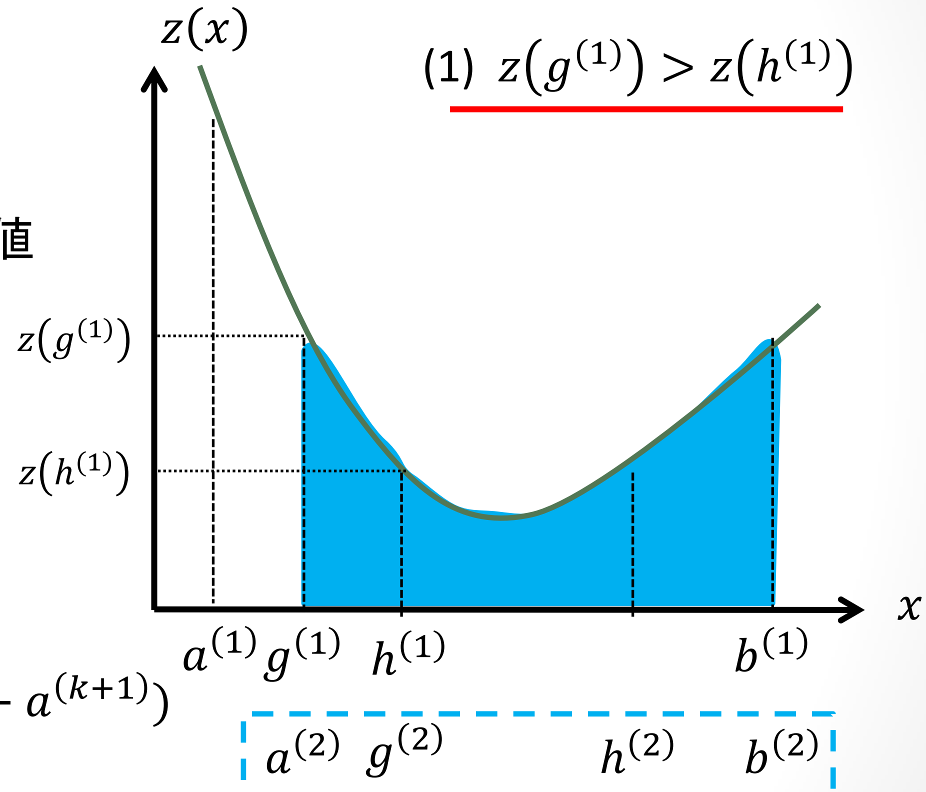
黄金分割法 Golden Section Method

Step2　$b^{(k)} - a^{(k)} < \varepsilon$ ならば最適値を
$\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$ とおき終了
*ε は終了判定基準で十分小さな値
そうでなければ、Step3へ

Step3　(1) $z\left(g^{(k)}\right) \geq z\left(h^{(k)}\right)$ ならば

$$a^{(k+1)} = g^{(k)}$$
$$g^{(k+1)} = h^{(k)}$$
$$b^{(k+1)} = b^{(k)}$$
$$h^{(k+1)} = a^{(k+1)} + s(b^{(k+1)} - a^{(k+1)})$$

とおく。
$z\left(g^{(k+1)}\right) = z\left(h^{(k)}\right)$とおき、
$z(h^{(k+1)})$を計算
$k := k+1$としてstep2へ



$k+1$回目の3点をk回目で再利用

黄金分割法 Golden Section Method

Step3 (2) $z\left(g^{(k)}\right) \le z\left(h^{(k)}\right)$ ならば

$a^{(k+1)} = a^{(k)}$

$h^{(k+1)} = g^{(k)}$

$b^{(k+1)} = h^{k}$

$g^{(k+1)} = b^{(k+1)} - s\left(b^{(k+1)} - a^{(k+1)}\right)$

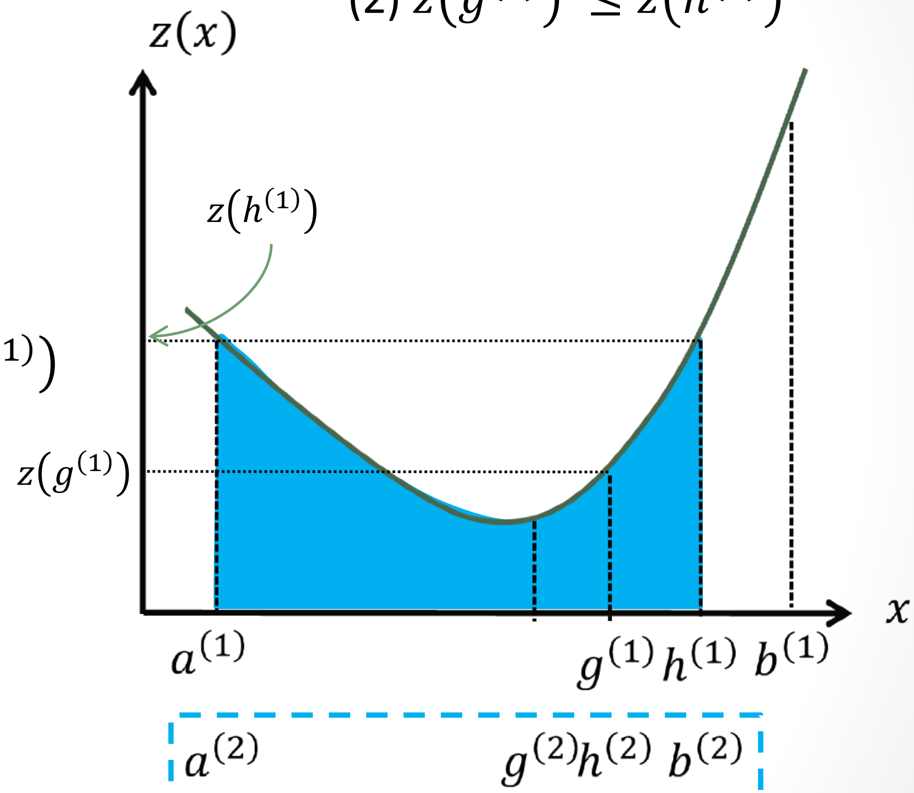
とおく。

$z\left(h^{(k+1)}\right) = z\left(g^{(k)}\right)$とおき、

$z(g^{(k+1)})$を計算

$k \coloneqq k + 1$としてstep2へ

(2) $z\left(g^{(k)}\right) \le z\left(h^{(k)}\right)$

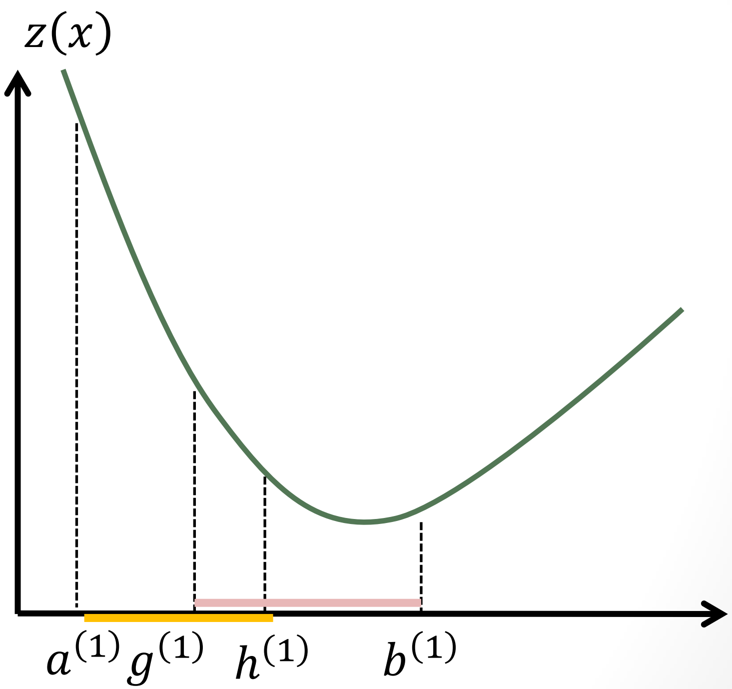


黄金分割法　なぜ黄金か？

縮小率sのとり方

$b^{(k)}-g^{(k)}=h^{(k)}-a^{(k)}=s\left(b^{(k)}-a^{(k)}\right)\cdots①$　を満たすようにとる。

$\Leftrightarrow \begin{cases} g^{(k)}=b^{(k)}-s(b^{(k)}-a^{(k)}\cdots② \\ h^{(k)}=\ a^{(k)}-s(b^{(k)}-a^{(k)}\cdots③ \end{cases}$



(1)の場合

②の式を$k\coloneqq k+1$とすると、

$g^{(k+1)}=b^{(k+1)}-s\left(b^{(k+1)}-a^{(k+1)}\right)\cdots④$

ここで、Step3の式を代入すると、

$h^{(k)}=b^{(k)}-s\left(b^{(k)}-g^{(k)}\right)\cdots⑤$

と表せる。

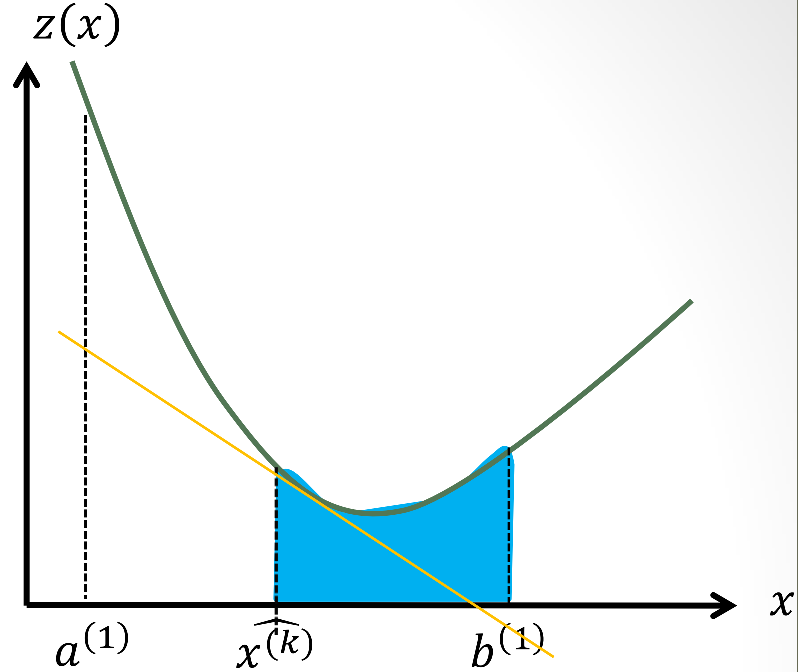
⑤に、②･③式を代入して整理すると、

$\left(b^{(k)}-a^{(k)}\right)(s^2+s+1)=0$

$\Rightarrow\ \ s^2+s+1=0$

$s>0$なので、$\boxed{s=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ← 黄金比

二分割法



アルゴリズム

Step1　$k := 1$

初期区間$\left[a^{(1)}, b^{(1)}\right]$とする

Step2　$\widehat{x^{(k)}} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$　とする

$k := k + 1$

$\frac{dz(\widehat{x^{(k)}})}{dx} \leq 0$ならば、$a^{(k)} = \widehat{x^{(k)}}$とする

$\frac{dz(\widehat{x^{(k)}})}{dx} \geq 0$ならば、$b^{(k)} = \widehat{x^{(k)}}$とする

Step3　$b^{(k)} - a^{(k)} \leq 2\varepsilon$ならば、$\widehat{x^{(k)}} := \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$　→計算終了

そうでないならば、Step2へ

黄金分割法と二分割法

- どちらも、最適解がない方の区間を削っていく。
- 縮小率が異なる。

　→二分割法の方が収束速度が速い。

　→微分計算が容易なら、黄金分割法よりは二分割法で。

一変数の最適化問題

基本的な2種類のアプローチ

① 区間縮小法 (Interval Reduction Methods)

- 黄金分割法
- 二分割法

最適解がないと思われる区間を削っていく

② 曲線あてはめ法 (Curve Fitting Methods)

- **ニュートン法** ←多変数でも
- 擬点法
- 二次形式あてはめ法

最適解に収束する点列を生成していく

多変数の最適化問題

- **制約条件なし**の最適化問題
- **ニュートン法**
- 降下法を用いた方法
  →**最急降下法**

- **制約条件あり**の最適化問題
- 凸結合法

ニュートン法 Newton's method

最適性の1次の必要条件を与える式

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

を線形近似し、初期点$x^{(1)}$から繰り返して、最小点を見出す。

関数$f(\boldsymbol{x})$を、点$x^{(k)}$で近似すると、

$$\tilde{f}(x) = f\left(x^{(k)}\right) + \nabla f\left(x^{(k)}\right)^T \left(x - x^{(k)}\right) + \frac{1}{2}\left(x - x^{(k)}\right)^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \cdots (1)$$

$d = x - x^{(k)}$とすると、式(1)は

$$q^{(k)}(d) = f\left(x^{(k)}\right) + \nabla f\left(x^{(k)}\right) d^{(k)} + \frac{1}{2} d^{(k)^T} \nabla^2 f\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) \cdots (2)$$

と書き表せる。

ここで、<u>ヘッセ行列$\nabla^2 f(x^{(k)})$が正定値であると仮定</u>する。

$$\nabla q^{(k)}(d) = \nabla f\left(x^{(k)}\right) + \nabla^2 f\left(x^{(k)}\right) d = 0$$

を満たすようなdはq^kを最小とする。

式(2)より、最小となる点は

$$d^{(k)} = -\nabla^2 f^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}) \qquad \cdots (3)$$

で与えられる。

ニュートン法

アルゴリズム

Step1 出発点$x^{(1)}$を選ぶ

$k \coloneqq 1$

Step2 $\nabla f\left(x^{(k)}\right) = 0$ならば、計算終了。

そうでなければ、式(3)より解$d^{(k)}$を求める。

Step3 次の点を$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$とする。

$k \coloneqq k + 1$

Step2へ

ニュートン法

- 二次収束性をもつ

  → 収束スピードがはやい

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\| \leq \beta \left\| x^{(k)} - x^* \right\|^2$$

  βはある正の定数

- 局所的収束性をもつ

  → 出発点の取り方が悪いと失敗する

- ヘッセ行列の計算がめんどう

最急降下法 steepest descent method

考え方

$\nabla f\left(x^{(k)}\right)$は、点$x^{(k)}$において目的関数f(x)が最も増大する方向

$f(x)$をもっとも減少させる方向 $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$

次の点は、$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \underline{\alpha}^{(k)} d^{(k)}$とする。

ステップ幅

降下方向の探索
現在の点からどの方向にいけばよいか？

→

ステップ幅の探索
どれだけ進めるか？

最急降下法

ジグザグに進む。
等高線に垂直。

アルゴリズム

Step1 出発点$x^{(1)}$を選択

$k := 1$

Step2 $\nabla f\left(x^{(k)}\right)$ならば、計算終了。

そうでないならば、

$d^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right)$とおく

Step3

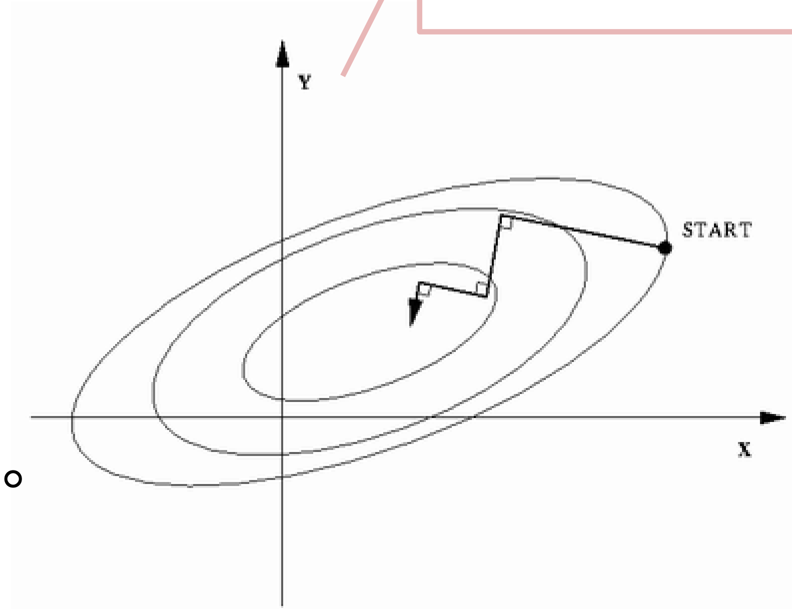
$$f\left(x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}\right) \cong \min_{\alpha > 0} f\left(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}\right)$$

を満たすステップ幅$\alpha^{(k)}$を求める。

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$とする。

$k := k + 1$

Step2へ



最急降下法のイメージ図(*)

(*) http://d.hatena.ne.jp/Zellij/20120712/p1より

最急降下法

降下方向の探索

現在の点からどの方向にいけばよいか？

ステップ幅の探索

どれだけ進めるか？

黄金分割法などの直線探索でとく

最急降下法の特徴

- 一次収束性をもつ
  →収束スピードは遅い

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le \beta \left\|x^{(k)} - x^*\right\|$$

βは正の定数

- 大域的収束性をもつ
  →どの出発点も何らかの解に収束する

ただし、ステップ幅がある条件（Armijoの条件・Wolfeの条件）をみたすとき

多変数の最適化問題

➢ **<u>制約条件なし</u>**の最適化問題
- ニュートン法
- 降下法を用いた方法
  →最急降下法

➢ **<u>制約条件あり</u>**の最適化問題
- 凸結合法(Frank-Wolfe法)

CHAP 5
凸結合法で利用者均衡モデルを解く

利用者均衡モデル

最短経路探索 — ダイクストラ法など

↓

交通量の配分 — All-or-nothing配分

↓

最適化問題を解く — Frank-Wolfe法

利用者均衡モデルの定式化

ここで使うUEモデルは、

OD交通量が固定でWardropの第一原則(*)に従う

=

需要**固定**型利用者均衡配分モデル

（UE/FD : User Equilibrium with Fixed Demand）

(*) Wardropの利用者均衡
利用される経路の旅行時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい

利用者均衡モデルの定式化

Beckman’s Transformation

$$min.Z_p = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

Subject to :

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{rs} \in \boldsymbol{\Omega}$$

$$x_a = \sum_{k\in K_{rs}} \sum_{rs\in\Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in \boldsymbol{A}$$

$$f_k^{rs} \geq 0, x_a \geq 0$$

f_k^{rs}: ODペアrs間の第k経路の経路交通量
Q_{rs}: ODペアrs間の分布交通量

$t_a(x_a)$: リンクaのリンクコスト関数
x_a: リンクaのリンク交通量

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1\text{：ODペアrs間第k経路がリンクaを含むとき} \\ 0\text{：otherwise} \end{cases}$$

利用者均衡モデルの解法

考え方はさっきみてきた降下法と同じ！

降下方向の探索
現在の点からどの方向にいけばよいか？

↓

ステップ幅の探索
どれだけ進めるか？

違いは、*制約条件*があるということ。

利用者均衡モデルの解法

降下方向の探索
現在の点からどの方向にいけばよいか？

最急降下法では、方向ベクトルを

$$d^{(n)} = -\nabla f\left(x^{(n)}\right)$$

とおいた。

今度は制約条件を考慮した方向ベクトルdを考える。

yを方向ベクトル上の任意の点または端点として、

$$d^{(n)} = y - x^{(n)}$$

とする。

これを求めるために、もとの最適化問題（主問題）よりも易しい最適化問題（補助問題）を解く。

補助問題はどうしたらよいか？

主問題の目的関数の点$x^{(n)}$における一次または二次のテーラー展開によって得られた近似問題を補助問題とする。

これを解いて、yを求め、方向ベクトルdが決定する。

Frank-Wolfe法

降下方向の探索
現在の点からどの方向にいけばよいか？

$$Z_p = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

目的関数$Z(y)$を線形近似する。

$$Z_p(y) \cong Z'(y) = Z_p\left(x^{(n)}\right) + \nabla Z_p\left(x^{(n)}\right)^T\left(y - x^{(n)}\right)$$
$$= Z_p\left(x^{(n)}\right) + \textstyle\sum_{a\in A}\left(y_a - x_a^{(n)}\right)\boxed{\partial Z_p(x^{(n)})/\partial x_a^{(n)}}$$
$$= Z_p\left(x^{(n)}\right) + \textstyle\sum_{a\in A}\left(y_a - x_a^{(n)}\right)\boxed{t_a\left(x_a^{(n)}\right)}$$
$$= \underbrace{\boxed{Z_p\left(x^{(n)}\right) - \textstyle\sum_{a\in A} x_a^{(n)} t_a\left(x_a^{(n)}\right)}}_{\text{定数}} + \textstyle\sum_{a\in A} y_a t_a\left(x_a^{(n)}\right)$$

補助問題

$$\min Z'(y) = \sum_{a\in A} y_a t_a\left(x_a^{(n)}\right)$$

Subject to $\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega$

$$y_a = \sum_{k\in K\_rs}\sum_{rs\in\Omega}\delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in A$$

Frank-Wolfe法

降下方向の探索

補助問題

$$\min Z'(y) = \sum_{a \in A} y_a t_a\left(x_a^{(n)}\right) \qquad (1)$$

Subject to

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - Q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega \qquad (2)$$

$$y_a = \sum_{k \in K\_rs} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs} \qquad \forall a \in A \qquad (3)$$

(1)： $t_a\left(x_a^{(n)}\right)$ の下で、yを最小化

All or nothing配分（リンク所要時間で求められる最短経路にすべてのOD交通量を流す）すれば、yを収束計算せずに求めることができる。

補助問題により、yが求められた。

→ 方向ベクトルdがわかった。 $(d = y - x^{(n)})$

利用者均衡モデルの解法

考え方はさっきみてきた降下法と同じ！

降下方向の探索
現在の点からどの方向にいけばよいか？

↓

ステップ幅の探索
どれだけ進めるか？

違いは、*制約条件*があるということ。

利用者均衡モデルの解法

ステップ幅の探索
どれだけ進めるか？

ステップ幅を用いて次の点を表すと、

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} = \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})} + \underbrace{\alpha}_{\text{ステップ幅}}\boldsymbol{d}$$

*y*を用いた降下方向ベクトルを代入すると、

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} = \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})})$$

$Z(x^{(n+1)})$ は、αを変数にもつ1変数関数

よって、$Z(\alpha)$の一次元最適化問題となり、直線探索（黄金分割法など）で解くことができる。

Frank-Wolfe法

ステップ幅の探索
どれだけ進めるか？

$x^{(n+1)}$は実行可能解か？？

降下方向の探索で、制約条件を考慮した探索を行ったので
$y(= x^{(n)} + d)$も実行可能領域にある。
$0 \leq \alpha \leq 1$ならば、

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})} + \alpha(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})} = \alpha\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})}$$

凸集合の性質より、
$x^{(n+1)}$もまた実行可能解である。

凸集合Sの定義
$x, y \in S, 0 \leq \alpha \leq 1$
$\Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in S$

Frank-Wolfe法

アルゴリズム

Step1　初期実行可能解の設定

n := 1 として実行可能となるリンク交通量$\left\{x_a^{(n)}\right\}$を与える。

Step2　リンク旅行時間の更新

リンク交通量$\left\{x_a^{(n)}\right\}$→所要時間$\left\{t_a(x_a^{(n)})\right\}$を計算

Step3　降下方向の探索

Dijkstra法等で求めた最短経路に全OD交通流を負荷

（All-or-Nothing法）

$\{y_a\}$を算出

Step4　一次元探索

黄金分割法などでステップ幅αを決定

リンク交通流$\left\{x_a^{(n+1)}\right\}$を算出

Frank-Wolfe法

Step5　収束判定

(1) $\sum_{a \in A} \left(x_a^{(n+1)} - x_a^{(n)} \right) t_a(x_a^{(n)}) \leq \varepsilon_1$

(2) $\max_a \left| \left(x_a^{(n+1)} - x_a^{(n)} \right) / x_a^{(n)} \right| \leq \varepsilon_2$

(3) $n > K$ (Kは任意に設定)

上のいずれかを満たせば計算終了

そうでなければ、$n \coloneqq n + 1$としてStep2へ

まとめ

- 利用者均衡モデルをとく準備段階として、
  一次元探索（黄金分割法や二分割法）
  勾配法（最急降下法）

  を勉強した。
- 利用者均衡モデルの代表的解法であるFrank-Wolfe法
  制約条件つき最適化問題
  All-or-nothing配分がベース
  降下方向の探索→ステップ幅の決定