

確率的利用者均衡配分モデル (Stochastic User Equilibrium)

理論勉強会#5 (2016/5/23)

山本正太郎

目次

0. はじめに

1. 確率的配分モデル

- 1-1. 確率的配分モデルの定式化
- 1-2. 確率的配分モデルの分類
- 1-3. 期待最大効用と期待最小費用

2. エントロピー・モデル

- 2-1. エントロピー・モデルについて
- 2-2. エントロピーモデルとロジット・モデルの等価性
- 2-3. 様々なエントロピーモデル

3. 確率的利用者均衡配分

- 3-1. 確率的利用者均衡状態
- 3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題
- 3-3. 双対問題
- 3-4. リンク変数による表現

0. はじめに

利用者均衡モデル

「全ての利用者がネットワークの状況について完全な情報を持ち、最短経路を選択する」という仮定の下で交通量を配分

実際の利用者行動ではありえない非現実的な仮定

確率的利用者均衡配分モデル

利用者均衡モデルでは考慮されていなかった

- ・ 利用者の経路選択行動のばらつき
 - ・ 混雑状況
- を含めて交通量を配分

1. 確率的配分モデル

確率的利用者均衡配分を理解するための準備段階として、ランダム効用理論に基づいた「確率的配分」から導入する

「確率的配分」とは

リンクコストがフローの量によって変化しない（**混雑しない**）という仮定のもとで、利用者の選択行動のばらつきを考慮した配分モデルのこと。

1-1. 確率的配分モデルの定式化

<定式化>

利用者の効用は経路費用が小さいほど大きいと考えられる。

そこで、ODペア(r, s)の k 番目経路の効用関数を

$$U_k^{rs} = -c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \quad \text{---(1.1)}$$

と定義する。

ここで、 ξ は利用者の認知誤差を表す確率的変数である。また、経路費用 c は、その経路上のリンクコストの和である。すなわち、

$$c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij} \delta_{ij,k}^{rs} \quad \text{---(1.2)}$$

t_{ij} はノード ij 間の移動時間、 $\delta_{ij,k}^{rs}$ はダミー変数である。

1-1. 確率的配分モデルの定式化

このとき、経路を利用者の選択肢と考えれば、ランダム効用理論により、ODペア (r, s) の k 番目経路が選択される確率は、

$$\begin{aligned} P_k^{rs} &= Pr. [U_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{U_{k'}^{rs}\} | t] \\ &= Pr. [-c_k^{rs} + \xi_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{-c_{k'}^{rs} + \xi_{k'}^{rs}\} | t] \quad - (1.3) \\ &= Pr. [c_k^{rs} - \xi_k^{rs} \geq \max_{k' \neq k} \{c_{k'}^{rs} - \xi_{k'}^{rs}\} | t] \end{aligned}$$

で与えられる。そして、この経路の交通量 f_k^{rs} の期待値は、この経路選択率を用いて、

$$E[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} \quad - (1.4)$$

従って、

$$\sum_k E[f_k^{rs}] = q_{rs} \quad - (1.5) \quad \text{が成り立つ。}$$

1-1. 確率的配分モデルの定式化

また、リンク交通量の期待値は、経路・リンク交通量の関係から

$$E[x_{ij}] = \sum_{rs} \sum_k E[f_k^{rs}] \delta_{ij,k}^{rs} \quad - (1.6)$$

なお、経路交通量の分散、共分散は以下のように与えられる

$$\text{Var}[f_k^{rs}] = q_{rs} P_k^{rs} \quad - (1.7)$$

$$\text{Cov}[f_k^{rs}, f_{k'}^{rs}] = -q_{rs} P_k^{rs} P_{k'}^{rs} \quad - (1.8)$$

以上 (1.1) ~ (1.8) の式が、確率的配分モデルに関する一般的な定式化である。

一般的な上記の定式化について、確率的選択モデルの具体的な決定に関しては様々なバリエーションがある。

1-2. 確率的配分モデルの分類

A. 誤差項の確率分布

1. 誤差項がガンベル分布に従う

→ロジットモデル

2. 誤差項が正規分布に従う

→プロビットモデル

(ロジットモデルの場合)

$$f_k^{rs} = \frac{q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp[-\theta c_{k'}^{rs}]}$$

B. 選択対象とする経路集合

1. 全てのsimple path の集合

2. simple path 集合をさらに限定

3. 限定無し (全ての可能経路)

※simple path・・・同一リンクを二度以上通過しない経路

1-3. 期待最大効用と期待最小費用

(最大効用の期待値)

$$S^* = E[\max_m \{U_m = V_m + \varepsilon_m\}]$$

→ 認知した効用の選択者集団全体での平均値

⇒ 期待最大効用 (inclusive cost)

期待最大効用関数及び期待最小費用関数の性質

⇒ 誤差項の分布を決めれば、測定可能効用 V で表せる

1-3. 期待最大効用と期待最小費用

(ロジットモデルの場合)

期待最大効用関数の誤差項がパラメータ (η, θ) のガンベル分布に従うならば、ガンベル分布の性質より

$$S^*(V) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k] + \eta + \frac{\gamma}{\theta}$$

特に、誤差項の平均値（期待値） $\eta + \frac{\gamma}{\theta}$ が0ならば

$$S^*(V) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{k=1}^K \exp[\theta V_k]$$

と書くことができる。

1-3. 期待最大効用と期待最小費用

(期待最大効用関数の性質)

1. $\frac{\partial s^*(V)}{\partial v_k} = P_k(V)$

(測定可能効用に対する期待最大効用の変化率が選択確率となる)

2. v に関して連続・微分可能な狭義凸関数である
3. 選択肢集合中のどの効用よりも大きい
4. 選択肢集合のサイズに関して単調増加関数である

1-3. 期待最大効用と期待最小費用

以上のモデルにおいて、「効用を最大化する」とは「確率的な認知費用を最小化する」ことと同義である。

そこで、ODペア (r, s) の最小認知費用の期待値（期待最小費用）を以下のように定義する。

$$S_{rs}(c^{rs}) = E[\min_{k \in R_{rs}} \{\tilde{c}_k^{rs}\}] \quad (\tilde{c}_k^{rs} := c_k^{rs} - \xi_k^{rs})$$

この関数は、期待最大効用関数の符号を逆にしたものである。

ロジットモデルにあてはめると

$$S_{rs}(c^{rs}) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{k \in R_{rs}} \exp[-\theta c_k^{rs}]$$

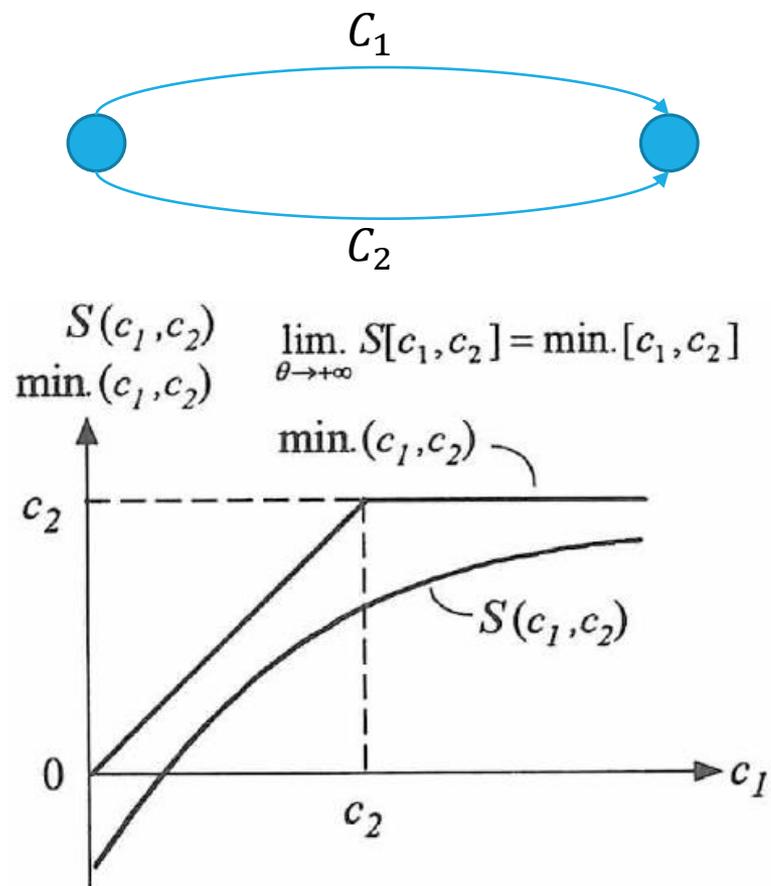
1-3. 期待最大効用と期待最小費用

たとえば、2つのノードが2本のリンクによって結ばれている簡単なネットワークを考える。

このとき、 c_2 を固定すると、最小費用 $\min\{c_1, c_2\}$ は右のグラフのようになる。

一方、 $S(c_1, c_2)$ は、適当な値 θ に対しては右図中の曲線のように描かれる。

期待最小費用曲線は常に最小費用関数よりも下にあるが、 $\theta \rightarrow \infty$ とすると最小費用関数と一致する。



2. エントロピー・モデル

前節で定式化されたロジット型の確率的配分を、**最適化問題**として表現する。

ロジットモデルと等価な最適化問題について、統計力学や情報理論において用いられる**エントロピーモデル**の概念を用いた簡単な方法を示す。

エントロピーとは？

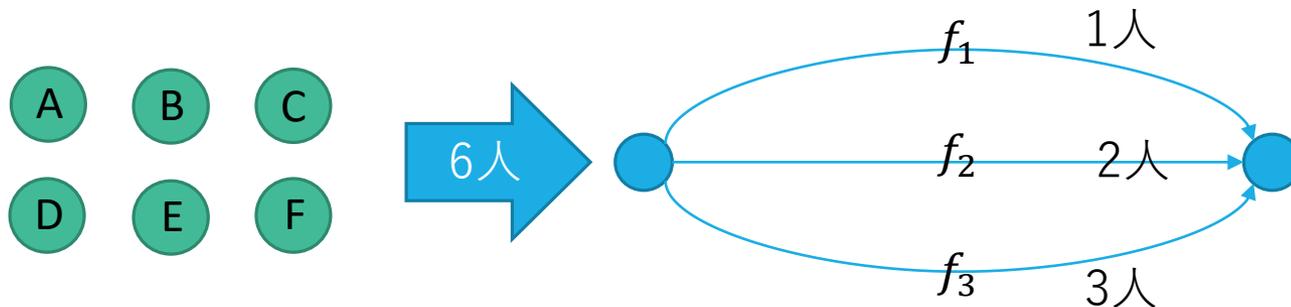
熱力学および統計力学において定義される示量性の状態量である。熱力学において断熱条件下での不可逆性を表す指標として導入され、統計力学において系の微視的な「**乱雑さ**」を表す**物理量**という意味付けがなされた。(wikipediaより)

2-1. エントロピー・モデルについて

交通量と個々の利用者の選択パターンとの関係を考える。

確率的に最も起こりやすい経路交通量パターンを導くことを考えると、経路交通量パターンに対応する**状態数**が最大となるものを考えればよい。

例えば、6人の利用者が3本の経路に $\{f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3\}$ というパターンで配分されている場合を考えると、このパターンに対応する状態数は ${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 60$ (通り) ある。



2-1. エントロピー・モデルについて

ここで、あるOD交通量 $\{q_{rs}\}$ が与えられたときに、各々のOD交通量 q_{rs} を経路交通量 f_k^{rs} に分割する最大の状態数 N は、以下の式で与えられる。

$$N(f) = \prod_r \prod_s q_{rs} ! / \prod_k f_k^{rs} !$$

対数をとって

$$\ln N(f) = \sum_r \sum_s \{ \ln q_{rs} ! - \sum_k \ln f_k^{rs} ! \}$$

この対数を最大化すればよいから、目的関数はStirlingの公式($\ln x! \approx x \ln x - x$)を用いて、

$$\max. \ln N(f) = \sum_r \sum_s \{ q_{rs} \ln q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \}$$

と書ける。

2-1. エントロピー・モデルについて

さらに、先ほどの目的関数において q は所与であるから、 q に関する項は省略して、 f に関する項のみを考えればよい。

$$\max. \ln N(f) = \sum_r \sum_s \{ \underbrace{q_{rs} \ln q_{rs}}_{\text{所与}} - \underbrace{\sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}_{\text{最大化}} \}$$

ここで、ネットワーク全体の総走行費用が高々 \hat{E} であることが観測によってわかっているとすると、観測情報に最も整合的で、かつ最も起こりやすい交通量パターンを求めるには、次の最適化問題を考えればよいことになる。

2-1. エントロピー・モデルについて

【SA-1】

$$\max. Z(f) = -\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \quad - \quad (2.1)$$

subject to

$$\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E} \quad - \quad (2.2)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad - \quad (2.3)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - \quad (2.4)$$

2-1. エントロピー・モデルについて

最適化問題【SA-1】の目的関数 $Z(f)$ は、経路交通量 f を確率に置き換えれば、情報理論において、Shannonの（情報論的）エントロピーと呼ばれている関数となる。

Shannonのエントロピー関数

$$H(P) = -\sum_{A \in \Omega} P(A) \ln P(A)$$

いま、 $P_k^{rs} := f_k^{rs} / q_{rs}$ とおけば P は経路選択確率とみなせるから、各ODペアについて、経路選択確率 P のエントロピー H_{rs} を
 $H_{rs}(P) := -\sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs}$ と定義すると、目的関数 $Z(f)$ は以下のよう
に書ける。

$$Z(f) = \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(P) - \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \quad - (2.5)$$

2-1. エントロピー・モデルについて

(エントロピー関数の性質)

1. エントロピー関数は、全ての確率が等しい場合に最大値をとる
2. エントロピー関数は、どれか1つの確率が1で他が全て0の場合に最小値をとる

これらの性質から、エントロピー関数は「**各経路へのフローのばらつき具合**」や「**経路選択の不確定性**」を表していることが分かる。つまり、経路交通量が様々な経路にランダムに分散するほどエントロピーの値は大きくなる。

2-2. エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

最適化問題【SA-1】がロジット型配分モデルと等価であることを示す。

1. 解の一意性の確認

エントロピー H_{rs} のHessian, $\nabla^2 H$ を考える。

各要素は $k = l$ のとき $-\frac{1}{P_k}$, それ以外のとき 0 なので

$$\nabla^2 H = \begin{bmatrix} -1/P_k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & -1/P_k & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1/P_k \end{bmatrix} \quad \text{となり、}$$

任意の実数ベクトル r についてのHessianの2次形式を考えると

$$r \nabla^2 H r^T = -\sum_k r_k^2 / P_k \text{となる。}$$

2-2. エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

(つづき)

2次形式 $r \nabla^2 H r^T = -\sum_k r_k^2 / P_k$ について、

$P_k \geq 0 \ \forall k$ なので *Hessian* は負定値である。したがって、目的関数 $Z(f)$ は、 f に関して **狭義凹** である。

さらに、 f の実行可能領域について、

制約条件が線形式と非負条件のみであることから実行可能領域は **閉凸集合** であり、サイクリックな経路を考えなければ実行可能領域は **有界** である。

したがって、最適化問題 **【SA-1】** の解の一意性が証明された。

2-2. エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

b) エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

最適化問題【SA-1】は以下のように解ける。

$$L(f, \theta, \eta) = Z(f) + \theta \{ \hat{E} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \} + \sum_{rs} \eta_{rs} \{ q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \}$$

と定義する (θ, η はラグランジュ乗数)

その最適条件は、KKT条件より、

$$f_k^{rs} \cdot \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0 \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (2.6)$$

$$\theta \geq 0, \quad - (2.7)$$

$$\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \leq \hat{E} \quad - (2.8)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad - (2.9)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (2.10)$$

2-2. エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

$f_k^{rs} \cdot \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0$ について、 $f_k^{rs} > 0$ とすると、

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = -\ln f_k^{rs} - 1 - \theta c_k^{rs} - \eta_{rs} = 0 \text{ より}$$

$$f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[-\eta_{rs} - 1] \quad \text{— (2.11)}$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q^{rs} \text{ より}$$

$$\sum_k (\exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[-\eta_{rs} - 1]) = q^{rs}$$

$$\eta_{rs} = \ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] - \ln q_{rs} - 1$$

式(2.11)に代入して

$$f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[-\ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] + \ln q_{rs}]$$

$$= \boxed{q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]}} \quad \text{— (2.12)}$$

2-2. エントロピーモデルとロジットモデルの等価性

$f_k^{rs} = 0$ ならば、 $-\ln f_k^{rs} \rightarrow +\infty$ であるから、最適条件 $\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \leq 0$ と矛盾する。

したがって、以上の議論からエントロピー最大化モデルがロジット型配分モデルと等価であることが証明された。

ただ、このモデル

$$L(f, \theta, \eta) = Z(f) + \theta \{ \hat{E} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \} + \sum_{rs} \eta_{rs} \{ q_{rs} - \sum_k f_k^{rs} \}$$

におけるパラメータ θ は、観測された総走行費用 \hat{E} に応じて自動的に決まる。

2-3. 様々なエントロピーモデル

A) コスト最小化モデル

今度は、総走行費用 \hat{E} ではなく、**エントロピー \hat{H}** が観測された条件下で交通量パターンを予測することを考える。

$$\min Z_2(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} \quad \text{— (2.13)}$$

subject to

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \text{— (2.14)}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \text{— (2.15)}$$

$$-\sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \geq \hat{H} \quad \text{— (2.16)}$$

これもやはり、ロジットモデルに帰着する

2-3. 様々なエントロピーモデル

簡単に証明

ラグランジュ乗数をそれぞれ $-\frac{1}{\theta}, \eta_{rs}$ とおくと、

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = c_k^{rs} + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} \ln f_k^{rs} - \eta_{rs} = 0$$

$$f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[\theta \eta_{rs} - 1] \quad \forall k \in R_{rs}, \forall (r, s) \in W$$

$$\therefore \eta_{rs} = -1/\theta \ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] + 1/\theta \ln q_{rs} + 1/\theta$$

$$\therefore f_k^{rs} = \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[-\ln \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] + \ln q_{rs}]$$

$$= q_{rs} \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]}$$

2-3. 様々なエントロピーモデル

B) エントロピーコスト調和モデル

→エントロピー関数の最大化+コスト関数の最小化

(最小化問題)

$$\min. Z_3(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} + 1/\theta \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

これもロジット型配分モデルと等価である（証明は省略）

ここで、 $\theta \rightarrow \infty$ とすればエントロピー項 $\rightarrow 0$ となってコスト項のみが残り、**最短経路配分モデルと一致する**

2-3. 様々なエントロピーモデル

B) エントロピーコスト調和モデル

$$\min. Z_3(f) = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} c_k^{rs} + 1/\theta \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs}$$

$\theta \rightarrow \infty$ とした場合

- ・ 最短経路配分モデルと一致
- ・ 最短経路にのみフローが流れ、エネルギー最小化状態と一致

$\theta \rightarrow 0$ とした場合

- ・ エントロピー項が大きくなり、フローはすべての経路に対して完全にランダムに配分される

ここで、パラメータ θ はシステムの「**秩序状態**」と「**無秩序状態**」のバランスを決定するパラメータとなっている。

2-3. 様々なエントロピーモデル

(各エントロピーモデルの関係)

以上のモデルの相違点をまとめると、

- ①パラメータ θ を外生変数とするか否か
- ②パラメータ推定のために何を観測情報として与えるか

※調和モデルは、総走行費用やエントロピーを観測によって与える必要がない代わりに、経路選択のばらつきを示すパラメータ θ を外生的に与える。

2-3. 様々なエントロピーモデル

(観測データを用いるモデルに関する補遺)

1. 総走行費用とエントロピーそれぞれの推定値について、総走行費用の推定値にはバイアスは生じないが、エントロピー関数は凹関数であるため過小推定となるバイアスが生じる。

2. 既往研究によると、エントロピーの推定は総走行費用の推定に比べて分散が大きくなってしまふことが指摘されている。

→パラメータ推定の統計的不偏性や効率性を考えると、総走行費用を観測して入力するモデルの方が有用であるといえる。

3. 確率的利用者均衡配分

確率的利用者均衡配分モデル = 確率的配分モデル + **混雑現象**

混雑現象を考慮するために、

リンクコストをリンク交通量の単調増加関数：

$$C_i = C_i(f_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

さらに利用者は、実際のリンクコストに認知誤差 ξ_i の加わった

認知リンクコスト： $C_i + \xi_i$ をもとに経路選択を行う

3-1. 確率的利用者均衡状態

それぞれの利用者が、常に認知したコストが最小になるように経路を選ぶとする、このような行動を繰り返していくと、

「どの利用者も、自分が経路を変更することによって、自分の経路費用を減少させることができないと信じている状態」

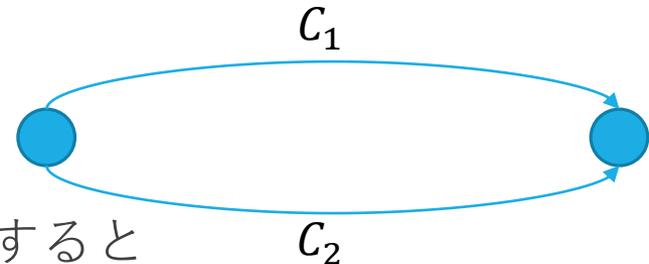
に収束していくことが期待される。

この定常状態を、**確率的利用者均衡配分 (SUE) 状態**と呼ぶ。

(Wardropの第一原則をより一般的に拡張したものとみなせる)

3-1. 確率的利用者均衡状態

再び右のような簡易ネットワークを
考える。



リンクコスト関数を以下のように定義すると

$$C_i = A_i \cdot f_i + B_i \quad (i = 1, 2)$$

交通サービスの供給状況を表す供給関数は

$$\text{Supply: } C_2 - C_1 = -(A_1 + A_2)f_1 + (B_2 - B_1 + q \cdot A_1) \text{ である。}$$

一方、SUEでの利用者の需要を表す需要関数は、ロジットモデルを仮定すると

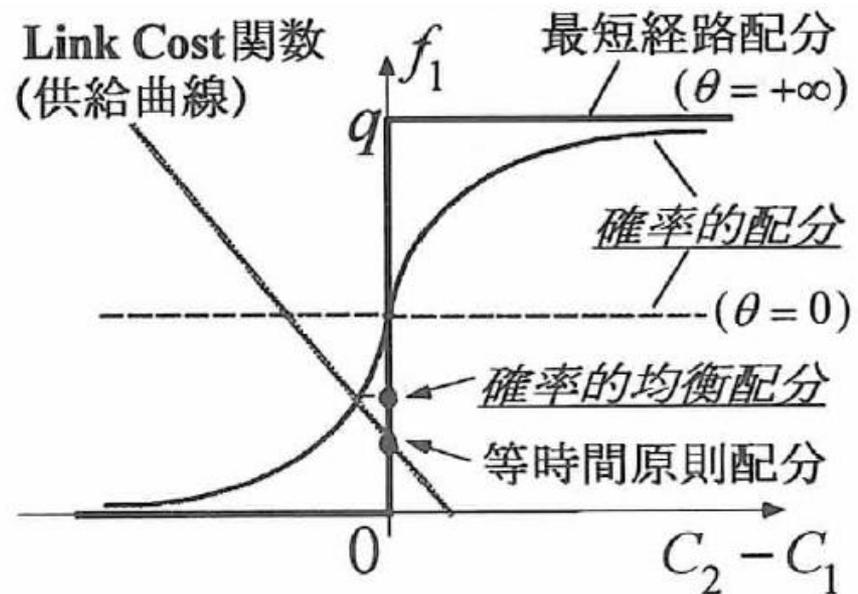
$$\text{Demand: } f_1 = q \cdot \frac{\exp[-\theta C_1]}{\{\exp[-\theta C_1] + \exp[-\theta C_2]\}} \quad \text{と書ける。}$$

3-1. 確率的利用者均衡状態

確率的利用者均衡配分状態は、右図のように確率的配分のグラフ（需要曲線）とリンクコスト関数（供給曲線）の交点で表される。

このとき、 $\theta \rightarrow \infty$ とすれば、最短経路配分モデルの階段関数と一致する。

したがって、SUE均衡はWardrop均衡を包摂していることが分かる。



3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

SUEモデル = 確率的配分モデル + Wardrop均衡配分モデル

【SA-2】

$$\min. Z(f) = \underbrace{\sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega}_{\text{UEの目的関数}} - \underbrace{\frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(f^{rs})}_{\text{エントロピー項}} \quad - (3.1)$$

subject to

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} \quad \forall (i, j) \in A \quad - (3.2)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad - (3.3)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (3.4)$$

$$\text{ここで、} H_{rs}(f^{rs}) = - \sum_k P_k^{rs} \ln P_k^{rs} \quad - (3.5)$$

3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

最適化問題【SA-2】がロジット型SUE型モデルと等価であることの証明

(問題【SA-2】の基本性質)

- ①リンクコスト関数の積分項はリンク交通量 x に関して狭義凹関数
 - ②エントロピー関数項は経路交通量 f に関して狭義凹関数
 - ③制約条件は線形等式と非負条件のみなので実行可能領域は閉凸集合
- ①、②、③より最適化問題【SA-2】は凸計画問題である

3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

$$L(f, \eta) = Z_L(x(f)) + Z_H(f) + \sum_{rs} \eta_{rs} \{q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}\} \quad - (3.6)$$

$$\text{ただし、 } Z_L(x(f)) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega, \quad Z_H = -\frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(f)$$

と定義すると、凸計画問題の最適性の必要十分条件はKKT条件によって与えられるから、

(KKT条件)

$$f_k^{rs} \cdot \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0, \text{ and } \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (3.7)$$

$$x_{ij} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k} \quad \forall (i, j) \in A \quad - (3.8)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_k^{rs} \quad \forall (r, s) \in W \quad - (3.9)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (3.10)$$

3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

(つづき)

$f_k^{rs} > 0$ であるから、

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 1/\theta(\ln f_k^{rs} + 1 - \ln q_{rs}) + c_k^{rs} - \eta_{rs} = 0 \quad \text{なので、}$$

$$f_k^{rs} = q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[\theta \eta_k^{rs} - 1] \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W$$

フロー保存の式 $q_{rs} = \sum_k f_k^{rs}$ に代入して整理すると

$$f_k^{rs} = \frac{q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs}(x(f))]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}(x(f))]} \quad \text{— (3.11)}$$

よって、最適化問題【SA-2】はロジット型SUE配分モデルと等価であることが証明された。

3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

最適化問題【SA-2】の解は一意的に決まるか？

①経路交通量 f について

問題【SA-2】の目的関数は、経路交通量 f に関して狭義凸関数である。次に、制約条件は線形式と非負条件だけなので f の実行可能領域は閉凸集合である。さらに、サイクリックな経路を考えなければ実行可能領域は有界なので、問題【SA-2】の解は経路交通量 f に関して唯一に決まる。

②リンク交通量 x について

問題【SA-2】の目的関数は、リンク交通量 x に関して狭義凸関数である。また、 x の実行可能領域は有界閉凸集合なので問題【SA-2】の解はリンク交通量 x に関して唯一に決まる。

3-2. 確率的利用者均衡配分と等価な最適化問題

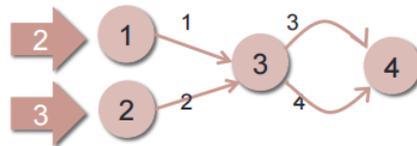
このように、SUE配分では、リンク交通量だけではなく、**経路交通量**についても解が唯一に決まる。

⇔Wardrop均衡配分では、リンク交通量に関しては均衡解は唯一であるが、経路交通量 f は一意的に決定しなかった

(前回のUEのスライド)

- ただしlink flowが一意 \neq path flowが一意

<具体例>



$$x_1=2, x_2=3, x_3=3, x_4=2$$

(O,D)=(1,4)

path 1 : <link 1→link 3>、 path 2 : <link 1→link 4>

(O,D)=(2,4)

path 1 : <link 2→link 3>、 path 2 : <link 2→link 4>

可能性1:

$$f_1^{14} = 0, f_2^{14} = 2, f_1^{24} = 3, f_2^{24} = 0$$

可能性2:

$$f_1^{14} = 2, f_2^{14} = 0, f_1^{24} = 0, f_2^{24} = 3$$

3-3. 双対問題

SUE配分では「リンク交通量」と「リンクコスト」は1対1で対応
→「リンクコスト」を未知変数とする最適化問題も考えられるはず

最適化問題【SA-2】のラグランジアンを

$$L(x, f, \tau, \eta) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(f) \\ + \sum_{ij} \tau_{ij} (x_{ij} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs}) + \sum_{rs} \eta_{rs} (q_{rs} - \sum_k f_k^{rs})$$

と定義すると、最適化問題【SA-2】の双対問題【SA-3】はラグランジュ乗数 (τ, η) を未知とする以下の問題である：

3-3. 双対問題

双対問題 【SA-3】

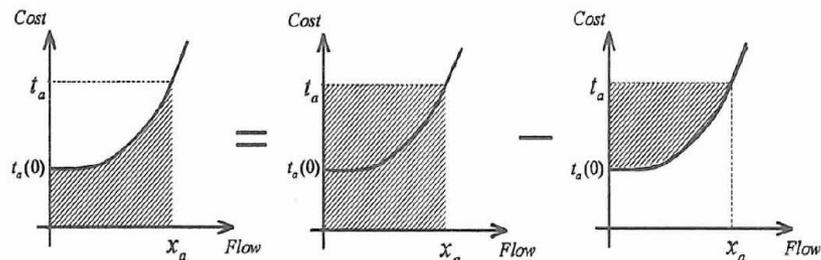
$$\begin{aligned} \max. L(x, f, \tau, \eta) = & \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_{rs} q_{rs} H_{rs}(f) \\ & + \sum_{ij} \tau_{ij} (x_{ij} - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs}) + \sum_{rs} \eta_{rs} (q_{rs} - \sum_k f_k^{rs}) \end{aligned} \quad - (3.12)$$

subject to

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{1}{\theta} (\ln f_k^{rs} + 1 - q_{rs}) - \sum_{ij} \tau_{ij} \delta_{ij,k}^{rs} - \eta_{rs} = 0 \quad \forall k \in K_{rs}, \forall (r, s) \in W \quad - (3.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = t_{ij}(x_{ij}) + \tau_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad - (3.14)$$

3-3. 双対問題



ここで、以下2つの関係式を利用する：

$$\begin{cases} f_k^{rs} = q_{rs} \exp[-\theta c_k^{rs}] \exp[\theta \eta_k^{rs} - 1] & \text{--- (3.15)} \\ \sum_{ij} t_{ij} x_{ij} - \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) = \sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v) dv & \text{--- (3.16)} \end{cases}$$

これらの関係式を $L(x, f, \tau, \eta)$ に代入すると、
 (x, f) が消去できて以下の制約なし最適化問題となる。

$$\begin{aligned} & \max. L(t, \eta) \\ & = - \sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v) dv + \sum_{rs} \eta_{rs} q_{rs} - 1/\theta \sum_{rs} q_{rs} \exp[\theta \eta_k^{rs} - 1] \sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}] \\ & \text{--- (3.17)} \end{aligned}$$

ここで、 η に関する最適条件 $\frac{\partial L}{\partial \eta_{rs}} = 0 \quad \forall (r, s) \in W$ より

$$\eta_{rs} = S_{rs}(c^{rs}) + \frac{1}{\theta} \quad (S_{rs}(c^{rs}) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp(-\theta c_k^{rs})) \quad \text{--- (3.18)}$$

3-3. 双対問題

(つづき)

式 (3.18) を (3.17) に代入して整理すると、

双対問題【SA-3】はリンクコスト t のみを未知変数とした以下の最適化問題となる。

$$\max. Z_D(t) = -\sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v) dv + \sum_{rs} q_{rs} \cdot S_{rs}(c^{rs}(t)) \quad - (3.19)$$

一方、Wardrop均衡配分の双対問題は

$$\max. Z_D(t) = -\sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} x_{ij}(v) dv + \sum_{rs} q_{rs} \cdot \min_k \{c_k^{rs}(t)\}$$

この2つを見比べてみると、その違いは最小費用が期待最小費用に置き換わっている点のみであることが分かる。このとき、 $\theta \rightarrow \infty$ とすれば期待最小費用は最小費用に一致するので、双対問題からもSUE配分がWardrop均衡配分の一般化となっていることが分かる。

3-3. 双対問題

(双対問題の特性に関する補遺)

双対問題【SA-3】の最適条件は

$\frac{\partial Z_D}{\partial t_{ij}} = 0 \quad \forall (i, j) \in A$ であり、書き下していくと

$$x_{ij}(t_{ij}) - \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} = 0 \quad \therefore f_k^{rs} = q_{rs} P_k^{rs}$$

というSUE配分の定義式に帰着する。

この計算の過程で、期待最小費用の性質 $\frac{\partial S_{rs}}{\partial c_k^{rs}} = P_k^{rs}$

(期待最小費用を各経路の最小費用で偏微分すると選択確率になる)

を用いているが、この性質は、ロジットモデルに限らず、ランダム効用理論に基づいたモデルであれば必ず成立する。

3-3. 双対問題

したがって、双対問題【SA-3】は、ロジットモデル以外のランダム効用理論モデルに基づいたSUE配分についても等価最適化問題となっている。

一方で、交通量を未知変数としていた最適化問題【SA-2】はロジットモデルを前提とした最適化問題なので、誤差項が他の確率分布に従うときには等価にならない。

3-3. 双対問題

(双対問題の応用—料金設定問題)

交通計画者の実現したいリンク交通量パターン \bar{x} を達成するためには、リンク通過料金 e_{ij} をどのように設定すればよいか？

経路交通量 f を以下のように設定する。

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp[-\theta\{\omega c_k^{rs} + E_k^{rs}\}]}{\sum_k \exp[-\theta\{\omega c_k^{rs} + E_k^{rs}\}]}$$

ただし、 $E_k^{rs} = \sum_{ij} e_{ij} \delta_{ij,k}^{rs}$, $c_k^{rs} = \sum_{ij} t_{ij}(\bar{x}_{ij}) \delta_{ij,k}^{rs}$

このとき、望ましいリンク交通量パターン \bar{x} は既知であるから、リンク所要時間の値も既知変数になっている。

3-3. 双対問題

(応用つづき)

この問題を解くために、双対問題【SA-3】におけるリンクコスト逆関数を「望ましい」リンク交通量 \bar{x} で置き換えた

最適化問題【SA-3'】

$$\max. Z_D(t) = - \sum_{ij} \bar{x}_{ij} \hat{c}_{ij} + \sum_{rs} q_{rs} S_{rs}(c^{rs}(t))$$

ここで、 $\hat{c}_{ij} := \omega t_{ij}(\bar{x}_{ij}) + e_{ij}$

を考えると、この問題は一般化リンクコスト \hat{c} のみを未知変数とした最適化問題となる。

3-3. 双対問題

(応用つづき)

この問題の最適条件は、

$$\frac{\partial Z_D}{\partial \hat{c}_{ij}} = 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad \text{なので}$$

$$-\bar{x}_{ij} + \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{ij,k}^{rs} = 0$$

この最適性条件は、望ましいリンク交通量 \bar{x} が確率的経路選択モデルによるリンク交通量と一致することを示している。

したがって、この問題の最適解 \hat{c}^* が得られれば、最適料金 e_{ij} は、

$$e_{ij} = \hat{c}_{ij}^* - \omega t_{ij}(\bar{x}_{ij})$$

を計算することによって得られる。

3-4. リンク変数による表現

これまでは、各経路について経路変数を用いて表現してきた

→実際のネットワークでは経路列挙をするとデータ数が膨大になってしまうので、経路変数を用いるのは望ましくない

フロー保存条件式を起点別リンク交通量 x_{ij}^r を用いて書き直すと

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s q_{rs} \delta_{rk} - q_{rs} \delta_{sk} = 0$$

$$\forall k \in N, \forall r \in R$$

となる。このことを用いれば、最適化問題【SA-2】を起点別リンク交通量のみで定義することができる。

3-4. リンク変数による表現

最適化問題 【SA-2'】

$$\min. Z(x) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \frac{1}{\theta} \sum_r \{HL(x^r) - HN(x^r)\} \quad - (3.20)$$

subject to

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \sum_s q_{rs} \delta_{rk} - q_{rs} \delta_{sk} = 0 \quad \forall k \in N, \forall r \in R \quad - (3.21)$$

$$x_{ij} = \sum_r x_{ij}^r \quad \forall (i, j) \in A \quad - (3.22)$$

$$x_{ij}^r \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall r \in R \quad - (3.23)$$

ただし、

$$HN(x^r) := - \sum_j (\sum_i x_{ij}^r) \ln(x_{ij}^r)$$

$$HL(x^r) := - \sum_{ij} x_{ij}^r \ln x_{ij}^r$$

まとめ

- ・ SUE配分は、混雑現象も利用者の認知不確定性も考慮したすごいやつ
- ・ とりあえず θ を無限大に飛ばしてやれば最短経路配分モデルと一致します
- ・ リンク交通量だけでなく経路交通量も求められます
- ・ ロードプライシングの計算にも使えます
- ・ でもやっぱり経路列挙が大変だからアルゴリズムは複雑そう

おまけ SUEの解法

1. 逐次平均法

- ・ 各種経路選択モデルに対するSUE配分に適用可能
- ・ 収束が遅い

2. 部分線形化法

- ・ 起点別リンク交通量を未知数
- ・ Logit型SUE配分専用
- ・ 収束が早い

3. Simplicial Decomposition法

- ・ 経路交通量を未知数
- ・ Logit型SUE配分専用
- ・ 収束が早い

参考文献

土木学会「交通ネットワークの均衡分析—最新の理論と解法—」
pp73-94, 1998