6th Apr 2022

スタートアップゼミ

離散選択モデルと動的離散選択モデル

MNL, NL, RL の基礎

小林里瑳

はじめに

- あなたはランチに何を食べましたか？
  - 生協の食堂でケバブ丼，キッチンカーでカレー，ほっともっと の海苔弁etc…
  - 行動は選択の帰結である
- 行動モデル：人の選択を表現するモデル
  - 連続量の選択（例. 滞在時間）or 離散量の選択（例. 目的地，交通手段，経路）
  - 意思決定者
    - 個人，代表的な家計，組織，企業 etc…
  - 選択肢
    - 意思決定の際に考慮に入れる選択肢 ∈ 環境によって定義されている選択肢
  - 意思決定ルール：意思決定を行うメカニズム
    - 例：優位性，規則，効用最大化，後悔最小化

合理的選択と効用最大化

- 「効用」という一つの尺度を表す関数を考える
- 効用：各消費者が消費する財から得られる主観的な満足・欲望充足の度合い
- 効用最大化の仮定1：<u>人は合理的選択を行う</u>
  - 完備性と推移性：複数の選択肢を選好の順に並べることができる
  - 例）{ケバブ丼，カレー，海苔弁，コンビニおにぎり}

    （ケバブ丼＞カレー），（カレー＞海苔弁），（コンビニおにぎり＜海苔弁）

    ケバブ丼＞カレー＞海苔弁＞コンビニおにぎり

- 効用最大化の仮定2：<u>人は最大の効用を与える選択肢を選択する</u>
  - ケバブ丼を選択 ⇔ 効用(ケバブ) > 効用 (カレー) , 効用 (のり弁)

ランダム効用

- 効用を構成する要因（例：目的地選択）
  - 選択肢の属性：距離，料金，混み具合，所要時間，土地利用
  - 個人の属性：性別，年齢，収入
  - トリップの属性：トリップ目的，時間帯

$$U_{coop} = \theta_{coop} + \theta_D Distance_{coop} + \theta_{cost} Cost_{coop} + \varepsilon_{coop}$$

$$U_{car} = \theta_{car} + \theta_D Distance_{car} + \theta_{cost} Cost_{car} + \theta_{age} Age_{car} + \varepsilon_{car}$$

$$U_{hot} = \theta_D Distance_{hot} + \theta_{hot} Cost_{hot} + \varepsilon_{coop}$$

確定項　誤差項

θ:パラメータ，　$Distance_{car}$ ：説明変数
線形関数で表される

ランダム効用

- 効用関数
  - 選択肢 i を選択した時得られる効用 U_i は確定項 V_i と誤差項 ε_i の和で表される
  - 確定項 V_i は説明変数 x_i の線形和 $V_i = \theta \cdot x_i$ で表される
  - 基本的にはパラメータベクトル θ を推定する
- 誤差項 ε_i
  - 分析者にとって意思決定者の持つ真の効用は不明，従ってランダム（誤差）項を用いて効用を確率的に表す
  - 誤差項に含まれるもの
    - 非観測属性：快適性，移動の自由度　etc
    - 測定誤差：所要時間，待ち時間 etc
    - 情報の不完全性：認知時間と実際の時間のズレ
    - 代理変数（http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/model16/lecture/Kurauchi.pdf）
    - 個人の指向性や気分

誤差項の分布

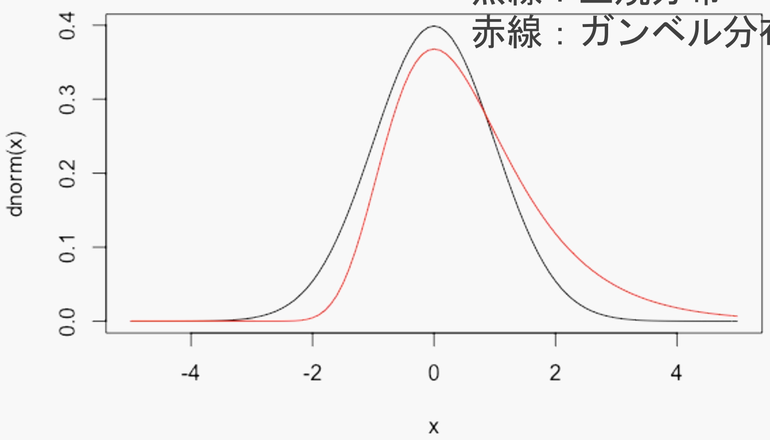
- 分析者にとって効用が最大となる選択肢は確率的

$$\Pr(i) = Pr\left(U_i \geq U_j, \forall j \in C_n\right)$$
$$= Pr\left(V_i + \varepsilon_i \geq V_j + \varepsilon_j\right)$$
$$= Pr\left(V_i - V_j \geq \varepsilon_j - \varepsilon_i\right)$$
$$= F_\varepsilon\left(V_i - V_j\right)$$

C_n ：選択肢集合
ε_n ：$\varepsilon_j - \varepsilon_i$
F_ε ：ε_n の累積分布関数

- 選択確率は確定項と誤差項の分布F_ε に依存する
- 誤差項の確率分布によってモデルが異なる
  - 多変量正規分布 ：多項プロビットモデル
  - IID ガンベル分布 ：多項ロジットモデル

黒線：正規分布
赤線：ガンベル分布



多項プロビットモデル，多項ロジットモデル

- 多項プロビットモデル
  - ε~ 多変量正規分布
  - ε が非常に多くの要因を含む→中心極限定理より分布の正規性に意味がある
  - ε は互いに分散が異なり相関を持つことができる
  - Open-form のため計算コストが高い
- 多項ロジットモデル
  - ε~ IID (独立同分布) ガンベル分布... プロビットモデルの近似
  - Closed-formのため計算コストが低い

選択肢 i の選択確率式

$$P(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V/\sigma} exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2\right) d\varepsilon$$

選択肢 i の選択確率式

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\exp(\mu V_i) + \exp(\mu V_j)}$$

$$= \frac{1}{1+\exp(-\mu(V_i - V_j))}$$

多項ロジット (Multinominal Logit = MNL) モデル

- 選択肢 i の選択確率式

$$P(i)=\Pr[V_i+\varepsilon_i \geq \max_{j\in C_n,\, j\neq i}(V_j+\varepsilon_j)]=\frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j\in C}\exp(\mu V_j)}$$

- IIA 特性（無関係な選択肢からの選択確率の独立）
  - 選択確率の比は無関係な選択肢に影響を受けない

$car, bus, rail,$ $walk, bike$

C

A

$$\mathrm{P}(car|C)=\frac{\exp(V_{car})}{\exp(\mu V_{car})+\exp(\mu V_{bus})+\exp(\mu V_{rail})}$$

$$\mathrm{P}(car|A)=\frac{\exp(V_{car})}{\exp(\mu V_{car})+\exp(\mu V_{bus})+\exp(\mu V_{rail})+\exp(\mu V_{walk})+\exp(\mu V_{bike})}$$

$$\frac{\mathrm{P}(car|C)}{\mathrm{P}(rail|C)}=\frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{rail})}=\frac{\mathrm{P}(car|A)}{\mathrm{P}(rail|A)}$$

赤バス青バス問題

選択肢が青バスと自動車だけの場合

0.50　0.50

自動車　青バス

選択肢に赤バスが加わった場合

0.33　0.33　0.33

本当に？

自動車　青バス　赤バス

本当はこう？

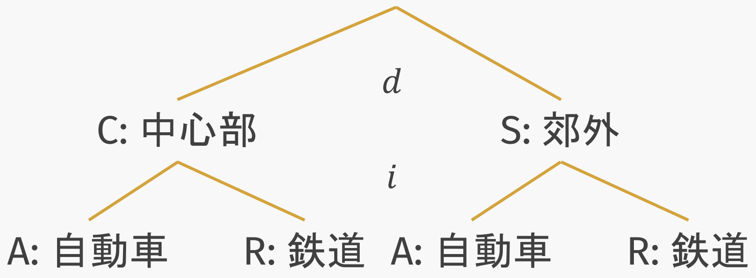
バス

自動車　青バス　赤バス

0.50　0.25　0.25

ネステッドロジット(NL) モデル

- 目的地・交通手段選択の例
  - 目的地選択の選択肢d
  - 手段選択の選択肢i



- 同時選択の選択肢di の効用関数と選択確率

$$U_{di} = V_d + V_i + V_{di} + \varepsilon_d + \varepsilon_{di}$$

$$P(di) = P(i\,|d)P(d)$$

② ①

  - V_d: 目的地選択d に特有な効用の確定項
  - V_i: 手段選択i に特有な効用の確定項
  - V_{di}: 目的地選択d と手段選択i の組み合わせで決まる効用の確定項
  - ε_d :目的地選択d に特有な効用の誤差項，　U_{di}の最大値がスケールパラメータμ_dを持つ ガンベル分布になるような分布に従うと仮定(*)
  - ε_{di}:目的地選択d と手段選択i の組み合わせで決まる効用の誤差項，スケールパラメータμ^iを持つIIDガンベル分布に 従うと仮定(**)

ネステッドロジット(NL) モデル

- 同時選択の選択肢di の効用関数と選択確率

$$U_{di} = V_d + V_i + V_{di} + \varepsilon_d + \varepsilon_{di} \qquad P(di) = \underset{②}{P(i\,|d)}\underset{①}{P(d)}$$

- ①周辺確率

$$P(d) = \Pr\left[\max_{i\in\{A,R\}} U_{di} \geq \max_{i\in\{A,R\}} U_{d'i}, d \neq d'\right]$$
$$= \Pr\left[V_d + \varepsilon_d + \max_{i\in\{A,R\}}(V_i + V_{di} + \boxed{\varepsilon_{di}}) \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + \max_{i\in\{A,R\}}(V_i + V_{d'i} + \boxed{\varepsilon_{d'i}}), d \neq d'\right]$$

(**) ε_{di}はIIDなスケールパラメータμ^iガンベル分布に従うと仮定

ネステッドロジット(NL) モデル

- ここでガンベル分布の性質について

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_J$がそれぞれ$(\eta_1, \mu)$,$(\eta_2, \mu)$,…$(\eta_{\mathrm{j}}, \mu)$ のパラメータを持つ互いに独立なガンベル分布 に従う時，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_J$の最大値max. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_J)$もガンベル分布に従い，そのパラメータは 以下のようになる

$$\left(\frac{1}{\mu}\ln\sum_{j=1}^{J}\exp(\mu\eta_i)\,,\mu\right)$$

(**) よりε_{di}はスケールパラメータμ^i を持つガンベル分布に従うので上記の性質から,

$\max_{i\in\{A,R\}}(V_i + V_{di} + \varepsilon_{di})$はガンベル分布に従い，そのパラメータは以下の通りになる.

$$\left(\frac{1}{\mu^i}\ln\sum_{i\in\{A,R\}} exp\{\mu^i(V_i + V_{im})\}\,,\mu^i\right)$$

ネステッドロジット(NL) モデル

$$V'_d \equiv \frac{1}{\mu^i} \ln \sum_{i \in \{A,R\}} exp\{\mu^i (V_i + V_{im})\}$$

$$\varepsilon'_d \equiv \max_{i \in \{A,R\}} (V_i + V_{di} + \varepsilon_{di}) - V'_d$$ とおくと，

$$\mathrm{P}(d) = \mathrm{Pr}\left[V_d + \varepsilon_d + \max_{i \in \{A,R\}} (V_i + V_{di} + \varepsilon_{di}) \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + \max_{i \in \{A,R\}} (V_i + V_{d'i} + \varepsilon_{d'i}), d \neq d'\right]$$

$$= \mathrm{Pr}[V_d + \varepsilon_d + V'_d + \varepsilon'_d \geq V_{d'} + \varepsilon_{d'} + V'_{d'} + \varepsilon'_{d'}]$$

(*)よりε_dはスケールパラメータμ^d を持つガンベル分布に従うので$\varepsilon_{d'} + \varepsilon'_{d'}$もスケールパラメータ$\mu^d$ を持つガンベル分布となる．従って

$$\boxed{\mathrm{P}(d) = \frac{\exp\{\mu^d (V_d + V'_d)\}}{\sum_{d \in \{C,S\}} \exp\{\mu^d (V_d + V'_d)\}}}$$

ネステッドロジット(NL) モデル

- ②条件付き確率

$$P(i|d) = \Pr[U_{di} \geq U_{di'}, i \in \{A, R\}, i \neq i'|d]$$
$$= \Pr[V_i + V_{di} + \varepsilon_{di} \geq V_{i'} + V_{di'} + \varepsilon_{di'}]$$

ここで(**) よりε_{di} はスケールパラメータμ^iを持つIIDガンベル分布に従う

したがって$P(i|d)$ はロジットの式で与えられる.

$$P(i|d) = \frac{\exp\{\mu^i(V_i + V_{di})\}}{\sum_{i' \in \{A,R\}} \exp\{\mu^i(V_{i'} + V_{di'})\}}$$

ネステッドロジット(NL) モデル

$$\mathrm{P}(d) = \frac{\exp\{\mu^d(V_d + V'_d)\}}{\sum_{d\in\{C,S\}} \exp\{\mu^d(V_d + V'_d)\}}$$

$$P(i|d) = \frac{\exp\left\{\mu^i(V_i + V_{di})\right\}}{\sum_{i'\in\{A,R\}} \exp\{\mu^i(V_{i'} + V_{di'})\}}$$

- 同時確率は次の通り

$$P(d,i) = P(i|d)P(d) = \frac{\exp\left\{\mu^i(V_i + V_{di})\right\}}{\sum_{i'\in\{A,R\}} \exp\left\{\mu^i(V_{i'} + V_{di'})\right\}} \frac{\exp\left\{\mu^d\left(V_d + V'_d\right)\right\}}{\sum_{d\in\{C,S\}} \exp\left\{\mu^d(V_d + V'_d)\right\}}$$

パラメータ推定：最尤推定

- サンプルから母集団の行動原理を推測＝行動モデルのパラメータを求める
- 尤度：ある前提条件に従って結果が出現する場合，観察結果から見て前提条件が「何であった」を推測するもっともらしさを表す数値
- 母集団から独立に観測されたn 個の標本$x_1, \dots x_n$を抽出したとき得られるデータ $X_1, X_2, \dots, X_n$が得られる確率は

$$f_n(x_1, \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

- これを未知パラメータθの関数と見ると尤度関数L(θ)ができる

パラメータ推定：最尤推定

- 尤度関数L(θ)：パラメータθ を仮定して観察された標本セット$\boldsymbol{x}$が得られる確率

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i} P_n(i|\boldsymbol{\theta})^{y_{in}}$$

y_{in}は選択 n において選択肢i が選択された時1，そうでないとき0

- 対数尤度関数LL(θ)
  - n が大きくなると尤度関数の桁数が大きく（小さく）なる
  - そのため対数尤度関数で評価することが一般的

$$LL(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i} y_{in} \log P_n(i|\boldsymbol{\theta})$$

  - 最大尤度では全てのパラメータについて一階の偏微分が0
  - $\frac{\partial LL}{\partial \theta_k} = 0 \ \forall k$ を解いて，対数尤度関数を最大化する最適な$\boldsymbol{\theta}$ を求める

MNLモデルのパラメータ推定

```r
### Multinomial Logit model estimation

### データファイルの読み込み
Data <- read.csv("C:/YokohamaData.csv",header=TRUE)
## データ数数える
hh <-

## パラメータ数の分だけ初期値を代入した列ベクトル「b0」を作成
b0 <-
```

1. まずはデータを読み込む
2. データ数を数える（入力してみよう）
3. パラメータ数の初期値(=0)を代入したベクトル を作る

   今回はパラメータ数を5にするので、要素が5 の0ベクトルを作る

MNLモデルのパラメータ推定

```
##### Logit modelの対数尤度関数の定義 #####

fr <- function(x) {
  ### パラメータの宣言
  ## 定数項
  b1 <- x[1]
  b2 <- x[2]
  b3 <- x[3]
  b4 <- x[4]
  print(b4)
  ## 目的地までの所要時間
  d1 <- x[5]

  ## 対数尤度のための変数を宣言
  LL = 0

  ### 今回用いる交通手段は以下の５つ
  ## 鉄道(train)
  ## バス(bus)
  ## 自動車(car)
  ## 自転車(bike)
  ## 徒歩(walk)

  ## 効用の計算：説明変数にしたい列を入れる
  # 時間                          # 定数項
  train  <- Data$ModeAvailableTrain*
  bus    <- Data$ModeAvailableBus  *
  car    <- Data$ModeAvailableCar  *
  bike   <- Data$ModeAvailableBike *
  walk   <- Data$ModeAvailableWalk *
```

?

ベクトルを入れると尤度を出す関数frを作る

今回の効用関数

$$V_{train} = b1 + d1 * \text{鉄道所要時間}/100$$
$$V_{bus} = b2 + d1 * \text{バス所要時間}/100$$
$$V_{car} = b3 + d1 * \text{自動車所要時間}/100$$
$$V_{bike} = b4 + d1 * \text{自転車所要時間}/100$$
$$V_{walk} = \quad + d1 * \text{徒歩所要時間}/100$$

MNLの確率

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in A} \exp(\mu V_i)}$$

MNLモデルのパラメータ推定

```r
### 選択確率の計算
## 分母となる、各々のexp(V)の和をつくる
deno <- (car + train + bus + bike + walk)

## それぞれ計算する
Ptrain <- Data$ModeAvailableTrain*
Pbus   <- Data$ModeAvailableBus   *      ?
Pcar   <- Data$ModeAvailableCar   *
Pbike  <- Data$ModeAvailableBike  *
Pwalk  <- Data$ModeAvailableWalk  *

## 選択確率が0 になってしまった場合に起こる問題の回避
## その場合には 1 を返して対応
Ptrain <-
Pbus   <-
Pcar   <-        ?
Pbike  <-
Pwalk  <-


## 選択結果
Ctrain   <- Data$MainModeENG ="Rail"
Cbus     <- Data$MainModeENG ="Bus"
Ccar     <- Data$MainModeENG ="Car"
Cbike    <- Data$MainModeENG ="Bicycle"
Cwalk    <- Data$MainModeENG ="Walk"

## 対数尤度の計算
LL <-            ?
```

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in A} \exp(\mu V_i)}$$

選択確率が0だと尤度も0になる

すると$\ln 0 = -\infty$ になってしまいエラーが出る

選択確率0の時，1にする処理をする

$$LL(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i} y_{in} \log P_n(i|\boldsymbol{\theta})$$

MNLモデルのパラメータ推定

```
## パラメータ値の最適化　　最適化関数optim（重要なので要確認）
res <- optim( ?
```

- 最適化関数optim
  - optim(par, fn, gr = NULL, method = c("Nelder-Mead", "BFGS", "CG", "L-BFGS-B", "SANN"), lower = -Inf, upper = Inf, control = list(), hessian = FALSE, ...)
  - Par というパラメータを初期値としてfnを最小化するようにパラメータを動かしながら反復して探索する（最大化の場合はfnscale =-1）
  - 探索方法をmethod から選ぶ
    - “Nelder-Mead”法：関数値だけを用い頑健(初期値の選択に敏感)だが遅い
    - “BFGS”法：準ニュートン法．関数値と勾配関数を関数の曲面近似に使う
    - “CG”法：共役勾配法．破綻しやすいがメモリ使用量が少ない
    - “L-BFGS-B”法：変数の上限・下限を設定した準ニュートン法
    - “SANN”法：確率的手法である焼きなまし法．関数値だけを用い遅い．

MNLモデルのパラメータ推定

```r
## パラメータ値の最適化　　最適化関数optim（重要なので要確認）
res <- optim( )

## パラメータ推定値、ヘッセ行列
b   <- res$par
hhh <- res$hessian

## t値の計算
tval  <- b/ ?

## 初期尤度
L0 <- fr(b0)
## 最終尤度
LL <- res$value

##### 結果の出力 #####
print(res)
## 初期尤度
print(L0)
## 最終尤度
print(LL)
## ρ^2値 (尤度比)
print((L0-LL)/L0)
## 修正済みρ^2値
print ?
## パラメータ推定値
print(b)
## t値
print(tval)
```

- t 値
  - 母集団の平均値の仮説検定に利用
  - |t| >1.96 で5%有意
  - ヘッセ行列の逆行列の対角成分の平方根が分母
- 修正済み尤度比
  - $\frac{L0-(LL-\text{パラメータ数})}{L0}$

課題

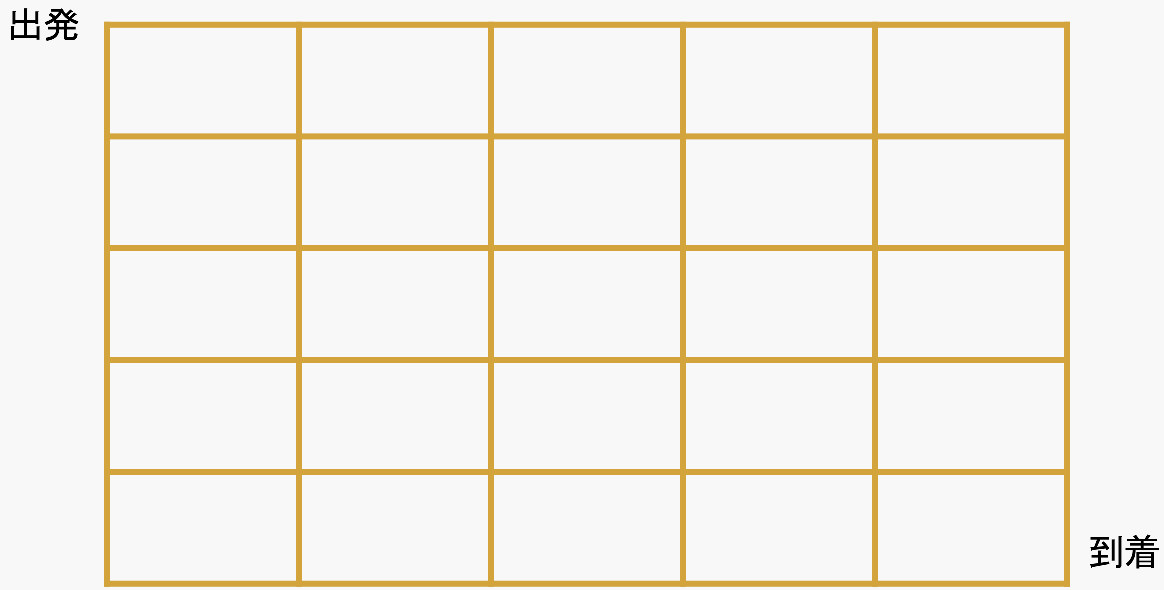
- 来週までの課題
  - 今回見せたコードを穴埋めして完成させる
  - 自分で効用関数を設定してパラメータ推定を行う
- 来週までの課題アドバンスト
  - NLやCNL (Cross Nested Logit)など他のモデルでも推定し、 MNLの場合と比較する.
  - パラメータ推定の結果から，政策を行った際に起こる変化を予測し，その効果について述べる
    - 例：横浜臨海部で自動運転タクシーを導入したい．料金をいくらにすればどれくらいの利用者が確保できるだろうか？
      - ヒント 1. 交通機関選択モデルのパラメータを推定する
      - ヒント 2. 自動運転タクシーを導入した際のLOSについて考える
      - ヒント 3. ある距離帯の移動における自動運転タクシーの選択確率を計算する

Recursive Logit Model

Fosgerau, Mogens, Emma Frejinger, and Anders Karlstrom. "A link based network route choice model with unrestricted choice set." *Transportation Research Part B: Methodological* 56 (2013): 70-80.

はじめに

- 自宅から最寄り駅に行くルートをランダム効用最大化理論で考える
- MNL モデルでは経路の羅列が不可能（組み合わせ爆発を起こすため）



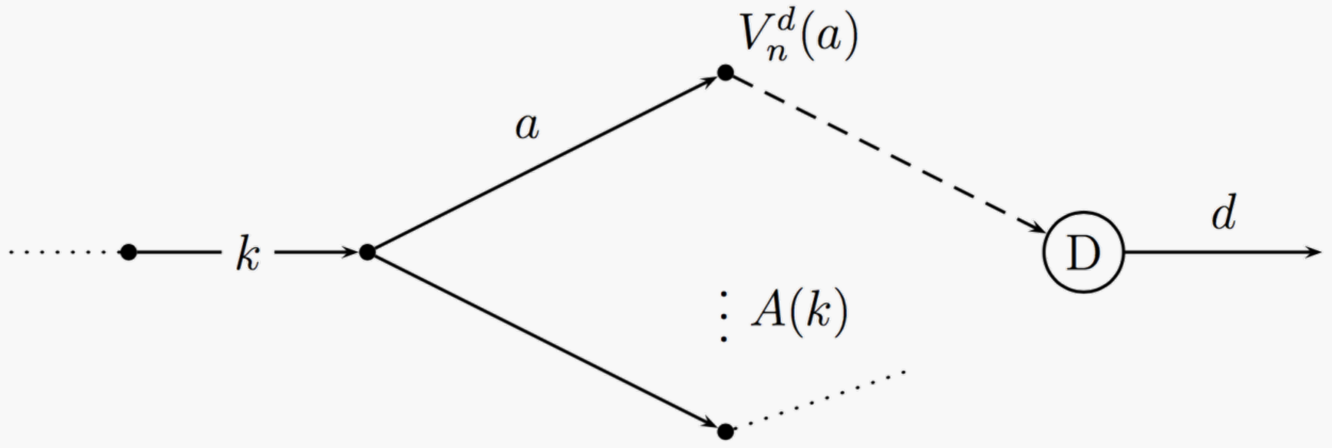
- 解決方法
  - 代表的なルートのみ抽出する：明示的な経路集合を定める
  - 逐次的な行動モデルを考えることで明示的な経路列挙を必要としない

Recursive Logit モデルとは

- 即時効用，誤差項，目的地までの期待最大効用に従って各ノードで選択
  - 選択そのものはMNL モデル
- 逐次的かつ再帰的な方法で経路が選択される
  - 逐次的：リンク選択の積み重ねが経路全体の選択になると考える
  - 再帰的：次の状態だけでなく将来の状態まで考えた効用の式…Bellman 方程式の利用
  - マルコフ過程に従うと仮定する
- 選択肢は無限集合であり，ループを含む経路を選択する可能性がある
  - 道路ネットワークが与えられている場合，経路集合を設定しなくとも良い
    - アクティビティパス選択などネットワークを限定する必要がある場合はまた別

定式化

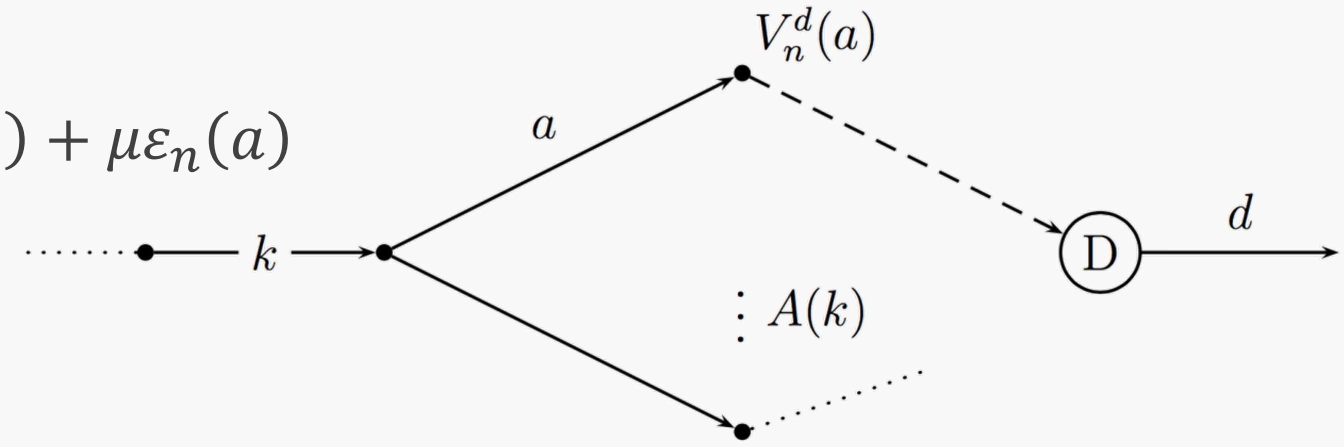
- 有向連結グラフ（ネットワーク）$\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ を考える
  - $\mathcal{S}$: ノードの集合，$\mathcal{A}$: リンクの集合
  - リンク $k, a \in \mathcal{A}$
- リンクk の終点から出るリンクの集合 $\mathcal{A}(k)$， $a \in \mathcal{A}(k) \in \mathcal{A}$



- OからD の経路はリンクの列$[k_0 \dots k_I]$ で表される $\forall i < I, k_{i+1} \in \mathcal{A}(k_i)$,

定式化

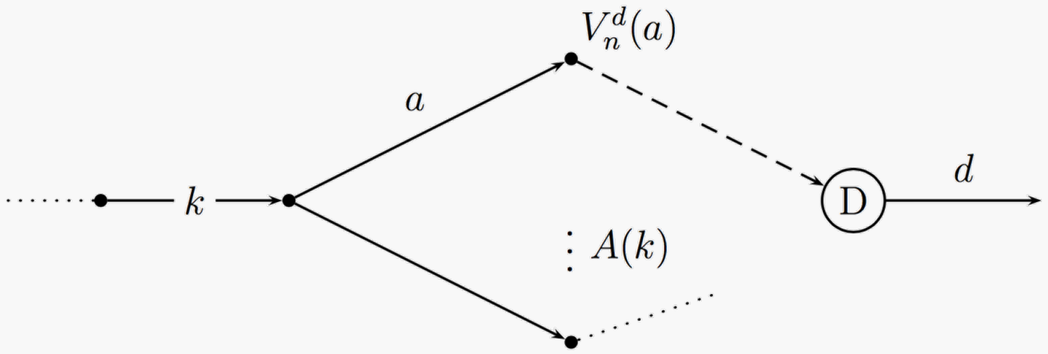
- 効用関数
  - 即時効用　$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
  - 期待効用　$V_n^d(a)$



- 終点のダミーリンク d
  - 目的地ノード(D) からダミーリンク d を追加し，吸収状態を定義
  - 全リンクの集合を$\tilde{A}^d = \mathcal{A} \cup d$
  - 目的地ノードを終点とする全てのリンクkに対して$v_n(d|k) = 0$ を仮定する
- 主体はマルコフ過程に従って次の状態を選択する
  - 各リンクk でランダム効用$\varepsilon_n(a)$を観測
  - 即時効用と期待効用の和で表される効用を最大化する　$v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a) + V_n^d(a)$

定式化

- 効用関数
  - 即時効用　$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
    - 旅行者 n がリンク k にいる状態で選択肢集合 $\mathcal{A}(k)$ からリンク a を選択する
    - 確定項　$v_n(a|k) = v_n(x_{n,a|k}\,;\,\beta)$
    - 誤差項　$\mu\varepsilon_n(a)$：平均値0のガンベル分布を仮定
  - 期待効用　$V_n^d(a)$
    - リンク a を選択した場合の目的地Dから伸びるダミーリンク d までの期待効用



定式化

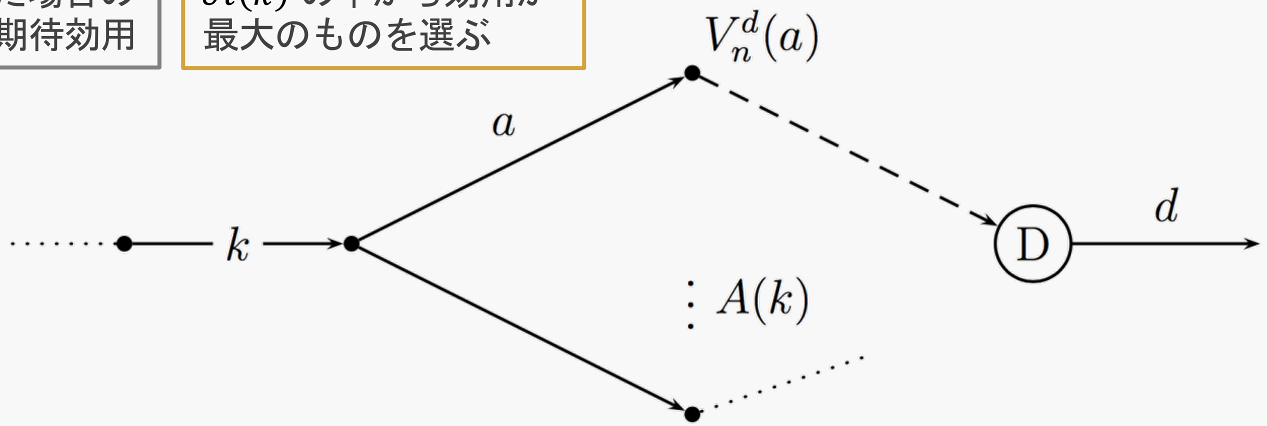
- 効用関数
  - 即時効用　$u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
  - 期待効用　$V_n^d(a)$
- 価値関数 $V_n^d(k)$: Bellman 方程式と呼ぶ

リンク k において次にリンクa を選んだ場合の効用

$$\boxed{V_n^d(k)} = \mathrm{E}\left[\boxed{\max_{a\in\mathcal{A}(k)} \left(\boxed{v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)}\right)}\right] \quad \forall k \in \mathcal{A}$$

リンクk　を選んだ場合の目的地d　までの期待効用

$\mathcal{A}(k)$ の中から効用が最大のものを選ぶ



選択確率

- リンク k における次のリンク a の選択確率はMNL モデルで表される

$$P_n^d(a|k) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a)\right)\right)}{\sum_{a' \in \mathcal{A}(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + V_n^d(a')\right)\right)} \tag{3}$$

- 価値関数は次のように書くことができる

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a \in \mathcal{A}(k)} \delta(a|k) \exp\left(\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + V_n^d(a))\right) & \forall k \in \mathcal{A} \\ 0 & \forall k = d \end{cases} \tag{4}$$

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & if\ a \in \mathcal{A}(k) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

価値関数の求め方

- Bellman 方程式を解く $V_n^d(k) = \mathrm{E}\left[\max_{a\in\mathcal{A}(k)}\left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right)\right]$
  - 式(4) の両辺に対数をとって変換する

$$e^{\frac{1}{\mu}V^d(k)} = \begin{cases} \sum_{a\in\mathcal{A}(k)} \delta(a|k)e^{\frac{1}{\mu}(v(a|k)+V^d(a))} & \forall k \in \mathcal{A} \\ 1 & k = d \end{cases} \tag{5}$$

  - さらにこれを行列式で定義する
  - 以下に示す要素M から構成される行列 $\boldsymbol{M}$ ($|\mathcal{A}|\times|\mathcal{A}|$) を定義する

$$M_{ka} = \begin{cases} \delta(a|k)e^{\frac{1}{\mu}(v(a|k))} & \forall k \in \mathcal{A}(k) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{6}$$

価値関数の求め方

- Bellman 方程式を解く $V_n^d(k) = \mathrm{E}\left[\max_{a \in \mathcal{A}(k)} \left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a) \right) \right]$

  - さらに以下の要素からなるベクトル$\boldsymbol{b}$ $(|\mathcal{A}|\times 1)$と$\boldsymbol{z}$ $(|\mathcal{A}|\times 1)$を定義する

$$b_k = \begin{cases} 1 & k \neq d \\ 0 & k = d \end{cases} \qquad z_k = e^{\frac{1}{\mu}V^d(k)}$$

  - すると式(5) は以下のように簡潔な線形方程式で書き下すことができる

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{I}$ は単位行列

  - $\mathbf{z}$ が解を持つ条件は$\mathbf{I} - \mathbf{M}$ が逆行列を持つこと
    - 逆行列を持たない可能性もある．持つかどうかはパスの数や瞬間効用のサイズに依存する．
    - 行列$\mathbf{M}^m$は長さmリンクの任意のリンクペア間のパス効用を含む
  - 逆行列で解けない場合は，反復法を使って解を求めることになる

遷移確率の求め方

- 選択確率に対応する行列$\boldsymbol{P}$ を作る
  - 目的地に対するリンクの選択確率は出発点に依存しないことに注意
  - 式(3) を$\mathcal{A}$ 内のリンクについて定義した行列$\boldsymbol{P}$ に整理する
  - 状態 k に対応する行は以下の通り． ⊙は要素ごとの積， $\boldsymbol{M}_k$はMのk 列目を表す

$$P_k = \frac{\boldsymbol{M}_k \odot \boldsymbol{z}^T}{\boldsymbol{M}_k \boldsymbol{z}}$$

$$M_{ka} = \begin{cases} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v(a|k))} & \forall k \in \mathcal{A}(k) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

経路選択確率

- 経路選択確率
  - 経路$\sigma = \{k_i\}_{i=0}^{I} = \{k_0, k_1, \dots, k_I\}$ について考える　k_0 は出発リンク，　$k_\mathrm{I} = d$　とする
  - 経路σ の選択確率は

$$P(\sigma) = \prod_{i=0}^{I-1} P(k_{i+1}|k_i) = \prod_{i=0}^{I-1} \frac{e^{\frac{1}{\mu}\left(v(k_{i+1}|k_i)+V(k_{i+1})\right)}}{\sum_{a\in A(k)} e^{\frac{1}{\mu}\left(v(a|k_i)+V(a)\right)}}$$

$$= \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}\left(v(k_{i+1}|k_i)+V(k_{i+1})-V(k_i)\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)}$$

経路選択確率

- 経路選択確率
  - $v(\sigma) = \sum_{i=0}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i)$ と置くと

$$P(\sigma) = e^{-\frac{1}{\mu}V(k_0)} \prod_{i=0}^{I-1} e^{\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{e^{\frac{1}{\mu}V(k_0)}} = \frac{e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma)}}{\sum_{\sigma\prime\in\Omega} e^{\frac{1}{\mu}v(\sigma\prime)}}$$

  - ここでΩ は全選択肢の集合
  - 式(10) の分子は経路σの確定項，分母は可能な経路の確定項の和であるため，このモデルは無限の選択肢を持つMNL モデルと同等
  - 従ってIIA 特性を持つ

リンク交通量

- リンク交通量：リンクd を終点とするトリップを考える
  - $F(a)$：リンクa の交通量の期待値
  - $G(a)$：リンクa を起点とするトリップの需要量
  - 以下のような関係になる

$$F(a) = \underbrace{\boxed{G(a)}}_{\text{リンク}a\text{ で発生した量}} + \underbrace{\boxed{\sum_{k \in A} P(a|k) F(k)}}_{\text{流れ込んでくる量}}$$

  - ベクトルを使って表すと以下の通りになる

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{F} \iff \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^T\right)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}$$

  - $\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^T\right)$ は可逆 (Baillon and Cominetti, 2008)
  - 従って線形方程式でリンク交通量を計算することができる

選択肢集合 A

- リンク
  - リンクベースでどこのリンクが接続しているか
- ノード
  - ノードベースでどこのノードを通っているか
  - 地図をグリッド上に分割し，そのセントロイドをノードで表し，隣接するタイルを選択肢集合として通ったタイルを経路とする方法
- ノードを状態に見立てる
  - 居住状態をノードとし，その変遷をネットワークとする
  - 土地所有形態をノードとし，その変遷をネットワークとする
  - アクティビティの状態をノードに見立てる

Discounted Recursive Logit Model (Oyama, Hato, 2017)

- Bellman方程式に時間割引率を導入

$$V_n^d(k) = \max_{s_{j+1} \in A(k)} E\left[\sum_{t=j}^{\infty} \boxed{\beta^{\,t-j}}\, u(s_{j+1} s_j; \theta)\right]$$

$$= E\left[\max_{a \in A(k)} v_n(a|k) + \boxed{\beta}\, V_n^d(a) + \mu \varepsilon_n(a)\right]$$

- 時間割引率を導入し，将来価値の低減，未来の不確実性や近視眼的な選択を表現

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a \in \mathcal{A}(k)} \delta(a|k) \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + \boxed{\beta}\, V_n^d(a)\right)\right) & \forall k \in \mathcal{A} \\ 0 & \forall k = d \end{cases}$$

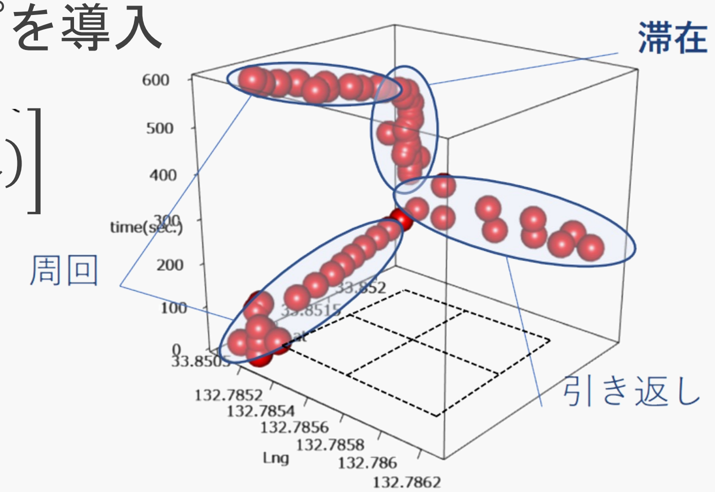
$$P_n^d(a|k) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a|k) + \beta\, V_n^d(a)\right)\right)}{\sum_{a' \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}\left(v_n(a'|k) + \beta\, V_n^d(a')\right)\right)}$$

時空間構造化NW上での一般化RLモデル

- RL モデルの問題点
  - 将来の効用について完全情報を仮定している（将来効用の不確実性を評価できない）
  - 滞在活動など時空間的な活動を記述できない
    - 周回や滞在，引き返しといった行動はサイクリックな経路が発生するためRL モデルでは記述できない
- 大山・羽藤(2016) 時空間構造化NW上での一般化RL モデル
  - 期待効用に時間割引率を導入
  - xy平面で表される交通NWに離散時間であるタイムステップを導入

$$V_n^{S_T}(k) = E\left[\max_{a \in A(k)} v_n(a|k) + \beta\, V_n^{S_T}(a) + \mu\varepsilon_n(a)\right]$$

- S_T: 最大タイムステップ T の時の状態S
- 時間制約T を設定する



課題 :RL モデルを触ってみる

- 敷地
  - R用に道後のデータ，python 用に豊洲と渋谷のデータがあります
- 説明変数
  - いくつか変数を変えて試してみてください
    - 豊洲と渋谷はmain_rl.py 道後はmain_RL.R から変更可能です
  - 説明変数は渋谷と豊洲はpylink，道後はpynode からわかります
  - python のコードはjupyter notebook かGoogle Colabで回してみましょう
    - 環境構築は各々違うと思うので各自「jupyter notebook mac」など調べながら行ってください
- 感想
  - とりあえずRL のコードを触ることが重要なので触ってみた感想をまとめてください