

交通配分モデル入門 – 利用者均衡配分モデル –

BinNスタートアップゼミ#5

担当：出原昇馬 (M1)

2019/5/23

04/11 行動データ分析基礎

04/18 最短経路探索

04/25 離散選択モデル

05/09 都市形成史分析その1

05/16 課題発表①

05/23 均衡配分（今回）

05/30 アクティビティモデル

~~06/06 課題発表②~~

~~06/13 都市経済モデル~~

06/20 都市形成史分析その2

~~06/27 課題発表③~~

はじめに

配分モデル：OD交通量を各経路に割り当てるモデル (traffic assignment)

「どの道を、どのくらいの人が/自動車が利用するか」

様々なモデルがあります。

非集計アプローチ

- Multinomial Logit
 - network-GEV
 - Recursive Logit
- など

集計アプローチ

- マルコフ配分
 - **利用者均衡配分**
- など

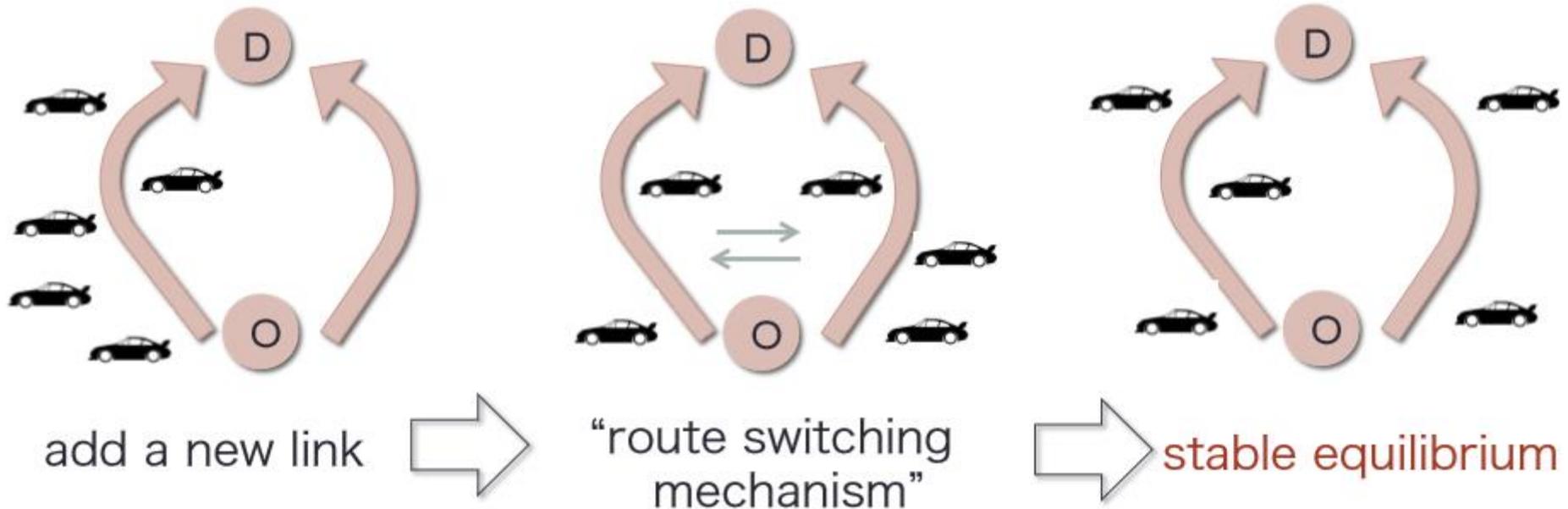
<http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/kaken/>
に様々なものが紹介されています！

- **利用者均衡配分の理論と解法アルゴリズムについて理解する**
- 均衡配分理論の展開を知る
- 利用者均衡配分のコードを扱えるようになる

- Sheffi, Y. : Formulating the Assignment Problem as a Mathematical Program. Urban transportation networks, Part 2, Chapter 3, pp.56-80, 1985
- 土木学会：交通ネットワークの均衡分析－最新の理論と解法－ 1998
- 土木学会：土木計画学ハンドブック. コロナ社,2017

&過去のゼミ資料（重要）

均衡(equilibrium)のイメージ



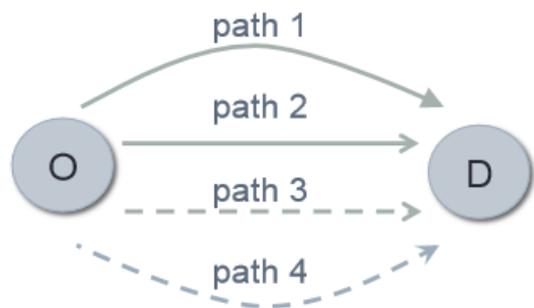
- ドライバーは所要時間の短い経路を選ぼうとする
- 2つのリンクの所要時間が等しくなったとき、それ以上ドライバーの選択を変化させるインセンティブが働かない（=均衡状態）。

Wardropの利用者均衡（等時間原則）

各ODペアに対して、次が成り立つ：

「利用される経路(path)の旅行時間(travel time)はすべて等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいか，せいぜい等しい。」

※各ドライバーが自身の旅行時間を最小化するために行動するという前提
(Nash均衡と解釈できる)



旅行時間がそれぞれ
 $t_1=10, t_2=10, t_3=10, t_4=20$ なら
例えば左の状態があり得る

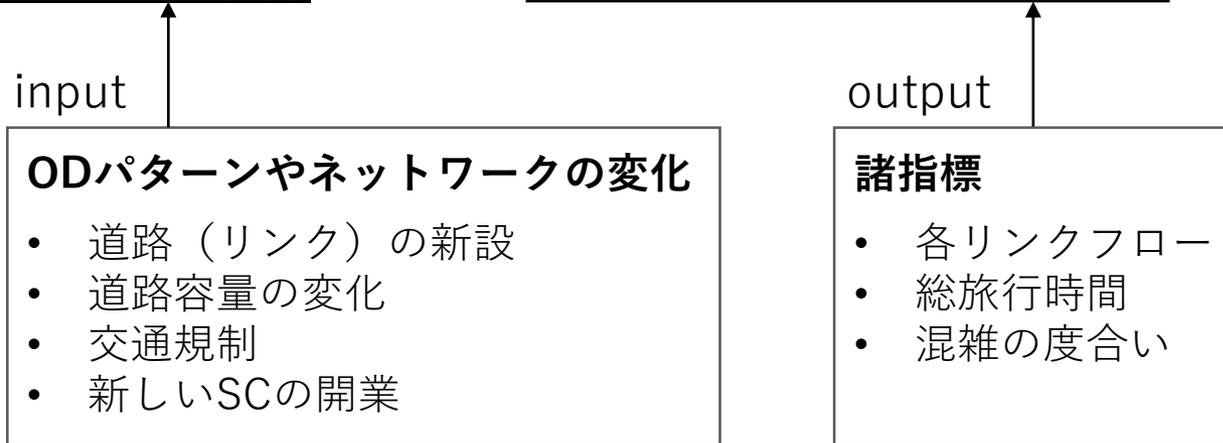
used \longrightarrow unused $-\ - \ - \longrightarrow$

交通ネットワークにおける均衡状態(3)

利用者均衡配分モデルとは

利用者均衡配分モデル(**UE: User Equilibrium assignment**)の目的

：ある交通条件におけるネットワーク上の均衡状態を導く



Wardrop原則の下で

最終的に交通量の分布がどのような状態に至るのかを算出できる。

各人が同一システムの下、同じ行動原理を以て行動するという前提。
システムにおける外部効果（＝混雑）を扱える。

利用者均衡配分問題の定式化

定式化の準備(1)

ネットワークのグラフ表現

- ネットワークは**ノードとリンクの集合**として表現される。

ノード集合： $N=\{1,2,3,4\}$

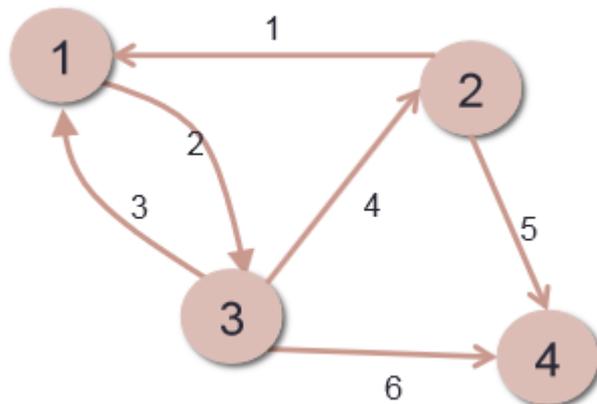
(有向)リンクの集合： $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

- 始点/終点セントロイド**

：フローが発生/集中するノード

- パス**

：Origin, Destinationを結ぶ経路。一般に各ODペアに対して複数のパスが存在



定式化の準備(2)

リンクパフォーマンス関数

BPR関数：リンクのフローと旅行時間の関係式

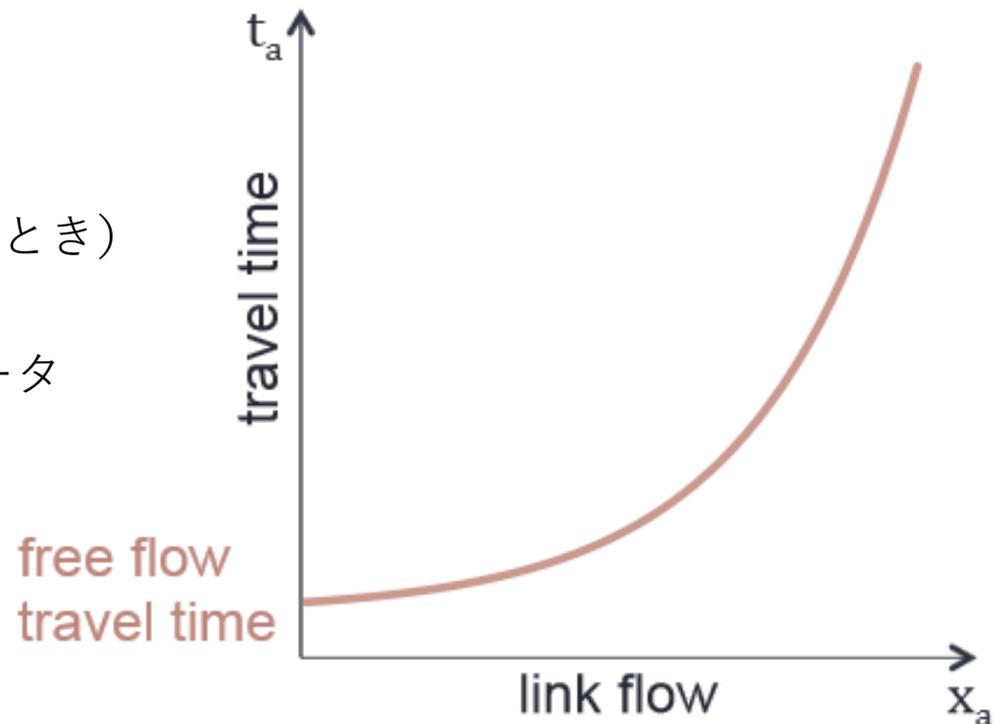
$$t_a(x_a) = t_{a0} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{x_a}{C_a} \right)^\beta \right\}$$

t_a ：旅行時間

t_{a0} ：自由旅行時間（交通量0のとき）

x_a ：交通量

C_a ：交通容量 α, β ：パラメータ



UE問題の定式化(1)

変数の定義

a : リンク

r : 始点

s : 終点

k : 各ODに対するパス

q_{rs} : 各ODに対するフロー

$\delta_{a,k}^{rs}$: リンク a が OD ペア (r,s) を 結ぶ パス k に 含まれる
(TRUE=1, FALSE=0)

OD表(行列 \mathbf{q})

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & \cdots & q_{rs} \end{pmatrix}$$

c_k^{rs} : OD ペア (r,s) の パス k の 旅行 時間

t_a : リンク a の 旅行 時間 (フロー x_a の 増加 関数)

$$\Rightarrow c_k^{rs} = \sum_a t_a(x_a) \delta_{a,k}^{rs}$$

f_k^{rs} : OD ペア (r,s) の パス k の フロー

x_a : リンク a の フロー

$$\Rightarrow x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$

UE問題の定式化(2)

具体例

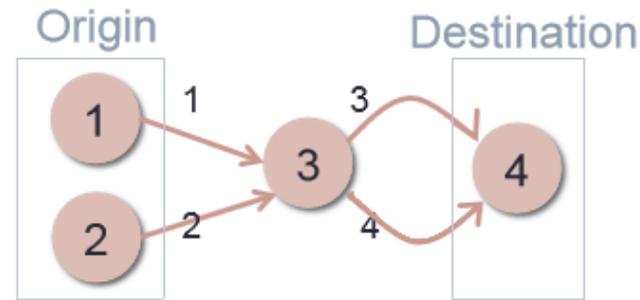
a : リンク
 r : 始点
 s : 終点
 k : 各ODに対するパス
 q_{rs} : 各ODに対するフロー
 $\delta_{a,k}^{rs}$: リンク a がODペア (r,s) を結ぶパス k に含まれる。
 (TRUE=1, FALSE=0)

c_k^{rs} : ODペア (r,s) のパス k の旅行時間
 t_a : リンク a の旅行時間(フロー x_a の増加関数)

f_k^{rs} : ODペア (r,s) のパス k のフロー
 x_a : リンク a のフロー

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a(x_a) \delta_{a,k}^{rs}$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}$$



$$(O,D) = \{ (1,4), (2,4) \}$$

path 1 : <link 1 → link 3 >

path 2 : <link 2 → link 4 > (i=1,2) と定義

$$c_1^{14} = t_1 \delta_{1,1}^{14} + t_2 \delta_{2,1}^{14} + t_3 \delta_{3,1}^{14} + t_4 \delta_{4,1}^{14} = t_1 + t_3$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= f_1^{14} \delta_{3,1}^{14} + f_2^{14} \delta_{3,2}^{14} + f_1^{24} \delta_{3,1}^{24} + f_1^{24} \delta_{3,1}^{24} \\
 &= f_1^{14} + f_1^{24}
 \end{aligned}$$

UE問題の定式化(3)

Wardrop等時間原則の記述

Prop. 1

$f_k^{rs} > 0$ のとき $c_k^{rs} = c_{min}^{rs}$ 「利用される経路(path)の旅行時間(travel time)はすべて等しく」

$f_k^{rs} = 0$ のとき $c_k^{rs} \geq c_{min}^{rs}$ 「利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい。」

subject to

$$\sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \quad \text{フローの保存則}$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \text{フローの値は非負}$$

現実規模のネットワークでこの解を得るのは非常に困難…



実は数理最適化問題と同値

最適化問題：（ある程度）解法が確立している！

UE問題の定式化(4)

等価最適化問題への変換

Beckmann(1956)による証明

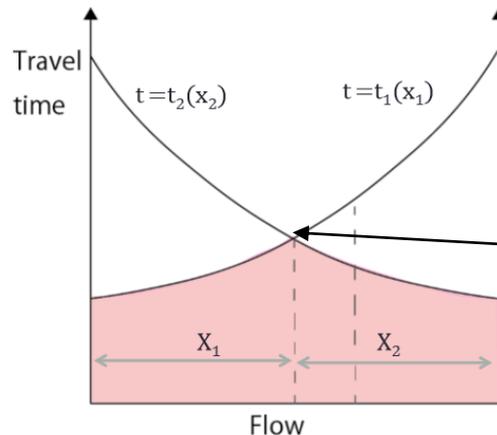
Prop. 2

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw$$

$$\text{subject to } \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad x_a \geq 0$$



a: リンク

r: 始点

s: 終点

k: 各ODに対するパス

q_{rs} : 各ODに対するフロー

$\delta_{a,k}^{rs}$: リンクaがODペア(r,s)を結ぶパスkに含まれる.

(TRUE=1, FALSE=0)

c_k^{rs} : ODペア(r,s)のパスkの旅行時間

t_a : リンクaの旅行時間(フロー x_a の増加関数)

f_k^{rs} : ODペア(r,s)のパスkのフロー

x_a : リンクaのフロー

積分の値が最小となるのが均衡点

UE問題の定式化(5)

等価であることの証明

- Lagrangianの定義

$$L(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = Z(\mathbf{x}(\mathbf{f})) - \sum_r \sum_s \lambda_{rs} \left\{ \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} \right\} f_k^{rs} \geq 0$$

- 一次の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker条件)

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

フローの保存則

$$\frac{\partial L(\mathbf{f}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \Rightarrow \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0$$

UE問題の定式化(6)

- Lagrangianの偏微分項を展開する

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} &= \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left\{ \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw \right\} - \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left[\sum_r \sum_s \lambda_{rs} \left\{ \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} \right\} \right] \\ &= \sum_a \underbrace{\frac{d}{dx_a} \left\{ \int_0^{x_a} t_a(w) dw \right\}}_{t_a(x_a)} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_a}{\partial f_k^{rs}}}_{\substack{= \frac{\partial}{\partial f_k^{rs}} \left\{ \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \right\} \\ = \delta_{a,k}^{rs}}} - \lambda_{rs} \end{aligned}$$

結局

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \sum_a \delta_{a,k}^{rs} t_a(x_a) - \lambda_{rs}$$

経路所要時間 c_k^{rs}

$\delta_{a,k}^{rs}$: リンクaがODペア(r,s)を結ぶパスkに含まれる. (TRUE=1, FALSE=0)

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = c_k^{rs} - \lambda_{rs}$$

$$f_k^{rs} \frac{\partial L(f^*, \lambda^*)}{\partial f_k^{rs}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L(f^*, \lambda^*)}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$

これらから,

$$\begin{aligned} f_k^{rs} > 0 \text{ のとき} & \quad c_k^{rs} = \lambda_{rs} \equiv c_{min}^{rs} \\ f_k^{rs} = 0 \text{ のとき} & \quad c_k^{rs} \geq \lambda_{rs} \equiv c_{min}^{rs} \end{aligned} \quad \text{最短所要時間}$$

これは**Wardrop原則 (Prop. 1)** と同値!!

Prop. 2の最適化問題を解けば利用者均衡を満足する解 (経路交通量およびリンク交通量) を得ることができる!

発展学習：解の一意性 (最適化問題が唯一の解を持つことの証明)

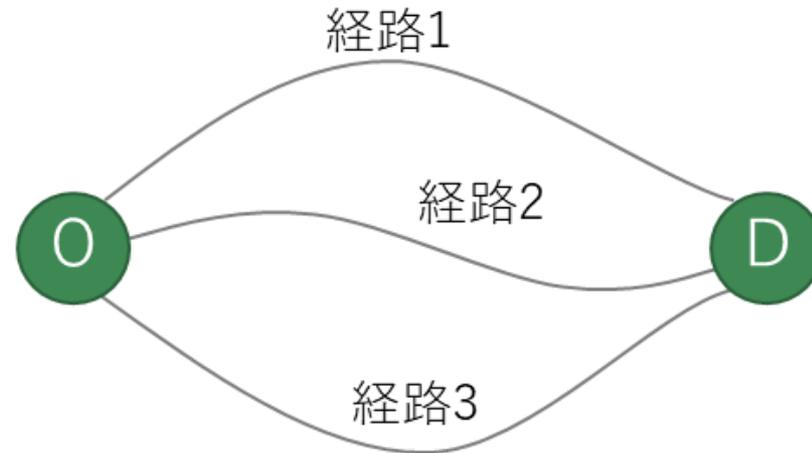
簡単な例(1)

交通量200台
コスト関数

$$t_1 = 5 + 0.1f_1$$

$$t_2 = 10 + 0.025f_2$$

$$t_3 = 15 + 0.025f_3$$



利用者均衡配分問題

$$\min Z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw = 5f_1 + 0.05f_1^2 + 10f_2 + 0.0125f_2^2 + 15f_3 + 0.0125f_3^2$$

$$s. t. \quad \sum_{k=1}^3 f_k = 200, \quad f_k^{rs} \geq 0$$

簡単な例(2)

KKT条件より

$$\begin{array}{ll}
 (t_1=)5 + 0.1f_1 = \lambda & (f_1 \geq 0) \quad \text{or} \quad 5 + 0.1f_1 \geq \lambda \quad (f_1 = 0) \\
 (t_2=)10 + 0.025f_2 = \lambda & (f_2 \geq 0) \quad \text{or} \quad 10 + 0.025f_2 \geq \lambda \quad (f_2 = 0) \\
 (t_3=)15 + 0.025f_3 = \lambda & (f_3 \geq 0) \quad \text{or} \quad 15 + 0.025f_3 \geq \lambda \quad (f_3 = 0)
 \end{array}$$

所要時間の短い経路（最短経路）から順に利用経路として取り入れ，KKT条件を調べる

1. 利用される経路が1のみ→経路1にすべての需要量（200台）を配分.

$$f_1 = 200, f_2 = 0, f_3 = 0, t_1 = 25, t_2 = 10, t_3 = 15$$

KKT条件に代入

$$t_1 = \lambda = 25, t_2 = 10 \leq 25!!, t_3 = 15 \leq 25!!$$

KKT条件を満たしていないので×

2. 利用される経路が1と2のみ

KKT条件より

$$t_1 = t_2 = \lambda, f_3 = 0, \sum f_k - 200 = 0$$

解くと

$$f_1 = 80, f_2 = 120, f_3 = 0, t_1 = 13, t_2 = 13, t_3 = 15, Z = 2100$$

KKT条件をに代入すると満たしていることが確かめられる.

しかし，経路が幾つかのリンクに分かれ，多くのODペアを持つ現実ネットワークの数値計算では，このようにKKT条件を比較しながら均衡解を求めることは不可能.

→Frank-Wolfe法などの非線形最適化問題の解法アルゴリズムが用いられる（次節）

Flank-Wolfe法

□最短経路探索（前回ゼミ）

- Dijkstra法
- Bellman-Ford法
- ヒープ構造

□all-or-nothing配分

- 最短経路にすべての交通需要を配分

all-or-nothing配分のアルゴリズム

O_j : ノード j から流出するリンクの終点集合

q_{oj} : 起点 o から終点 j までの分布交通量

Step 1 $n=0$ とする. 始点ノード i , 終点ノード j を持つすべてのリンク交通量 x_{ij} について $x_{ij} = 0$ とする

Step 2 n 番目の起点 (セントロイド) を o とする. 起点 o から他のすべてのノードへ最短経路探索を行い, 起点 o から他のすべてのノードへの最短経路費用 $\{C_{min}[o \rightarrow i]\}$ と各ノード i に対する先行ポインタ F_i を求める

Step 3 $\{C_{min}[o \rightarrow j]\}$ の降順 (o から遠い順) にノード j を考える. ノード j に流入し, かつ最短経路ツリーに含まれるリンク $i(=F_j) \rightarrow j$ の交通量 x_{ij} を次式で改訂する.

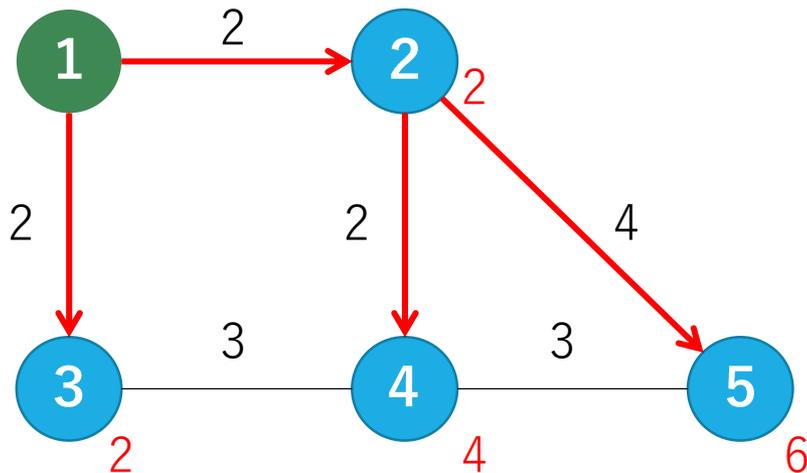
$$x_{ij} = x_{ij} + \left(q_{oj} + \sum_{m \in O_j} x_{jm} \right)$$

Step 4 $n=N$ なら終了. そうでなければ $n=n+1$ とし Step 2 へ.

ベースとなるアルゴリズム(2)

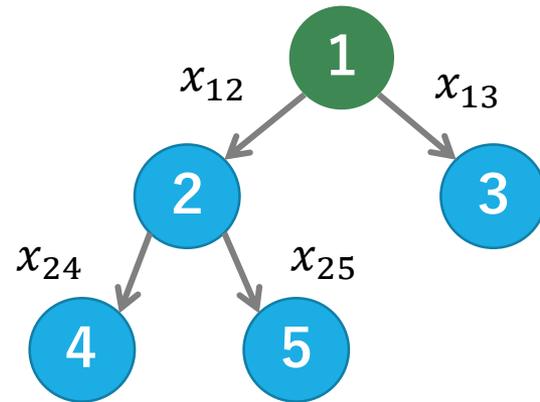
all-or-nothing配分の例

起点oがノード1のときを考える
(Dijkstra法による最短経路ツリーの構築)



OD表

O/D	n1	n2	n3	n4	n5
n1	0	4	5	2	3
n2



ノードの遠い順に考える

$$x_{25} = 0 + (3 + 0) = 3$$

$$x_{24} = 0 + (2 + 0) = 2$$

$$x_{13} = 0 + (5 + 0) = 5$$

$$x_{12} = 0 + (4 + x_{24} + x_{25}) = 9$$

流出リンクの交通量

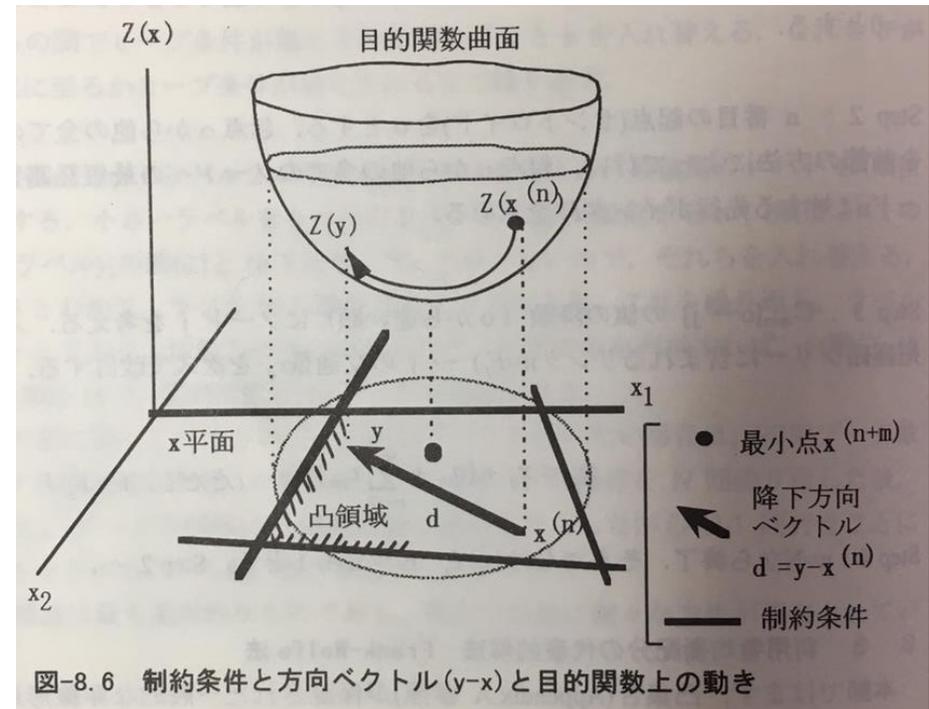
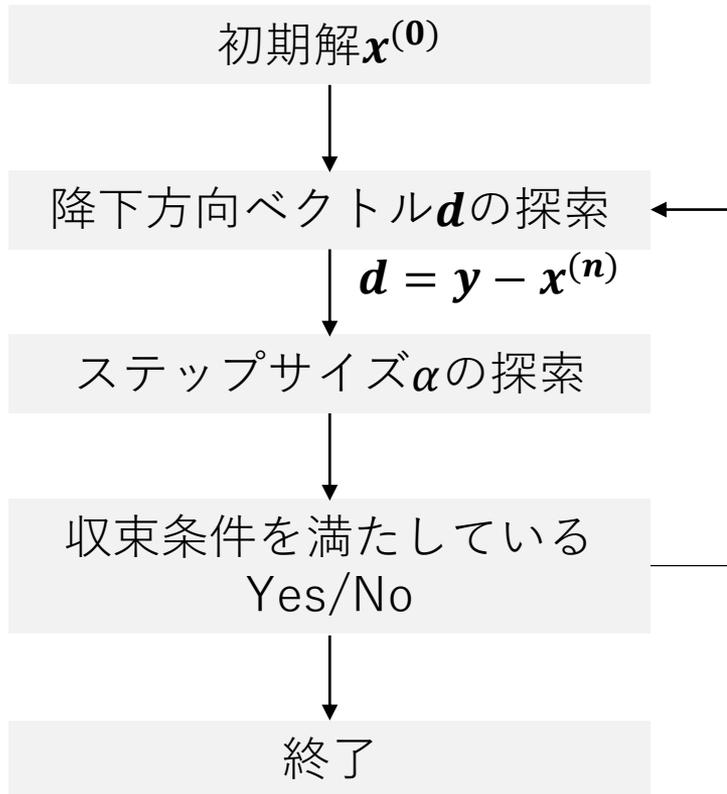
全起点ノードについて
同様の計算を繰り返す

Flank-Wolfe法(1)

非線形最適化問題の解法

KKT条件によって直接解くことのできる非線形最適化問題は単純な問題に限られ、凸集合が保証された問題においては一般に以下のアルゴリズムが用いられる。

目的関数 $Z(x)$ の最小化



Flank-Wolfe法(2)

Flank-Wolfe法の概要

Prop. 2

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw$$

$$\text{subject to } \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

を解きたい

Flank-Wolfe法：利用者均衡配分モデルの解法として広く用いられる。

◎必要な記憶容量が少ない

◎手順が簡単

×収束が進むと解の近傍で”ジグザグ運動”→収束スピードが緩慢

→改良手法として

- 打ち切り二次計画法

- **Simplicial Decomposition**法

がある（発展学習！）。

Flank-Wolfe法(3)

Flank-Wolfe法における降下方向ベクトル探索

Flank-Wolfe法では降下方向ベクトル \mathbf{d} 上の点 $\mathbf{y}(= \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{d})$ を以下に示す補助問題より求める。

- リンク交通量ベクトルの点 $\mathbf{x}^{(n)}$ において目的関数の線形近似

$$\begin{aligned}
 Z_p(\mathbf{y}) &\cong Z'(\mathbf{y}) = Z_p(\mathbf{x}^{(n)}) + \nabla Z_p(\mathbf{x}^{(n)})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}) \\
 &= Z_p(\mathbf{x}^{(n)}) + \sum_a (y_a - x_a^{(n)}) \frac{\partial Z_p(\mathbf{x}^{(n)})}{\partial x_a^{(n)}} \\
 &= Z_p(\mathbf{x}^{(n)}) + \sum_a (y_a - x_a^{(n)}) t_a(x_a^{(n)}) \\
 &= \underbrace{Z_p(\mathbf{x}^{(n)})}_{\text{定数}} - \underbrace{\sum_a x_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)})}_{\text{定数}} + \sum_a y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)})
 \end{aligned}$$

以下の補助問題を得る。

$$\min Z'(\mathbf{y}) = \sum_a y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)}) \quad \text{s.t.} \quad \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0, y_a = \sum_k \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs}$$

補助問題

$$\min Z'(\mathbf{y}) = \sum_a y_a^{(n)} t_a(x_a^{(n)}) \quad \text{s. t.} \quad \sum_k f_k^{rs} - q_{rs} = 0, y_a = \sum_k \sum_{rs \in \Omega} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs}$$

これは $t_a(x_a^{(n)})$ (定数) の下で総旅行時間を最小とする \mathbf{y} を求めるもの。

||

$t_a(x_a^{(n)})$ のリンク所要時間で求められる最短経路にすべてのOD交通量を流す **all-or-nothing配分** により $Z'(\mathbf{y})$ を最小にする \mathbf{y} が得られる。

また、この \mathbf{y} は線形近似式における $\nabla Z_p(\mathbf{x}^{(n)})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}) (< 0)$ の項の最小の負値を与えるもの。

→ $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(n)}$ は目的関数 $Z_p(\mathbf{y})$ の点 $\mathbf{x}^{(n)}$ における **最急勾配に沿った降下方向ベクトル** である！

簡単なアルゴリズムであるall-or-nothing配分を繰り返して用いることにより、等価最適化問題の解が求まる！

Flank-Wolfe法のアルゴリズム

Step 1 初期実行可能解の実行

収束回数 $n=1$ としてリンク交通量 $\{x_a^{(n)}\}$ を与える.

Step 2 リンクコストの更新

$\{x_a^{(n)}\}$ に対する所要時間 $\{t_a(x_a^{(n)})\}$ を計算.

Step 3 降下方向ベクトルの探索

各OD間の最短経路探索 + all-or-nothing配分により全交通需要をリンクに負荷. $\{y_a\}$ を求める.

Step 4 ステップサイズの探索

交通量の更新: $x_a^{(n+1)} = x_a^{(n)} + \alpha^{(n)} d_a^{(n)} = x_a^{(n)} + \alpha^{(n)} (y_a - x_a^{(n)})$

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} Z(\alpha) = \sum_a \int_0^{x_a^{(n+1)}} t_a(w) dw$$

によりステップサイズ $\alpha^{(n)}$ とリンク交通量 $x_a^{(n+1)}$ を求める.

Step 5 収束判定

所与の $\varepsilon_1, \varepsilon_2, K$ に対して

$$(1) \sum_a \left(x_a^{(n+1)} - x_a^{(n)} \right) t_a \left(x_a^{(n)} \right) \leq \varepsilon_1 \quad \text{総旅行時間変化なし}$$

$$(2) \max_a \left| \left(x_a^{(n+1)} - x_a^{(n)} \right) / x_a^{(n)} \right| \leq \varepsilon_2 \quad \text{交通量変化なし}$$

$$(3) n > K \quad \text{収束閾値}$$

のいずれかを満たすならば計算終了. そうでない場合 $n = n + 1$ としてStep 2へ.

※リンク容量制約がある場合

BPR関数を用いる場合, x_a が容量を超えた時, コストが無限大に向かって緩やかに増加 $\rightarrow x_a$ は容量を超えても実行可能領域にあり, リンクコストが一位に与えられるため, 容量を考慮する必要なし.

リンクに容量制約がある問題では, ステップサイズ探索時に以下の制約条件を追加する.

$$\alpha \leq \alpha_{max} = \min_{x_a < y_a} \left\{ \left(C_a - x_a^{(n)} \right) / \left(y_a - x_a^{(n)} \right) \right\}$$

均衡配分理論の拡張と実装

均衡理論

- 利用者均衡(UE)とシステム最適(SO: System Optimum)
- Road Pricing
- Braess' Paradox

モデルの拡張

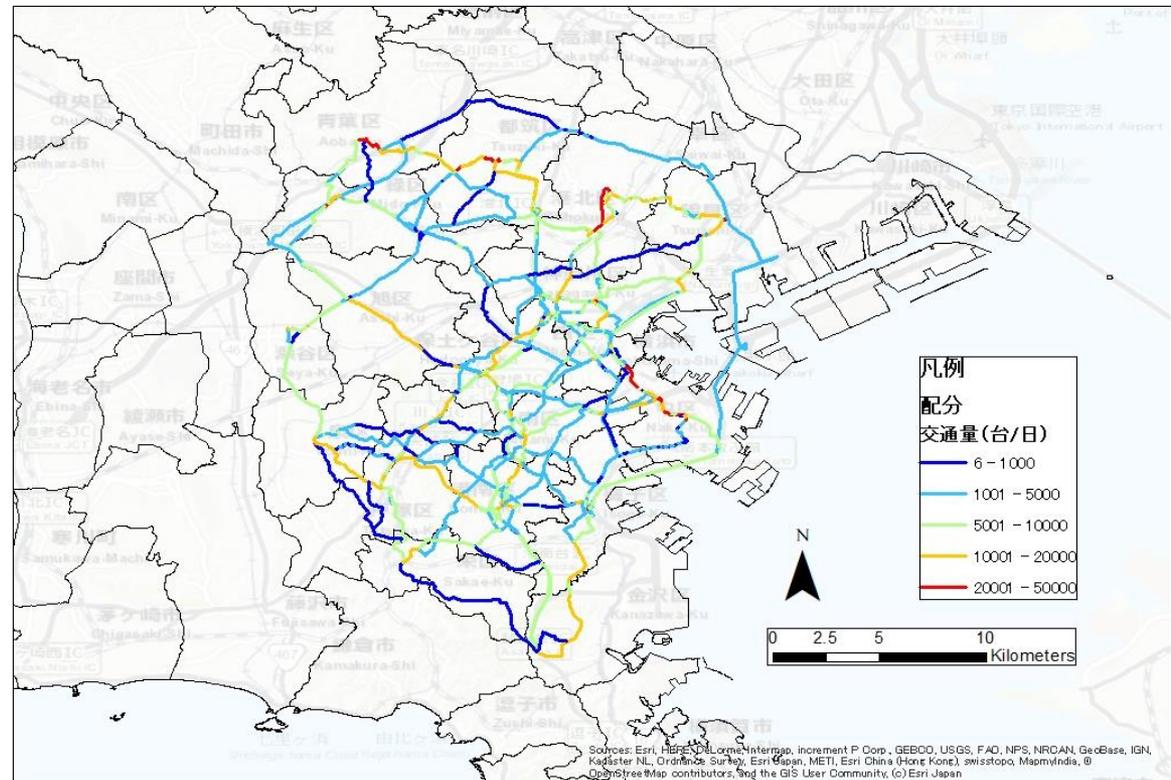
- 確率的利用者均衡配分モデル(SUE: Stochastic User Equilibrium)
- 需要変動型均衡配分モデル(User Equilibrium with Variable Demand)

最適化問題の解法

- 打ち切り二次計画法
- Simplicial Decomposition法

均衡配分の実装

- 単純な街路で均衡配分ができるコードを自分で書いてみよう！
- 利用者均衡配分のコードを（後ほど）配布します(Visual C++).





おしまい