# 確率的利用者均衡モデル

土木学会

交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法-6章，pp.73-100，1998

2015/05/22(金)
理論談話会2015#6
B4 近松京介

# 目次

# 目次

# １章について

$\boxed{\text{確率的配分}}$　＋　利用者均衡配分　＝　確率的利用者均衡配分

確率的配分について

・ランダム効用理論
・flow independent(仮定)
・選択行動のばらつきを考慮

流れ

①定式化

②期待最大効用と期待最小費用？

# 確率的配分の定式化

↓定義

$$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs}$$
$$c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,k}^{rs}$$

↓経路kが選ばれる確率

$$P_k^{rs} = Pr.\left[ U_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k}\{U_{k'}^{rs}\} \middle| t \right]$$
$$= Pr.\left[ -c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k}\left\{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\right\} | t \right]$$
$$= Pr.\left[ c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \geq \min_{k' \neq k}\left\{c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs}\right\} | t \right]$$

↓定理

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs}$$
$$\sum_k P_k^{rs} = 1$$
$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs}$$
$$E\left[x_{ij}\right] = \sum_{rs} \sum_k E[f_k^{rs}]\, \delta_{ij,k}^{rs}$$

↓補足

$$Var[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} (1 - P_k^{rs})$$
$$Cov\left[f_k^{rs}, f_{k'}^{rs}\right] = -q_{rs} P_k^{rs} P_{k'}^{rs}$$

# 確率的配分の定式化(詳細)

$$P_k^{rs} = Pr.\left[-c_k^{rs} + \boxed{\xi_k^{rs}} \geq \max_{\boxed{k' \neq k}}\left\{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\right\} | t\right]$$

誤差項の確率分布

①ロジットモデル
ガンベル分布を仮定

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp[-\theta c_{k'}^{rs}]}$$

②プロビットモデル
正規分布を仮定

選択対象とする経路集合

①全てのsimple path※

②simple path をさらに限定

③全可能経路

※同一リンクを二度以上通過しない経路

# 期待最小費用関数

ODペア(r,s)の最小認知費用の期待値を次のように定義

$$S_{rs}(c^{rs}) \equiv E\left[\min_{k\in R_{rs}}\{\tilde{c}_k^{rs}\}\right]$$

ロジット方の確率配分モデルでは，その性質より

$$S_{rs}(c^{rs}) = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{k\in R_{rs}}\exp[-\theta c_k^{rs}]$$

# 目次

# ２章について

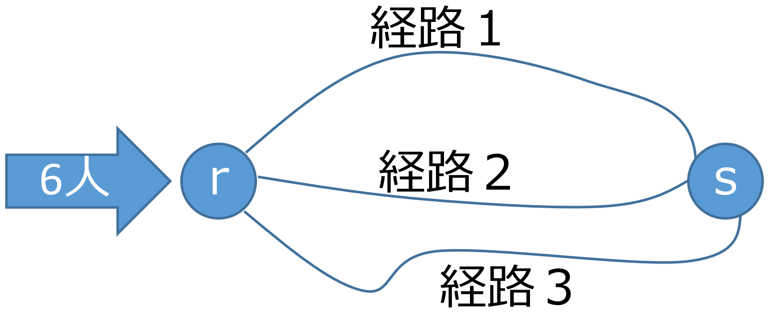
ロジット型確率的配分モデル　→　最適化問題

エントロピーの概念を用いて証明

流れ
①エントロピーモデルとは
②エントロピーモデルとロジットモデルの等価性
③エントロピーモデルのいくつかの形式

# エントロピーモデル

例




$$\{f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3\}$$
$$\{f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = 2\}$$
$$\vdots$$

$$\{f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3\}$$

となる場合の数は？

${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6!/(1!2!3!) = \boxed{60}$

↑状態数

どのflowパターンが一番状態数が多いか

→　エントロピーモデル

# エントロピーモデル

$$N(\boldsymbol{f}) = \prod_r \prod_s \frac{q_{rs}!}{\prod_k f_k^{rs}!}$$

$$max. \ln N(\boldsymbol{f}) = \sum_r \sum_s \{\ln q_{rs}! - \sum_k \ln f_k^{rs}!\}$$

($Stirling$の公式： $\ln x! \approx x \ln x - x$ より)

$$max. \ln N(\boldsymbol{f}) = \sum_r \sum_s \{\underbrace{\boxed{q_{rs} \ln q_{rs}}}_{\uparrow \text{定数}} \boxed{- \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}\}$$

↑ここを最大化

# エントロピーモデル(最適化問題)

ネットワーク全体の総走行費用が $\hat{E}$ 以下

【SA-1】

$$max. Z(\boldsymbol{f}) = -\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$$subject\ to \quad \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E}$$

$$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

# エントロピー関数

$H(P) = -\sum_{A \in \Omega} P(A) \ln P(A)$　←　シャノンのエントロピーの定義

①全ての確率が等しい場合に最大値をとる
②どれか１つの確率が１で他が全て０の場合に最小値をとる

→　エントロピー：情報の不確定性を表す指標

# エントロピー関数の導入

$$P_k^{rs} \equiv f_k^{rs} / q_{rs}$$

$$H_{rs}(\boldsymbol{P}) \equiv -\sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs}$$ (経路選択の不確実性)

$$Z(\boldsymbol{f}) = -\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} = \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{P}) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs}$$

【 SA-1 】　→　総走行費用制約条件のもとで
エントロピー(経路選択の不確実性)を最大化

# エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

【SA-1】

$$max.\, Z(\boldsymbol{f}) = -\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$$subject\ to \quad \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E}$$

$$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

# エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

ラグランジュの未定乗数法による解法

$$L(\boldsymbol{f},\theta,\eta)=Z(\boldsymbol{f})+\theta\left\{\hat{E}-\sum_{rs}\sum_{k}f_k^{rs}c_k^{rs}\right\}+\sum_{rs}\eta_{rs}\{q_{rs}-\sum_{k}f_k^{rs}\}$$

$$f_k^{rs}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=0 \quad and \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}\leq 0\,, \qquad \theta\geq 0$$

$\sum_{rs}\sum_{k}f_k^{rs}c_k^{rs}\leq\hat{E}$
$q_{rs}=\sum_{k}f_k^{rs}$
$f_k^{rs}\geq 0$

# エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

ラグランジュの未定乗数法による解法

$$L(\boldsymbol{f},\theta,\eta)=-\sum_{rs}\sum_{k}f_k^{rs}\ln f_k^{rs}+\theta\left\{\hat{E}-\sum_{rs}\sum_{k}f_k^{rs}c_k^{rs}\right\}+\sum_{rs}\eta_{rs}\{q_{rs}-\sum_{k}f_k^{rs}\}$$

$$f_k^{rs}>0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=0 \quad \left(\because f_k^{rs}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=0\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=-(\ln f_k^{rs}+1)-\theta c_k^{rs}-\eta_{rs}=0 \leftrightarrow f_k^{rs}=\exp[-\theta c_k^{rs}]\exp[-\eta_{rs}-1]$$

$$\eta_{rs}=\ln\sum_{k}\exp[-\theta c_k^{rs}]-\ln q_{rs}-1 \quad (\because q_{rs}=\sum_{k}f_k^{rs})$$

$$f_k^{rs}=q_{rs}\frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_{k}\exp[-\theta c_k^{rs}]}$$ ←ロジットモデルに一致

# 他のエントロピーモデルの形式

【SA-1】

$$max. Z(\boldsymbol{f}) = \boxed{-\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}$$

$$subject\ to \quad \boxed{\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E}}$$

$$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

→

ある程度の秩序(総走行費用)
の元で，
経路選択の不確実性を最大化

# 他のエントロピーモデルの形式

【SA-2】

$$min.\, Z_2(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} c_k^{rs}}$$

$$subject\ to \quad \boxed{-\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \geq \widehat{H}}$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

→ ある程度の経路選択の不確実性の元で，総走行費用を最小化

# 他のエントロピーモデルの形式

【SA-3】

$$min.Z_3(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} c_k^{rs}} + \boxed{\frac{1}{\theta}\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}$$

$$subject\ to$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

→ 外生変数θのもとで
総走行費用の最小化と
エントロピーの最大化
を同時に行う

# 目次

# ３章について

確率的利用者均衡(SUE：Stochastic User Equilibrium)配分の導入

流れ

①確率的利用者均衡状態とは

②確率的利用者均衡配分モデルの定式化

# 確率的利用者均衡状態

どの利用者も

自分が経路を変更することによって,

自分の経路費用を減少させることが

できないと信じている状態

# (復習)確率的配分の定式化

↓定義

$$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs}$$
$$c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,k}^{rs}$$

↓経路kが選ばれる確率

$$P_k^{rs} = Pr.\left[U_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k}\{U_{k'}^{rs}\} \middle| t\right]$$
$$= Pr.\left[-c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k}\{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\} | t\right]$$
$$= Pr.\left[c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \geq \min_{k' \neq k}\{c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs}\} | t\right]$$

↓定理

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs}$$
$$\sum_k P_k^{rs} = 1$$
$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs}$$
$$E[x_{ij}] = \sum_{rs} \sum_k E[f_k^{rs}]\, \delta_{ij,k}^{rs}$$

↓補足

$$Var[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} (1 - P_k^{rs})$$
$$Cov[f_k^{rs}, f_{k'}^{rs}] = -q_{rs} P_k^{rs} P_{k'}^{rs}$$

# 確率的利用者均衡配分モデルの定式化

確率的配分モデルに足りていないもの　→　混雑現象の考慮

混雑現象を表すもの　→　リンクパフォーマンス関数

確率的配分モデル　＋　$\boxed{\text{リンクパフォーマンス関数}}$

＝　確率的利用者均衡配分モデル

# 確率的利用者均衡配分モデルの定式化

↓定義

$$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs}$$
$$c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij}\delta_{ij,k}^{rs}$$
$$\boxed{t_{ij} = t_{ij}(x_{ij})}$$

$$f_k^{rs} = q_{rs}\frac{\exp[-\theta c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}))]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}))]}$$

↓定理

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs}P_k^{rs}$$
$$\sum_k P_k^{rs} = 1$$
$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs}$$
$$E[x_{ij}] = \sum_{rs}\sum_k E[f_k^{rs}]\,\delta_{ij,k}^{rs}$$

↓経路kが選ばれる確率

$$P_k^{rs} = Pr.\left[U_k^{rs} \geq \max_{k'\neq k}\{U_{k'}^{rs}\}\middle|t\right]$$
$$= Pr.\left[-c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \geq \max_{k'\neq k}\{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\}\,|t\right]$$
$$= Pr.\left[c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \geq \min_{k'\neq k}\{c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs}\}\,|t\right]$$

↓補足

$$Var[f_k^{rs}] = q_{rs}P_k^{rs}(1 - P_k^{rs})$$
$$Cov[f_k^{rs}, f_{k'}^{rs}] = -q_{rs}P_k^{rs}P_{k'}^{rs}$$

# 目次

# ４章について

確率的利用者均衡配分モデル　→　最適化問題へ定式化

↓

双対問題の定式化(均衡解の性質解明，アルゴリズムの開発)

流れ

①等価最適化問題へ定式化

②①の証明

③双対問題

④双対問題の応用

⑤等価最適化問題のリンク変数による表現(アルゴリズム関連)

# 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

確率的配分　＋　利用者均衡配分　＝　確率的利用者均衡配分

最適化問題も同じと予想

# (復習)他のエントロピーモデルの形式

【SA-3】

外生変数θのもとで
総走行費用の最小化と
エントロピーの最大化
を同時に行う

$$min.Z_3(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} c_k^{rs}} + \boxed{\frac{1}{\theta}\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}$$

$$-\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} = \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{P}) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs}$$

*subject to*

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

$$min.Z_3'(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs} c_k^{rs}} - \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$

↑これを利用者均衡配分の
最適化問題の式に置き換える

# 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題(予想)

【SUE/FD-path】

$$min.\, Z(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\, d\omega} - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$

$$subject\ to \quad x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs}\, \delta_{ij,k}^{rs}$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

$$\boxed{H_{rs}(\boldsymbol{P}) \equiv -\sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} = -\sum_k \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}}$$

# 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題(証明)

ラグランジュ関数

$$L(\boldsymbol{f},\eta) = Z_L\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})\big) + Z_H(\boldsymbol{f}) + \sum_{rs}\eta_{rs}\{q_{rs} - \sum_{k} f_k^{rs}\}$$

$$Z_L\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})\big) \equiv \sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\,d\omega \quad , \quad Z_H(\boldsymbol{f}) \equiv -\frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs}H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$

KKT条件

$$f_k^{rs}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad and \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$x_{ij} = \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs}\,\delta_{ij,k}^{rs} \quad and \quad q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs} \quad and \quad f_k^{rs} \geq 0$$

# 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題(証明)

$$\frac{\partial Z_L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial Z_L}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial f_k^{rs}} = \sum_{ij} t_{ij}\left(x_{ij}\right)\delta_{ij,k}^{rs} = c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}))$$

$$\frac{\partial Z_H}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}}\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs}\left(-\sum_{k} \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \ln \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\right)\right\} = \frac{1}{\theta}(\ln f_k^{rs} - \ln q_{rs} + 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f})) + \frac{1}{\theta}(\ln f_k^{rs} - \ln q_{rs} + 1) - \eta_{rs}$$

# 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題(証明)

$$f_k^{rs} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad \left(\because f_k^{rs} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0\right)$$

$$c_k^{rs} + \frac{1}{\theta}(\ln f_k^{rs} - \ln q_{rs} + 1) - \eta_{rs} = 0 \leftrightarrow f_k^{rs} = q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs} + \theta \eta_{rs} - 1]$$

$$\eta_{rs} = \frac{1}{\theta}(-\ln \textstyle\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] + 1) \quad (\because q_{rs} = \textstyle\sum_k f_k^{rs})$$

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}))]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}))]}$$ ←SUEの定義に一致

# 双対問題

リンクパフォーマンス関数：$t_{ij} = t_{ij}(x_{ij})$

→　リンク交通量とリンクコストの関係式

目的関数の変数　→　リンク交通量

双対

目的関数の変数　→　リンクコスト

# (復習)確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

【SUE/FD-path】

$$min. Z(\boldsymbol{f}) = \boxed{\sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\,d\omega} - \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs}H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$

$$subject\ to \quad x_{ij} = \sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\,\delta_{ij,k}^{rs}$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

$$\boxed{H_{rs}(\boldsymbol{P}) \equiv -\sum_k P_k^{rs}\ln P_k^{rs} = -\sum_k \frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}}$$

# 双対問題の求め方(簡単に)

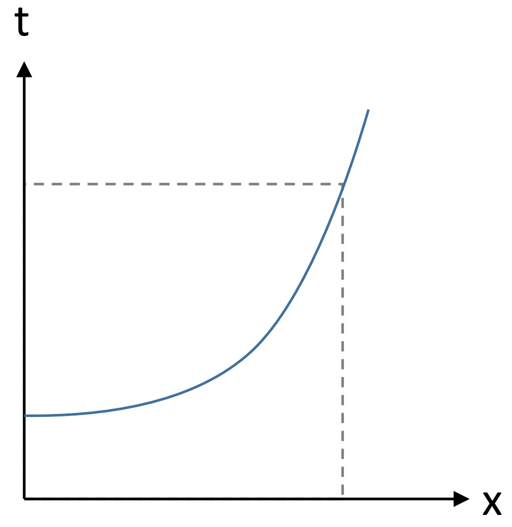
$$\max_{\tau,\eta}. L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}, \tau, \eta) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\, d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$
$$+ \sum_{ij} \tau_{ij}\left(x_{ij} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs}\, \delta_{ij,k}^{rs}\right) + \sum_{rs} \eta_{rs}\left(q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\right)$$

<u>KKT条件</u>

$$\partial \mathrm{L}/\partial f_k^{rs} = 0 \quad and \quad \partial \mathrm{L}/\partial x_{ij} = 0 \quad and \quad \partial \mathrm{L}/\partial \tau = 0 \quad and \quad \partial \mathrm{L}/\partial \eta = 0$$

<u>その他恒等式</u>

$$\sum_{ij} t_{ij} x_{ij} - \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega = \sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(\nu) d\nu$$




以上の式を用いてLの変数をtのみに

# 双対問題

【SUE/FD-Dual】

$$max. Z_D(\boldsymbol{t}) = -\sum_{ij}\int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v)dv + \sum_{rs} q_{rs}S_{rs}(c^{rs}(\boldsymbol{t}))$$

$$\boxed{S_{rs}(c^{rs}) = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{k\in R_{rs}}\exp[-\theta c_k^{rs}]}$$

↑ロジットモデル

期待最小費用関数の関数型　←　各種確率モデル

【SUE/FD-path】の一般化

# 双対問題の応用(料金設定問題)

リンク所要時間($t_{ij}$)　→　リンクの一般化コスト($\hat{c}_{ij} \equiv \omega t_{ij} + \boxed{e_{ij}}$)

↑道路料金

＋

望ましいリンク交通量パターン：$\bar{x} = (\cdots, \bar{x}_{ij}, \cdots)$

⇩

【SUE/FD-RE】

$$max. Z_D(\boldsymbol{c}) = -\sum_{ij} \bar{x}_{ij}\hat{c}_{ij} + \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(c^{rs}(\hat{\boldsymbol{c}}))$$

$$\hat{c}_{ij} \equiv \omega t_{ij}(\bar{x}_{ij}) + e_{ij}$$

$\hat{\boldsymbol{c}}$の最適値→最適料金$e$

# 最適化問題のリンク変数による表現

一般的なネットワーク　→　経路数が膨大　→　経路変数は望ましくない

【SUE/FD-path】

$$min.\, Z(\boldsymbol{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\, d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(\boldsymbol{f}^{rs})$$

$$subject\ to \quad x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs}\, \delta_{ij,k}^{rs}$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

# 最適化問題のリンク変数による表現

【SUE/FD-arc】

$$min. Z(\boldsymbol{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\, d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_r \{HL(\boldsymbol{x}^r) - HN(\boldsymbol{x}^r)\}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s q_{rs}\delta_{rk} - q_{rs}\delta_{sk} = 0$$

$$x_{ij} = \sum_r x_{ij}^r$$

$$x_{ij}^r > 0$$

$$HN(\boldsymbol{x}^r) \equiv -\sum_j \left(\sum_i x_{ij}^r\right) \ln\left(\sum_i x_{ij}^r\right)$$

$$HL(\boldsymbol{x}^r) \equiv -\sum_j x_{ij}^r \ln x_{ij}^r$$

# 目次

# 5 章について

## ( 1 )逐次平均法

・各種経路選択モデルに対するSUE配分に適用可能
・収束が遅い

## ( 2 )部分線形化法

・起点別リンク交通量を未知数
・Logit型SUE配分専用
・収束が速い

## ( 3 )Simplicial Decomposition法

・経路交通量を未知数
・Logit型SUE配分専用
・収束が速い

<u>意識してほしいこと</u>

一般的なネットワークでは経路交通量変数が膨大
↓
これをどう避けるのか

# (復習)Frank-Wolfe法

ステップA　(降下方向$d=y-x^{(n)}$の探索)

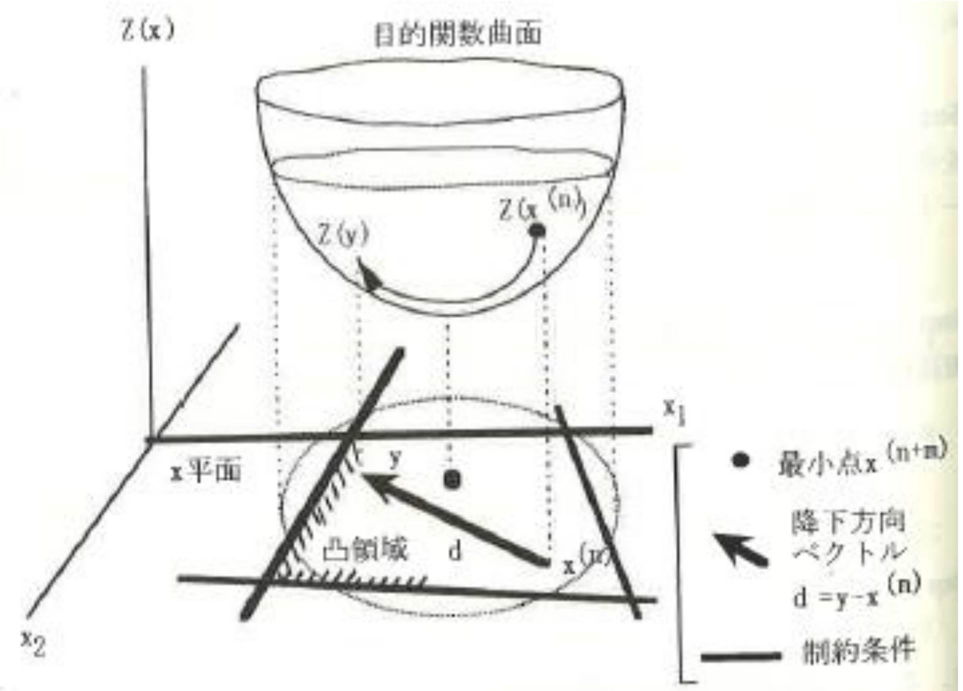
①リンク交通量ベクトル$x^{(n)}$において目的関数を線形近似

②線形近似した式を主変数を$y$として制約条件下で最小化(all-nothing配分)

ステップB　(ステップサイズαの一次元探索)

①$x^{(n+1)}=x^{(n)}+\alpha(y-x^{(n)})$　$(\alpha \in [0,1])$　とする

②$x^{(n+1)}$を目的関数に代入しαによる一次元探索



# 逐次平均法(Method of Successive Averages)

ステップA（降下方向d=y-$x^{(n)}$の探索)

①リンク交通量ベクトル$x^{(n)}$において目的関数を部分線形近似

$$min.\, \hat{Z}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^{(n)}) \cdot \boldsymbol{y} + \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_{k} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

②線形近似式の主変数をyとして制約条件下で最小化(Dial配分とか)

ステップB　(ステップサイズαを決める)

①$\boxed{\alpha_n = 1/n \quad \text{とする}}$ ← 目的関数に経路変数(膨大な数)が含まれており，
一次元探索の際，値が評価できないから

# 逐次平均法(Method of Successive Averages)

ちなみに…

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{n} + \alpha_n\left(\boldsymbol{y}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{n}\right) = (1-\alpha_n)\boldsymbol{x}^{n} + \alpha_n \boldsymbol{y}^{(n)}$$

$$= (1-\alpha_n)((1-\alpha_{n-1})\boldsymbol{x}^{n-1} + \alpha_{n-1}\boldsymbol{y}^{(n-1)}) + \alpha_n \boldsymbol{y}^{(n)}$$

$$= (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})\cdots(1-\alpha_1)\boldsymbol{x}^{1} + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{y}^{(m)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{y}^{(m)}}$$ ←補助解yを時系列平均したもの

# (復習)最適化問題のリンク変数による表現

【SUE/FD-arc】

$$min. Z(\boldsymbol{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)\, d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_r \{HL(\boldsymbol{x}^r) - HN(\boldsymbol{x}^r)\}$$

$$subject\ to$$

$$HN(\boldsymbol{x}^r) \equiv -\sum_j (\sum_i x_{ij}^r) \ln(\sum_i x_{ij}^r)$$

$$HL(\boldsymbol{x}^r) \equiv -\sum_j x_{ij}^r \ln x_{ij}^r$$

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s q_{rs}\delta_{rk} - q_{rs}\delta_{sk} = 0$$

$$x_{ij} = \sum_r x_{ij}^r$$

$$x_{ij}^r > 0$$

# 起点別リンク交通量を未知数とした部分線形化法(PL)

逐次平均法は収束が遅すぎる…

起点別リンク交通量を変数　→　膨大な経路交通量変数を回避

Frank-Wolfe法
ステップA
最短経路配分によるyの求解

ステップB
αの一次元探索

PL法
ステップA
Dial配分/Markov配分によるyの求解

ステップB
αの一次元探索

# 起点別リンク交通量を未知数とした部分線形化法(PL)

Q，どのくらい収束時間が違うの？？

表-9.1 部分線形化法(PL)と逐次平均法(MSA)の収束状況の比較（$\theta$=10.0)

| 繰返回数 | 平均誤差 $\varepsilon_1$ | | 最大誤差 $\varepsilon_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | MSA | PL | MSA | PL |
| 1 | 41.322 | 25.325 | 221.835 | 82.328 |
| 2 | 22.039 | 14.864 | 114.557 | 58.643 |
| 3 | 16.032 | 8.613 | 69.852 | 27.221 |
| 4 | 11.281 | 4.341 | 35.882 | 17.932 |
| 5 | 8.212 | 2.485 | 19.309 | 11.160 |
| 6 | 6.721 | 0.567 | 17.060 | 2.485 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 100 | 5.361 | 0.000 | 9.801 | 0.000 |

# 経路交通量を未知数としたSimplicialDecomposition法

経路に固有の属性や経路の情報を知りたい場合

↓

経路変数と向き合う必要性

↓

SimplicialDecomposition法(経路交通量を未知変数とする)

一般的には，大規模なネットワークへの適用は困難

↓

それほど規模の大きくないネットワークの分析や

豊富な計算機資源があれば有効(計算機性能の向上により改善)

# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

全経路集合を扱うのは困難　→　経路集合を限定(徐々に拡張)

現実の交通量パターンでも,
かなりの割合の交通量が
ごく限られた本数の経路に流れている

Simplicial Decomposition法

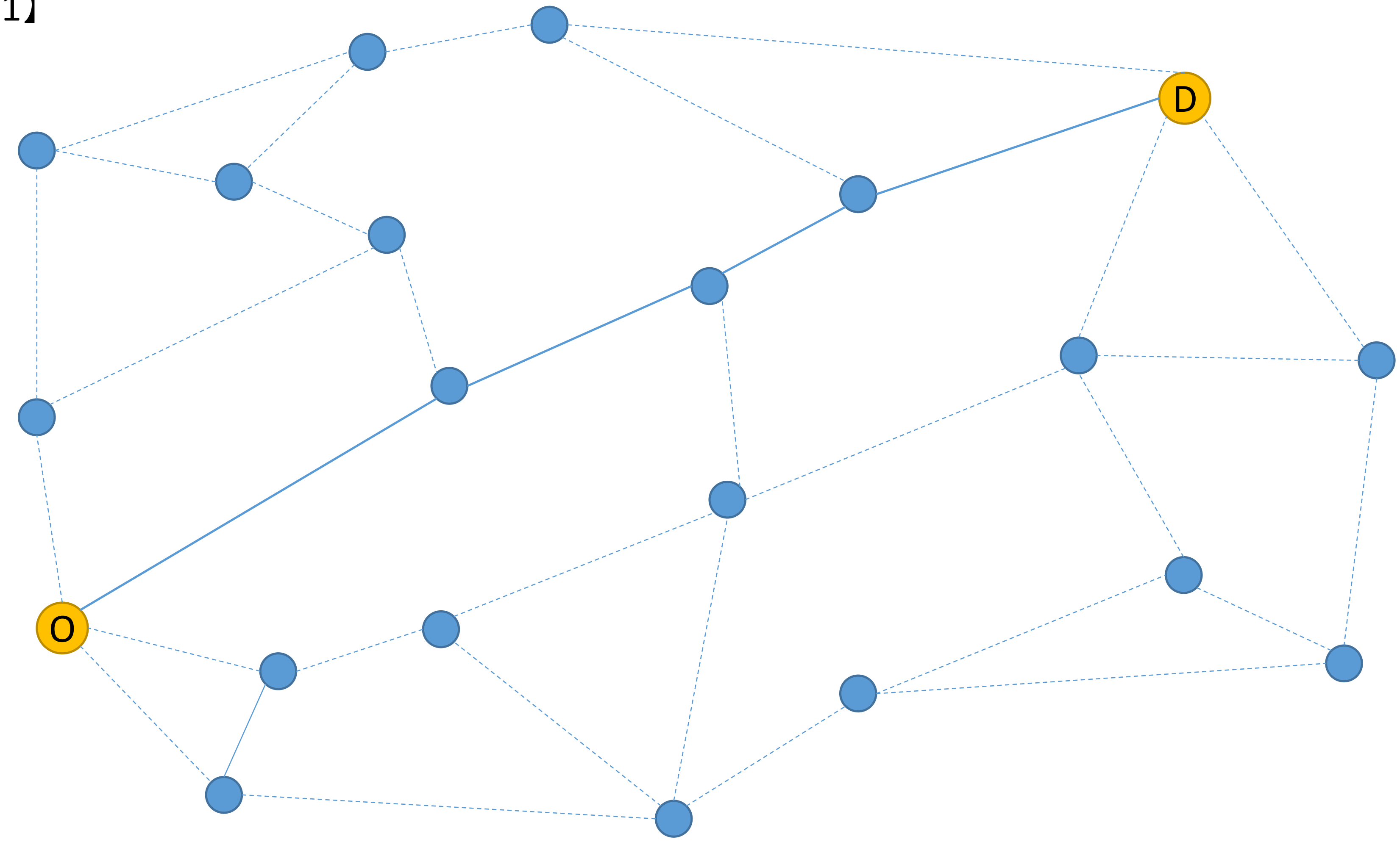
限定親問題フェイズ
　限定された経路集合をもとに
　経路交通量を未知変数とした部分線形化法を行う

経路追加できなくなり次第
終了

経路生成フェイズ
　上で求めた経路交通量下で全経路集合をもとに最短経路配分
　→利用される経路を追加
　(※ロジットモデルのIIA特性緩和のため,
　　限定集合にすでに含まれる経路と類似した経路は削除)

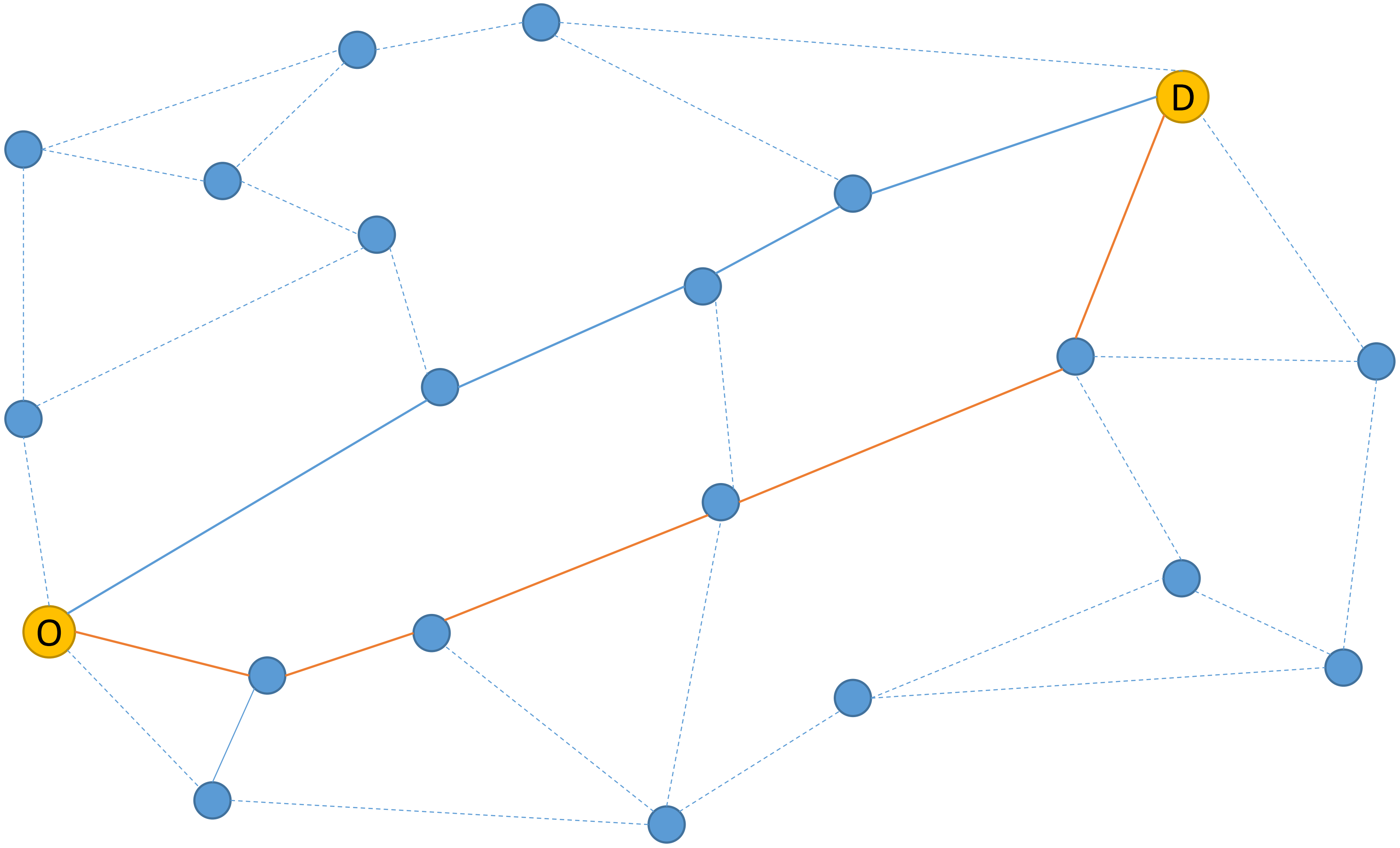
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【限定親問題-1】



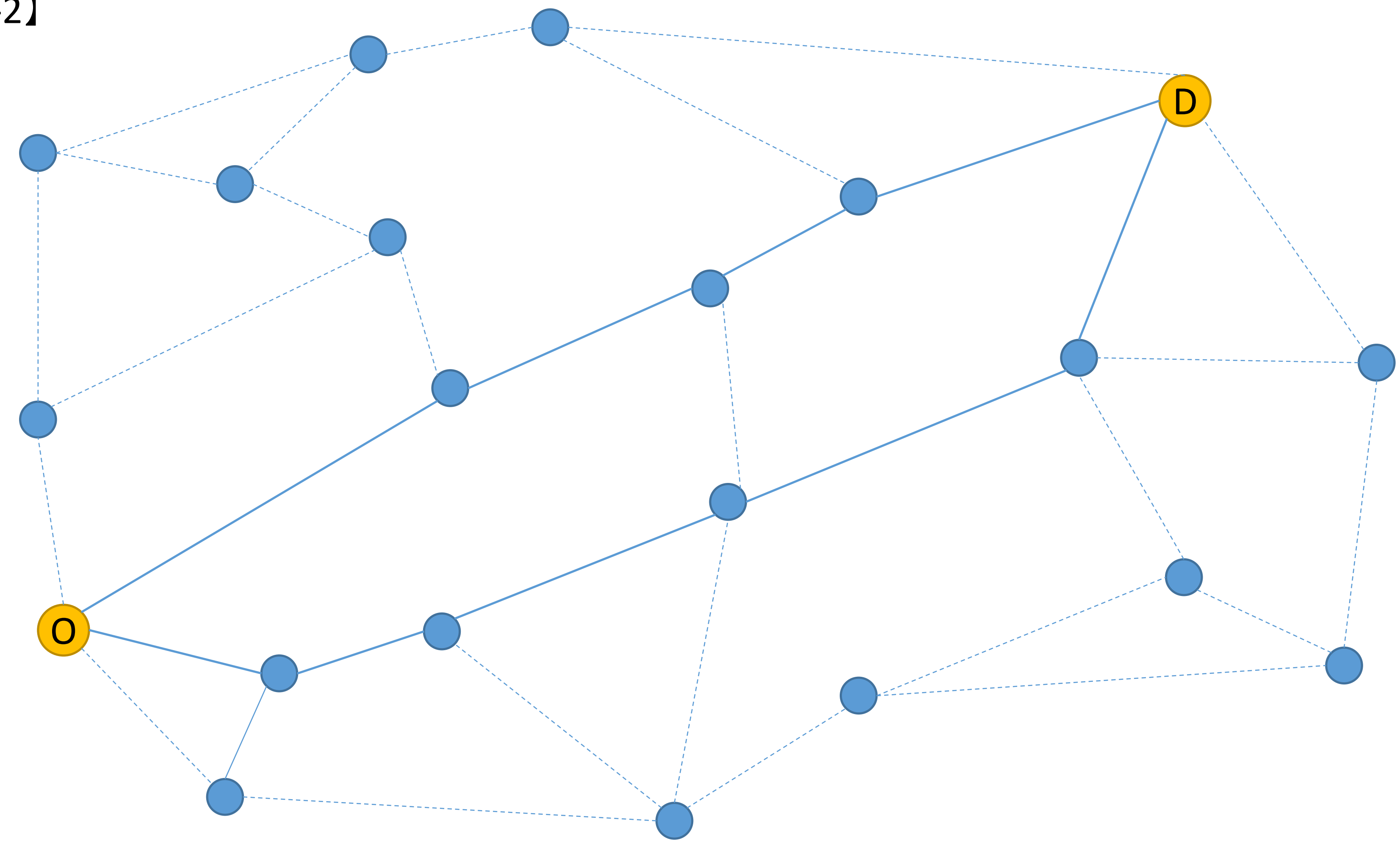
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【経路生成-1】



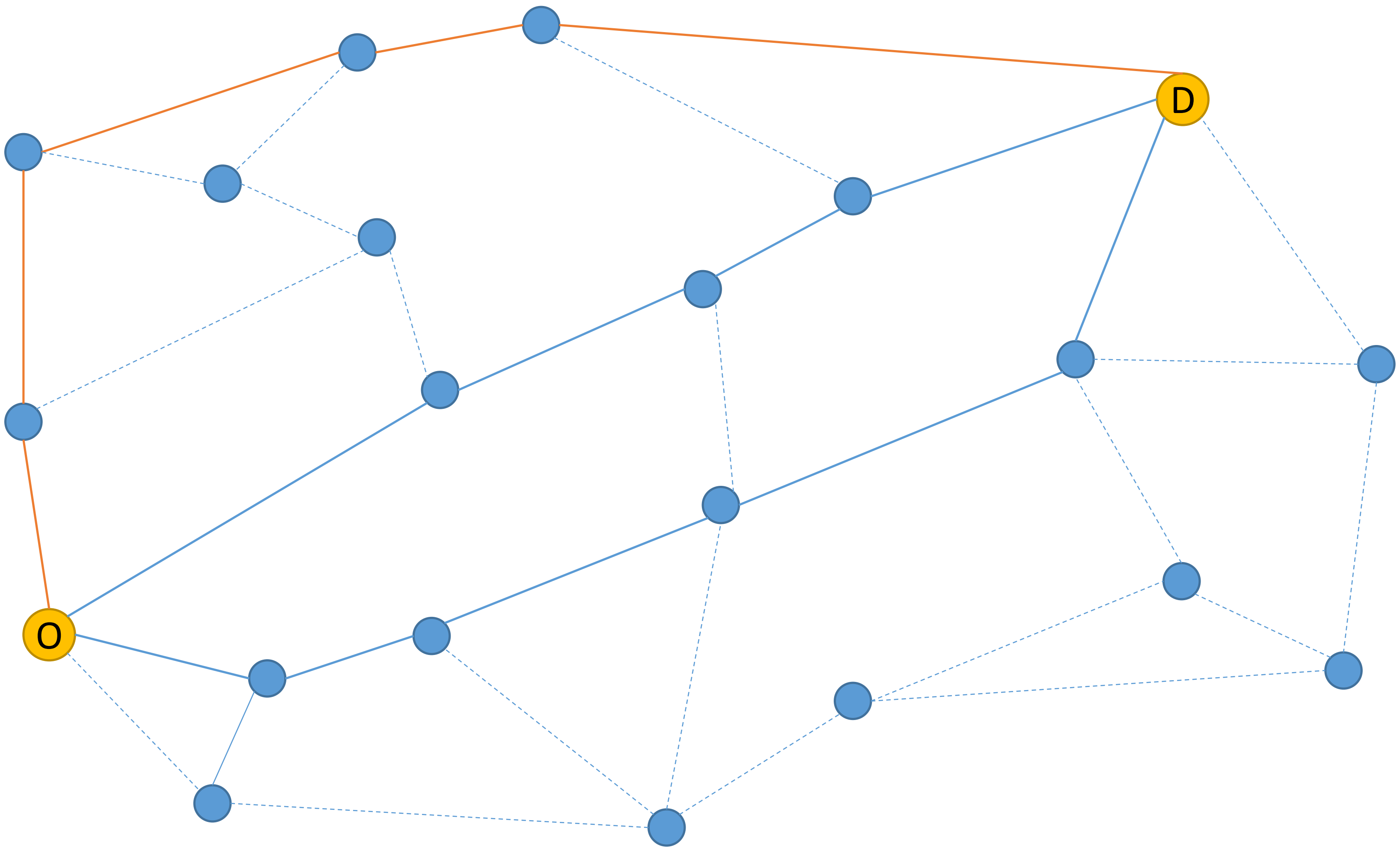
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【限定親問題-2】



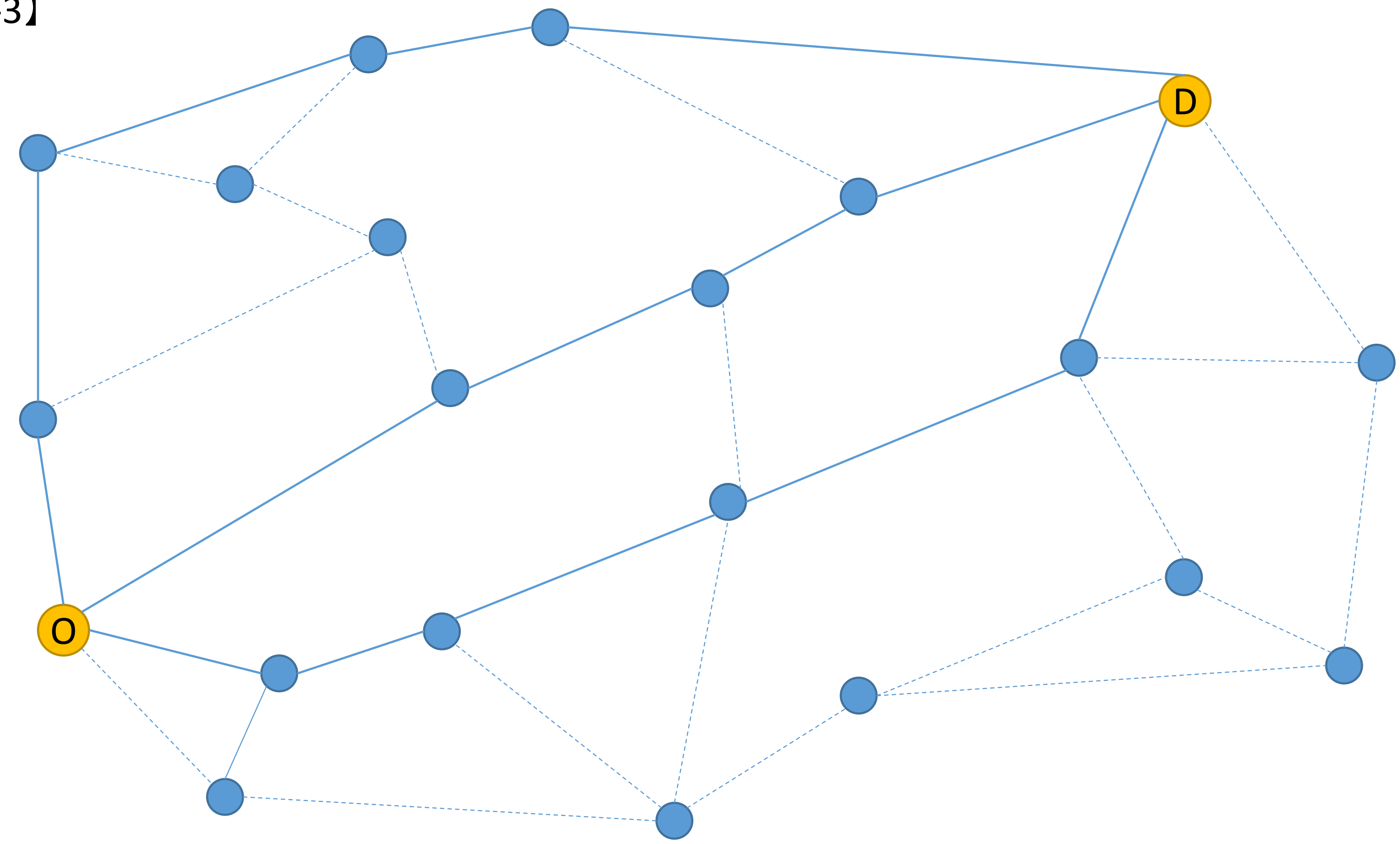
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【経路生成-2】



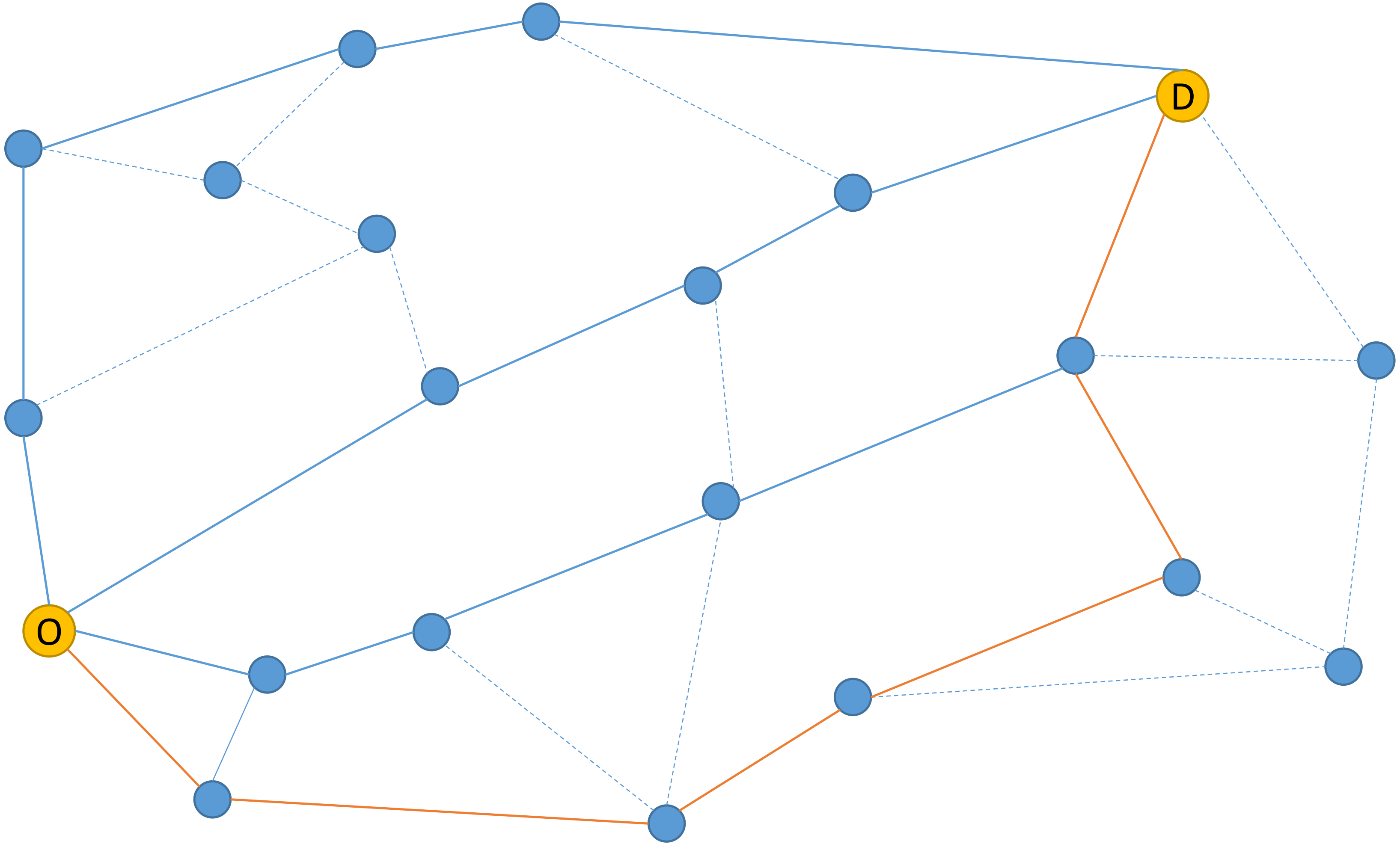
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【限定親問題-3】



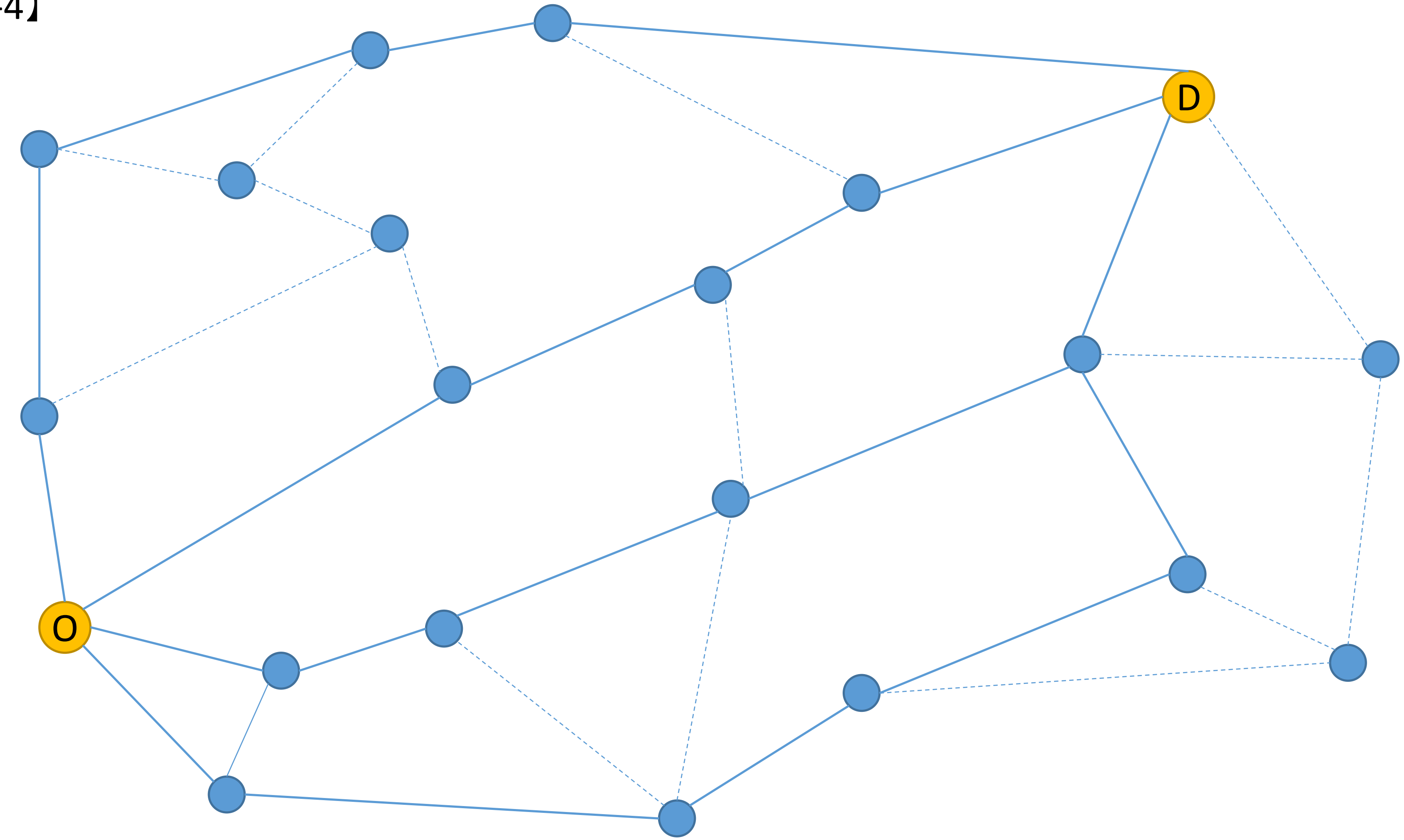
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【経路生成-3】



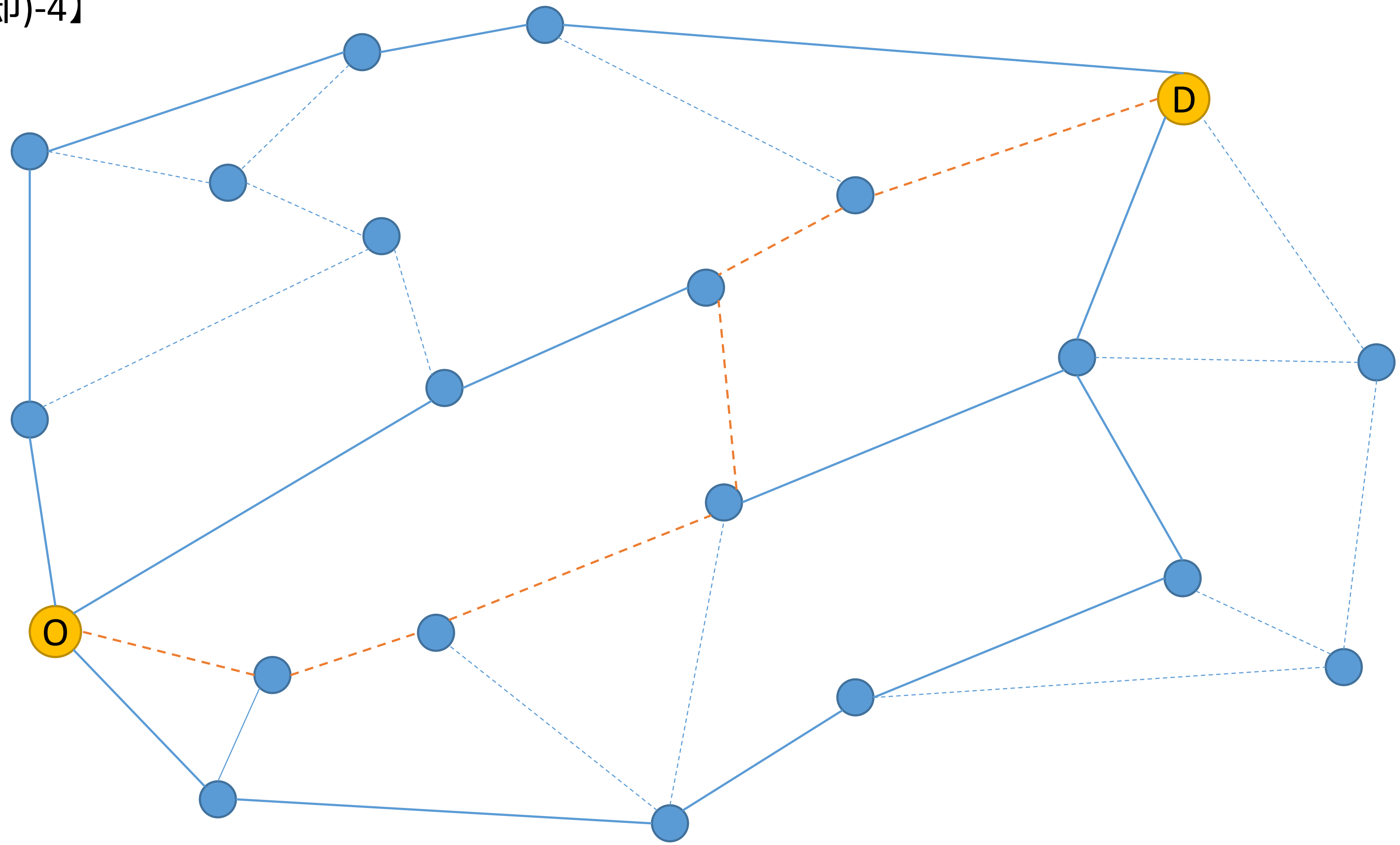
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【限定親問題-4】



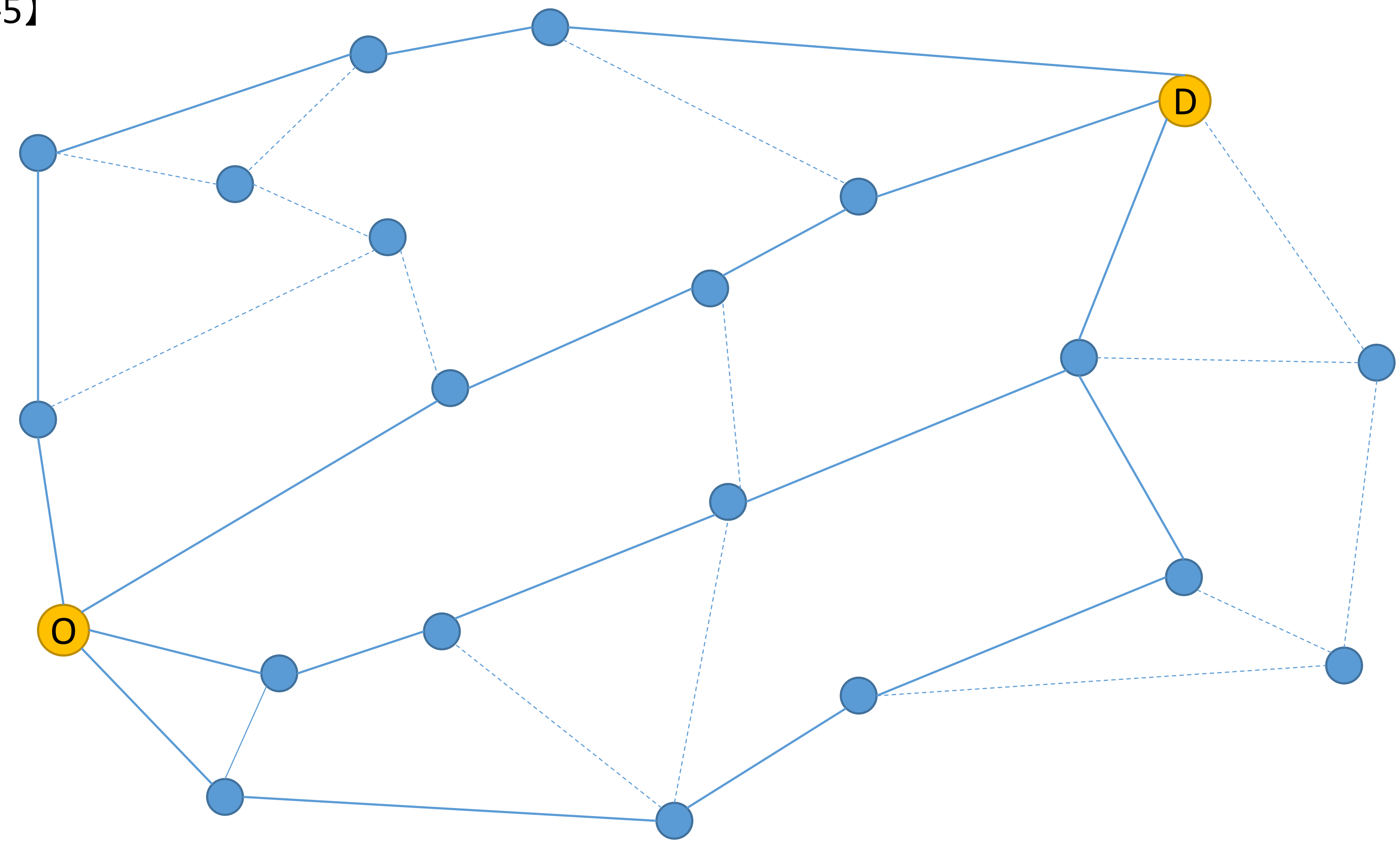
# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【経路生成(棄却)-4】



# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【限定親問題-5】



# 経路交通量を未知数としたSimplicial Decomposition法

【経路生成(失敗)-5】

↓

終了