GEVの導出と証明

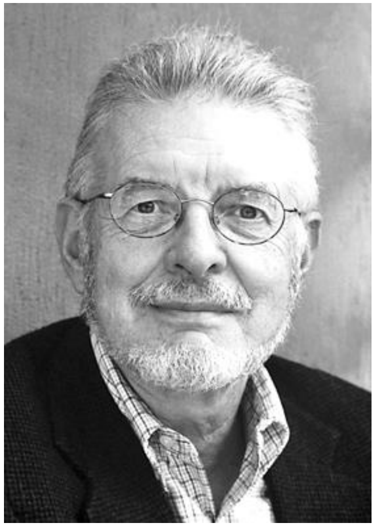
2017.04.10.

第2回 スタートアップゼミ

松岡 央真

目次

1. GEVモデルとは



Daniel L. McFadden

(1) General Extreme Value (一般極値分布)model とは

クローズドフォームの離散選択モデルの定式化における最も一般的なモデル(個人の意思決定を記述)

離散選択モデルの作成において、条件を満たす関数Gを作ることができれば、これに基づいて選択肢iの選択確率を表すことのできるモデルの作成が可能となる。

この方式を用いれば、効用最大化理論に基づき、状況に最適な離散選択モデルを作ることが可能。

1. GEVモデルとは

(2) 効用の定式化と選択確率$P_n(i)$

個人nの選択肢iに対する効用の定式化を行うと

$$U_{in} = V_{in} + \varepsilon_{in}$$

$$V_{in} = \beta_{\mathrm{time}} \times x_{\mathrm{time}\ in} + \beta_{\mathrm{price}} \times x_{\mathrm{price}\ in} + \cdots$$

U_{in} : 効用関数　V_{in} : 確定項(観測可能)　ε_{in} : 誤差項(観測不可能)

x_{kin} : 説明変数　β_{kin} : パラメータ

説明変数の観測誤差や重み付けパラメータの個人差などをもとにした誤差項ε_{in}により、選択確率$P_n(i)$が考えられる

1. GEVモデルとは

(2) 効用の定式化と選択確率$P_n(i)$

個人nの選択肢iの選択確率$P_n(i)$は二項選択問題において、

$$
\begin{aligned}
P_n(i) &= \Pr[U_{in} \geq U_{jn}] \\
&= \Pr[V_{in} + \varepsilon_{in} \geq V_{jn} + \varepsilon_{jn}] \\
&= \Pr[\varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in} \geq V_{in} - V_{jn}] \\
&= \Pr[\varepsilon_n \geq V_{in} - V_{jn}] \\
&= F_\varepsilon(V_{in} - V_{jn})
\end{aligned}
$$

ε_n： $\varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in}$ (誤差項の差)

F_ε： ε_nの累積分布関数

このε_nに正規分布を仮定するとプロビットモデル、ロジスティック分布を仮定するロジットモデルとなる(補足資料1)

1. GEVモデルとは

(2) 効用の定式化と選択確率$P_n(i)$

多項ロジットモデル(MNL model)において、

$$P_n(i) = \Pr[U_{in} \geq U_{jn}\ , \text{ for any } j,\ j \neq i]$$

これを解くと(補足資料2)、

$$P_n(i) = \frac{\exp(\mu V_{in})}{\sum_j \exp(\mu V_{jn})}$$

（通常スケールパラメータμの値は1とおく。）

1. GEVモデルとは

(2) IIA特性(independence from irrelevant alternatives)

ロジットモデルのIIA特性とは無関係な選択肢から選択確率P_iが独立であることである。(ex.) $P_{in}/P_{jn} = \exp(V_{in} - V_{jn})$ と表せる

つまり、類似した選択肢の間で本来ある類似関係が表現されていないという問題が生じる。

Ex.) 赤バス-青バス問題

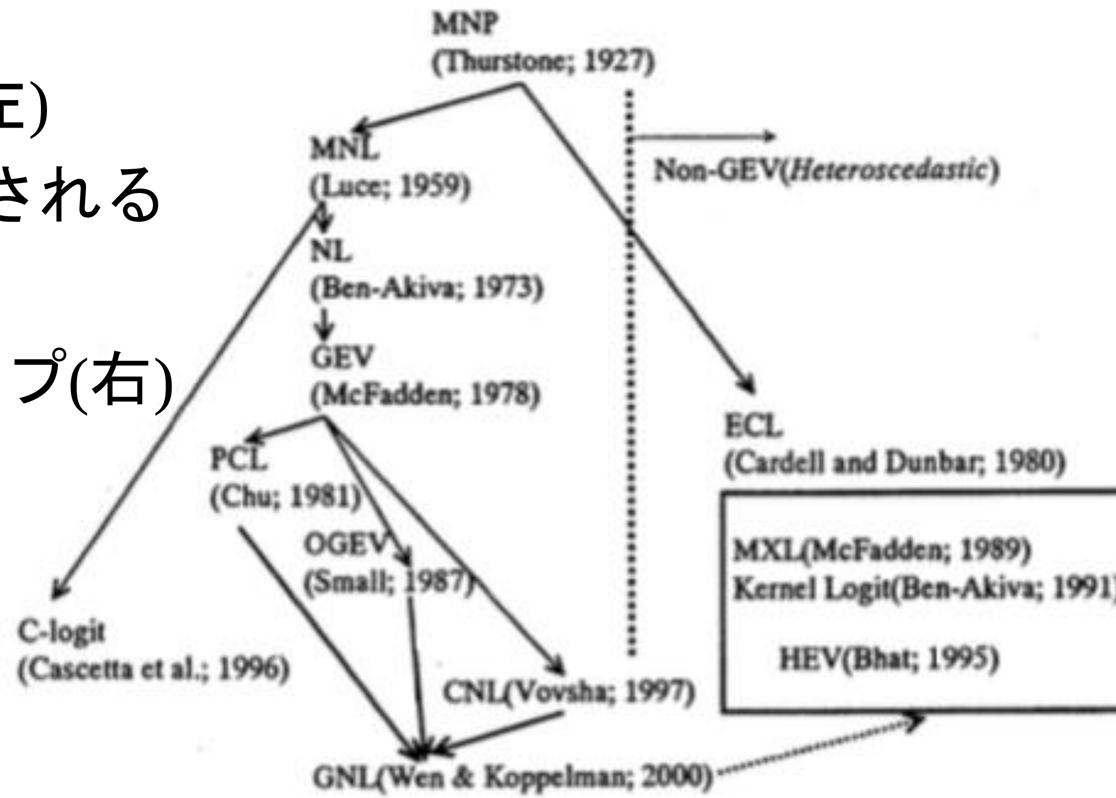
類似した選択肢間の一般的な相関を考慮する最も一般的な枠組みがGEVモデル！！

1. GEVモデルとは

(3) GEV理論の位置付け

・GEVファミリー(左)
GEV理論から導出される

・不等分散性グループ(右)
誤差項の分散の
不均一性を考慮



行動モデル発展の経緯(羽藤,2002)

1. GEVモデルとは

(4) 様々なGEVモデル

MNLモデル(multinomial choice model)

多岐選択ロジットモデル

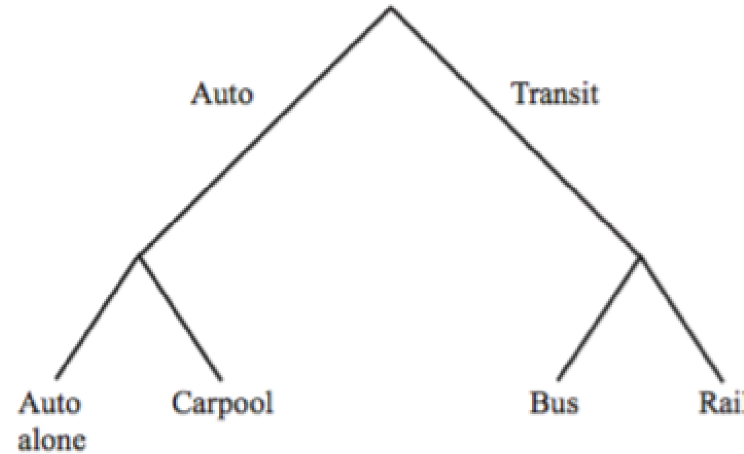
効用の確率項が独立に同一のガンベル分布に従うものとする

$$G = \sum_{j=1}^{J} Y_j \qquad P_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

＊交通学で3項ロジットモデルの選択確立$Pa = \frac{\exp(Va)}{\exp(V_a)+\exp(V_b)+\exp(Vc)}$を導出

(補足資料4)

1. GEVモデルとは



(4) 様々なGEVモデル

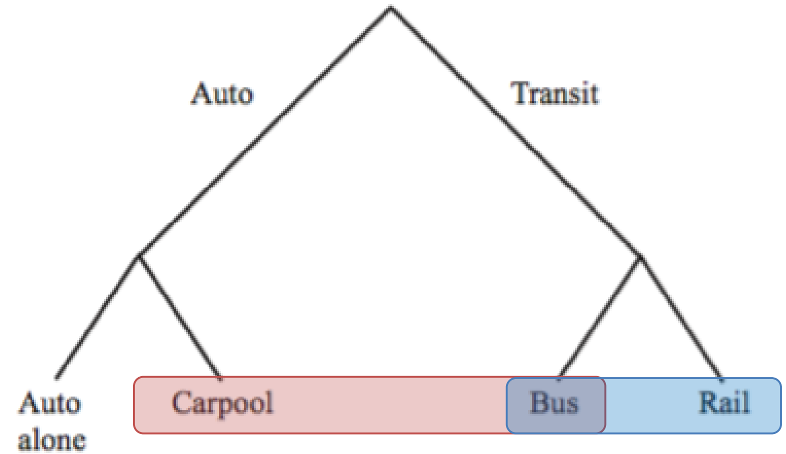
NLモデル(nested logit model)

同一ネスト内の選択確率Pの比は他のネストの選択肢の有無には何ら影響を受けない。

一方、ネストの異なる2つの選択肢の選択確率Pの比は他の選択肢の有無により変化してしまう。

$\mathrm{Cov}(\varepsilon_{nj}, \varepsilon_{nm}) = 0$ for any $j \in B_k$ and $m \in B_l$ with $k \neq l$

1. GEVモデルとは



(4) 様々なGEVモデル

NLモデル(nested logit model)

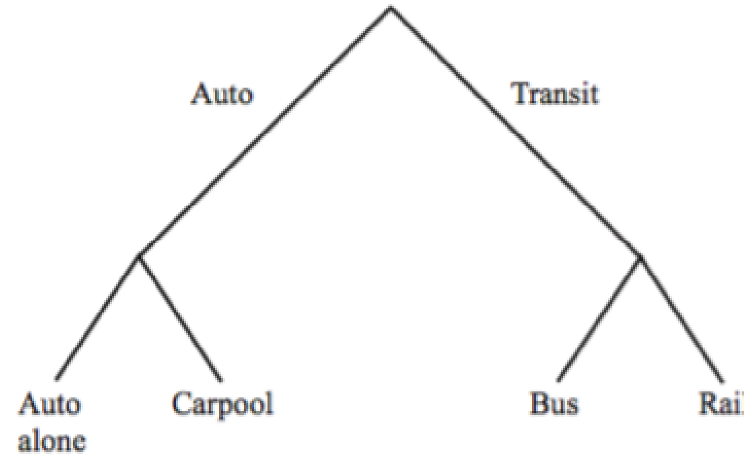
ex.)通勤者の交通手段選択

交通手段のうちの一つがなくなった場合の他の手段の割合の変化

(Discrete Choice Methods with Simulation pp78)

	Probability				
		With Alternative Removed			
Alternative	Original	Auto Alone	Carpool	Bus	Rail
Auto alone	.40	—	.45 (+12.5%)	.52 (+30%)	.48 (+20%)
Carpool	.10	.20 (+100%)	—	.13 (+30%)	.12 (+20%)
Bus	.30	.48 (+60%)	.33 (+10%)	—	.40 (+33%)
Rail	.20	.32 (+60%)	.22 (+10%)	.35 (+70%)	—

1. GEVモデルとは



(4) 様々なGEVモデル

NLモデル(nested logit model)

λ_k : ネストkにおける各選択肢の独立性の高さの指標

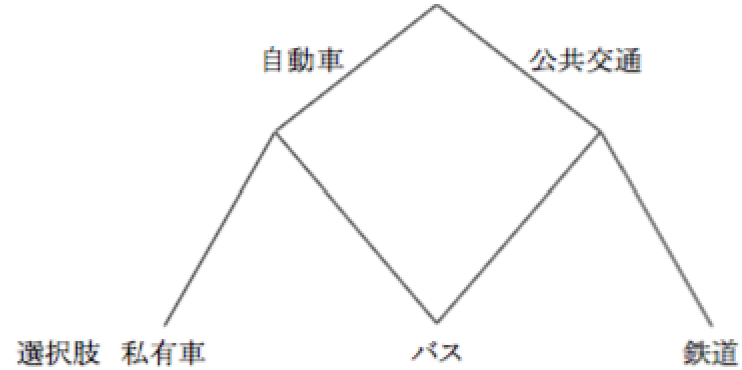
$0 < \lambda_k \leq 1$

(もし、すべてのネストでλ_k=1なら？)

各選択肢はどれか一つのネストに所属する

$$G = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in B_k} (Y_j^{1/\lambda_k})^{\lambda_k}$$

1. GEVモデルとは



(4) 様々なGEVモデル

CNLモデル(cross nested logit model)

λ : ネストにおける各選択肢の独立性の高さの指標

$0 < \lambda \leq 1$　　NLと異なりすべてのネストで共通

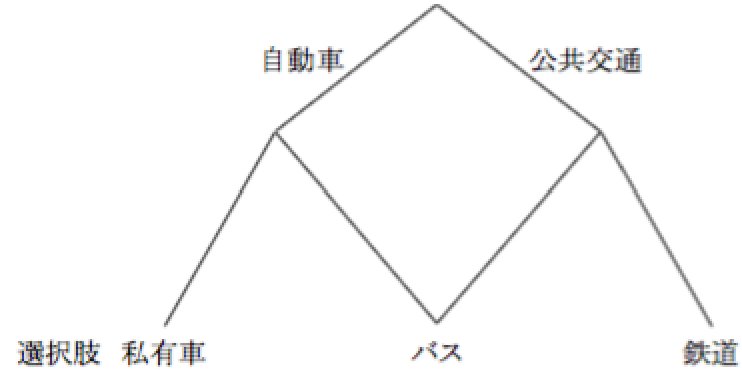
α_{jk} : アロケーションパラメータ

各選択肢jのネストkに対する所属の強さ

$\sum_{k=1}^{K} \alpha_{jk} = 1$　∴ 各選択肢は複数のネストに所属可能

$$G = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \epsilon B_l} (\alpha_{jk} \cdot Y_j)^{1/\lambda})^{\lambda}$$

1. GEVモデルとは



(4) 様々なGEVモデル

GNLモデル(generalized nested logit model)

λ_k : ネストkにおける各選択肢の独立性の高さの指標

$0 < \lambda_k \leq 1$

α_{jk} : アロケーションパラメータ

各選択肢jのネストkに対する所属の強さ

$\sum_{k=1}^{K} \alpha_{jk} = 1$ ∴ 各選択肢は複数のネストに所属可能

$$G = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in B_k} (\alpha_{jk} \cdot Y_j)^{1/\lambda_k})^{\lambda_k}$$

2. GEVモデルの性質

各モデルに対応するG関数が存在しなければならない、つまりG関数によってモデルが定義される。

そして、次ページの4条件を満たす時、

$$Pi = \frac{Y_i \cdot G_i}{G}$$

$Y_i = \exp(Vi)$

$\mathrm{G_i} = \partial G / \partial Y_i$

は効用最大化原則の下での離散選択モデルにおける選択肢iの選択確率を表す。

2. GEVモデルの性質

G関数が満たすのは以下の4つの性質!!

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$

(2)Gは一次*の斉次性を持つ

$$G(\rho Y_1,\ldots,\rho Y_J) = \rho G(Y_1,\ldots,Y_J)$$

(3)$Y_j \rightarrow \infty$ の時、$G \rightarrow \infty$ 　$\left(\lim_{Y_j \rightarrow \infty} G = \infty\right)$

(4)$\partial^k / \partial Y_{i1} \ldots \partial Y_{ik} \geq 0\ (k\ is\ odd)$

$\leq 0\ (k\ is\ even)$

3. 証明と導出

4つの性質について、MNL、NL、CNL等の各既存モデルのG関数が満たしていることを確認する。

3. 証明と導出

$$G = \sum_{j=1}^{J} Y_j$$

[1] MNL

$$P_i = \frac{Y_i \cdot G_i}{G} = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$

(2)Gは一次の斉次性を持つ

$$G(\rho Y_1, \ldots, \rho Y_J) = \rho G(Y_1, \ldots, Y_J)$$

(3)$Y_j \to \infty$ の時、$G \to \infty$ $\left(\lim_{Y_j \to \infty} G = \infty\right)$

(4)$\partial^k / \partial Y_{i1} \ldots \partial Y_{ik}$ $\geq 0\ (k\ is\ odd)$

$\leq 0\ (k\ is\ even)$

3. 証明と導出

$$G = \sum_{l=1}^{K} \sum_{j\epsilon B_l} (Y_j^{1/\lambda_l})^{\lambda_l}$$

[2] NL

$$P_i = \frac{Y_i \cdot Gi}{G}$$

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$

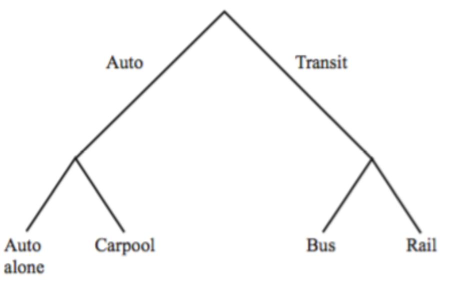
(2)Gは一次の斉次性を持つ

$$G(\rho Y_1,\ldots,\rho Y_J) = \rho G(Y_1,\ldots,Y_J)$$

(3)$Y_j \to \infty$ の時、$G \to \infty$ $\left(\lim_{Y_j \to \infty} G = \infty\right)$

(4)$\partial^k / \partial Y_{i1} \ldots \partial Y_{ik}$ $\geq 0\ (k\ is\ odd)$

$\leq 0\ (k\ is\ even)$



3. 証明と導出

$$G = \sum_{l=1}^{K}\sum_{j\in B_l}(\alpha_{jl}\cdot Y_j)^{1/\lambda})^{\lambda}$$

[3] CNL(補足資料3) $P_i = \frac{Y_i\cdot Gi}{G}$

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$

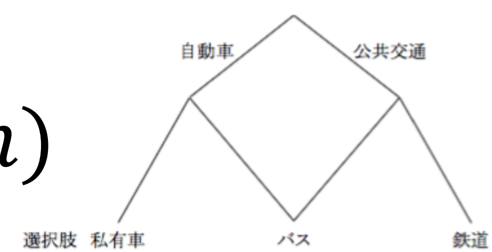
(2)Gは一次の斉次性を持つ

$$G(\rho Y_1,\ldots,\rho Y_J) = \rho G(Y_1,\ldots,Y_J)$$

(3)$Y_j \rightarrow \infty$ の時、$G \rightarrow \infty$ $\left(\lim_{Y_j \rightarrow \infty} G = \infty\right)$

(4)$\partial^k/\partial Y_{i1}\ldots\partial Y_{ik}$ ≥ 0 (k is odd)

≤ 0 (k is even)



4. G関数の作成

状況に合うG関数を自在に作成する方法

(1)GEV-inheritance

G関数を組み合わせることで、新たなG関数を作る

(2)GEV network

選択肢の相関関係をネットワーク構造を用いて記述することで、適切なG関数を設定する

4. G関数の作成

(1)GEV-inheritance

以下の3つの定理により既存のG関数から新たなG関数を作る

定理１　GEV関数の線形結合からなる関数は、GEV関数

定理２　GEV関数を累乗した関数は、GEV関数

定理３　GEV関数の累乗やそれらの線形結合でできる関数は、GEV関数である

定理３は定理１と２が示されれば証明される。
定理３により、自在に新規の関数を作ることが可能になる。

4. G関数の作成

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$
(2)Gはμ次の斉次性を持つ
$$G(\rho Y_1,\ldots,\rho Y_J) = \rho^{\mu} G(Y_1,\ldots,Y_J)$$
(3)$Y_j \to \infty$ の時、$G \to \infty$　$\left(\lim_{Y_j \to \infty} G = \infty\right)$
(4)$\partial^k / \partial Y_{i1} \ldots \partial Y_{ik}$ $\geq 0\ (k\ is\ odd)$
$\leq 0\ (k\ is\ even)$

(1)GEV-inheritance

定理１　GEV関数の線形結合からなる関数は、GEV関数

関数$G^i\colon \mathbb{R}_+^{J_i} \to \mathbb{R}$（$i = 1, \ldots, p$） がμ-GEV関数ならば、

$$G\colon \mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}\colon x \rightsquigarrow G(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G^i([x]_i)$$

をみたす関数Gもμ-GEV関数である。

ただし、$\alpha_i > 0$（$i = 1, \ldots, p$）

$[x]_i$は$vector\ x \in \mathbb{R}^J$の$\mathbb{R}^{J_i}$への射影

作られる関数Gは$\alpha_i > 0$ より、G関数の4性質を満たす。

4. G関数の作成

(1) $G \geq 0$ for any $Y_j > 0\ \forall j$
(2)Gはμ次の斉次性を持つ
$$G(\rho Y_1, \ldots, \rho Y_J) = \rho^{\mu} G(Y_1, \ldots, Y_J)$$
(3)$Y_j \to \infty$ の時、$G \to \infty$ $\left(\lim_{Y_j \to \infty} G = \infty\right)$
(4)$\partial^k / \partial Y_{i1} \ldots \partial Y_{ik}$ ≥ 0 (k is odd)
≤ 0 (k is even)

(1)GEV-inheritance

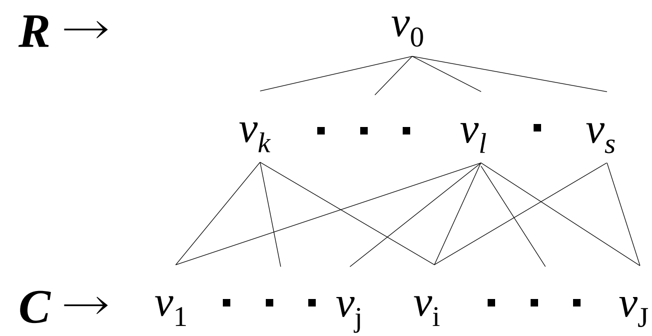
定理２　GEV関数を累乗した関数は、GEV関数

関数$G: \mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}$ がμ-GEV関数ならば、関数G^βも(μβ)-GEV関数である。
ただし、$0 < \beta \leq 1$

作られる関数G^βは、G関数の4性質を満たす。

証明は省略するが、(1)~(3)はすぐわかる、(4)はやや複雑。参考文献でも詳細な証明はAppendix Aを参照となっている。

4. G関数の作成



(2)GEV network

選択肢の相関関係をネットワーク構造を用いて記述することで、適切なG関数を設定する

有向グラフ(N,E)

Nはノード数、Eはリンク数、循環しない、NとEは有限

ノードiからjに至るリンクをArc(i,j)とし、

各Arc(i,j)は非負パラメータα_{ij}を

各ノードv_iは非負パラメータμ_iを持つ

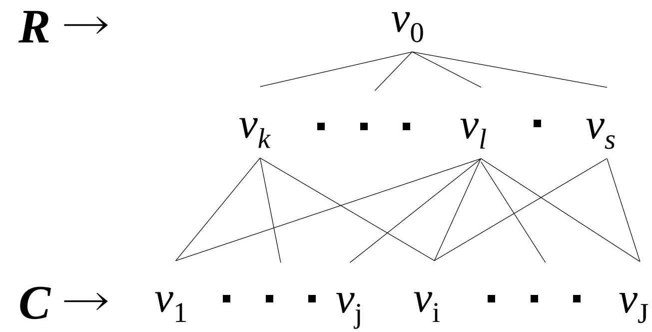
(N,E)における２つの特別なノードの部分集合を考える

R:先行するノードを持たないノードの集合←モデル全体を統括するノード

C:後続するノードを持たないノードの集合←選択肢の集合

それ以外のノードはネストを表す

4. G関数の作成



(2)GEV network

各ノードv_iについて、v_iを頂点とした部分的なネットワークに対応するG関数を以下のように定義する

1.$v_i \in \boldsymbol{C}$ の時、 $G^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ G^i(y_i) = {y_i}^{\mu_i}$ （μ_iは非負パラメーター）

2. $v_i \notin \boldsymbol{C}$ の時、$S(v_i)$をv_iに属するネットワークの集合とすると、

$$\mathbb{R}^{J_i} = span_{v_j \in S(v_i)} < \mathbb{R}^{J_j} >$$

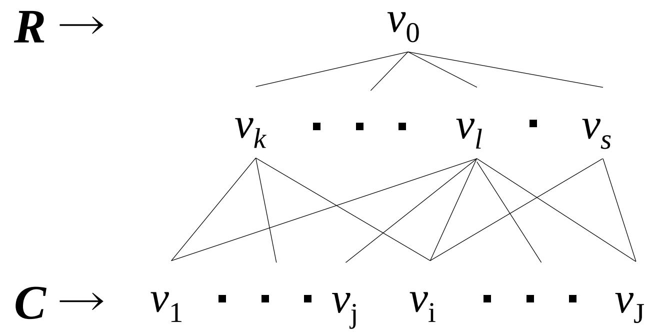
$$G^i : \mathbb{R}^{J_i} \to \mathbb{R}:\ G^i(y) = \sum\nolimits_{v_j \in S(v_i)} \alpha_{ij} G^j(y)^{\frac{\mu_i}{\mu_j}}$$

（α_{ij}は非負パラメーター）

Ex.) $G^1 = {y_1}^{\mu_1} = (e^{V_1})^{\mu_1}$

$G^s = \alpha_{si}(G^i)^{\mu_s/\mu_i} + \alpha_{sJ}(G^J)^{\mu_s/\mu_J}$

4. G関数の作成



(2)GEV network

定義した関数G^iについては以下の定理により、GEV関数であることを示しておく。

定理

Cに含まれないすべてのv_jについて

$$\mu_j \leq \mu_k \quad \forall k \quad such\ that\ v_k \in S(v_j)$$

が成立するならば、関数G^iはμ_i-GEV関数である。

（定理の証明は省略）

そして、各ノードv_jにおいて、対応するG関数で与えられる選択確率は

$$P_j(i) = \sum_{k \in Sj} \Omega_{jk} P_k(i)$$

$$\Omega_{jk} = \frac{\alpha_{jk}(G^k)^{\mu_j/\mu_k}}{\sum_{l \in Sj} \alpha_{jl}(G^l)^{\mu_j/\mu_l}}$$

となる。

参考文献

Kenneth E. Train (2003)
Discrete Choice Methods with Simulation, chapter4, pp.76~96.

Daniel McFadden (1978)
Spatial Interaction Theory and Planning Models, pp.75~96.

Daly, A. and Bierlaire, M. (2003)
A general and operational representation of GEV models, pp.1-32.