メカニズムデザイン

スタートアップゼミ#5

2023/4/26

M1 林

Q: 誰に渡せばいい？

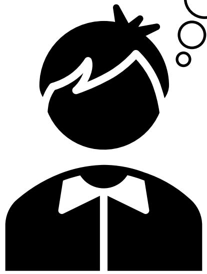
この中の1人だけに
MacBook Pro(M2チップ)
をあげるよ

今のパソコンが壊れ
かけてるから真剣に
欲しい！

推定時間を短くした
いから
欲しい！

Windowsの方が好き
だけどせっかくなら
欲しい！

Aさん



Bさん

Cさん

1st price auction

一番お金を出す奴に
あげる
自分の言った額をちゃん
と払ってね

6万円までなら出す

3万円までなら出す

100円ならもらう

Aさん

Bさん

Cさん

1st price auction

一番お金を出す奴に
あげる
自分の言った額をちゃん
と払ってね

6万円までなら出す

~~**6万**~~

Aさん

3万円までなら出す

~~**3万**~~

Bさん

…とはならない

100円ならもらう

~~**100**~~

Cさん

表明

- ある人にとっての商品の価値……**評価値**
- 入札すると表明した価格……**入札額**
    - 評価値 = 入札額 のとき，その人は**正直表明**したという
- 落札成功した場合，**評価値 - 支払額 = 効用**
    - 1st price auction では 入札額 = 支払額

Aさんには**正直表明するよりもっといい戦略がある！**

1st price auction: 正直表明しない方が得

Aさん以外の全員が正直表明し，その入札額は分からないとする．

仮に，自分以外の入札額が $[0, m]$ の一様分布とする．

Aさんの評価額がv，入札額がbのとき，Aさんが落札する確率は

$$\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

BさんとCさんに
それぞれ勝つ

従って期待効用は

$$(v-b)\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

落札失敗したら効用0なので
(成功時の効用)×(成功確率)

よってAさんの最適戦略は

$$\max_{\mathrm{b}}(v-b)\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

これを解いて，

$$\arg\max_{b}(v-b)\left(\frac{b}{m}\right)^2 = \frac{2v}{3}$$

実はmに
依存しない

評価値が6万円なら
4万円入札するのが最適

2nd price auction

一番お金を出す奴に
あげる
2番目に高い人が言った
額を払ってね

6万円までなら出

6万

→3万円支払い

Aさん

3万円までなら出

3万

Bさん

正直表明が最適

100円ならもら

00円!

Cさん

2nd price auction: 正直表明が最適

Aさん以外の全員が正直表明し，その入札額は分からないとする．
仮に，自分以外の入札額が $[0, m]$ の一様分布とする．
Aさんの評価額がv，入札額がbのとき，Aさんが落札する確率は

$$\left(\frac{b}{m}\right)^2$$

Aさんが落札したときの，2番目の入札額(=Aさんの支払額)の確率分布を考える．
累積確率密度関数$F(x)$は，

$$F(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

Bさんの入札額がx以下 かつ
Cさんの入札額がx以下

従って2番目の入札額の期待値は，

$$\int_0^b x f(x)\,dx = [xF(x)]_0^b - \int_0^b F(x)dx = \frac{2b}{3}$$

※部分積分

よってAさんの最適戦略は，

$$\arg\max_b \left(v - \frac{2b}{3}\right)\left(\frac{b}{m}\right)^2 = v$$

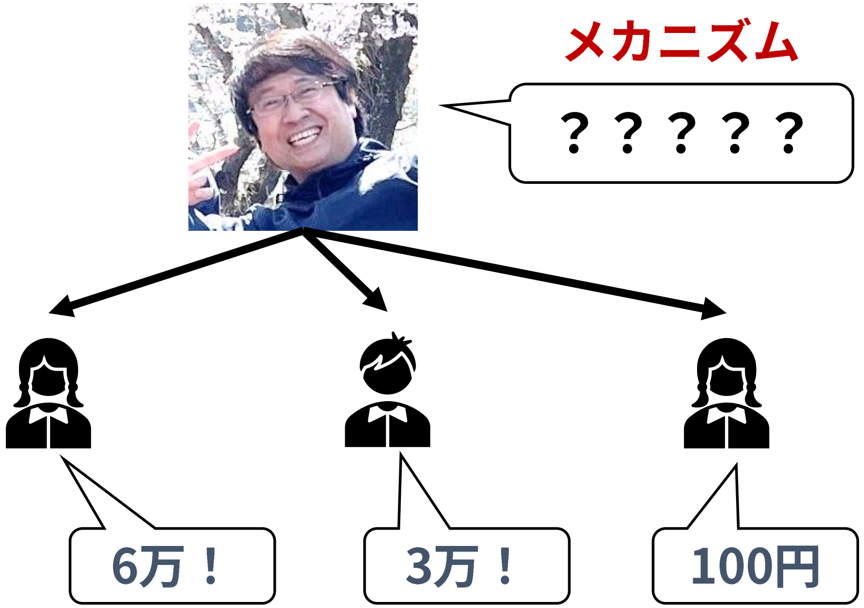
$\boxed{\text{評価額}v\text{の通り入札するのが最適}}$

メカニズムデザインとは

ゲーム理論
ルールが与えられたときのプレイヤーの行動を考える

↓

メカニズムデザイン
ルール(メカニズム)を適切に設計することでプレイヤーの**行動を望ましい方向に誘導**する



特に**オークション理論**はメカニズムデザインを代表する1分野．

オークションメカニズムの望ましい性質

- **効率性**
  - **評価額が高い**人に財がきちんと渡ること.
- **耐戦略性**
  - 全員にとって**正直表明が最適戦略**になる.
  - 騙しあいが起こらないことを保証する.
- **個人合理性**
  - オークションに参加することによって**損しない**.
  - これが満たされないとオークションに参加してくれない.

などなど……

2nd price auction は上記3つの性質を全て満たす！

VCG mechanism—2nd price auction の拡張

- N人のプレイヤーとM個の商品
- 各プレイヤーは**商品の集合**($2^M - 1$通り)に対してそれぞれ入札額を表明

プレイヤー	商品1	商品2	商品 1&2
A	¥100	¥50	¥200
B	¥0	¥150	¥0
C	¥0	¥0	¥50

1&2の入札額は、 1だけの入札額 と 2だけの入札額の和とは限らない

1&2の入札額は、 1だけの入札額 や 2だけの入札額よりも少なくてもよい

1&2だけを希望してもよい

参考資料
http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/summercamp2015/document/key_hara.pdf

VCG mechanism ─ 2nd price auction の拡張

- N人のプレイヤーとM個の商品
- 各プレイヤーは**商品の集合**$(2^M - 1$通り)に対してそれぞれ入札額を表明

プレイヤー	商品1	商品2	商品 1&2
A	¥100	¥50	¥200
B	¥0	¥150	¥0
C	¥0	¥0	¥50

表明した入札額=各ユーザーにとっての評価値と仮定し、評価値の和(=社会的厚生)を最大化するように配分を決定する

実はVCGメカニズムではこの仮定は正しい！

すなわち、各ユーザーにとって評価値を正直に表明するのが最適（**耐戦略性**）

参考資料
http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/summercamp2015/document/key_hara.pdf

VCG mechanism—2nd price auction の拡張

ユーザーiの支払額
=「ユーザーiを除いた$N-1$人で競うときの社会的厚生最大値」-「N人いるときの社会的厚生最大値」+「ユーザーiの入札額」

プレイヤー	商品1	商品2	商品 1&2
A	¥100	¥50	¥200
B	¥0	¥150	¥0
C	¥0	¥0	¥50

支払額: $150-250+100=0$

支払額: $200-250+150=100$

支払額: $250-250+0=0$

このように支払額を設計すると、ユーザーiの**効用** = 評価値 - 支払額 は、「N人いるときの社会的厚生最大値」 -「ユーザーiを除いた$N-1$人で競うときの社会的厚生最大値」に一致。

結局ユーザーiの支配戦略は「N人いるときの社会的厚生最大値」を最大化することになる。

参考資料
http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/summercamp2015/document/key_hara.pdf

道路交通とメカニズムデザイン

道路を利用することは，**道路空間という財**を取り合う活動とみなせる．

→**メカニズムデザインを利用することで，道路空間の最適利用を目指せる．**

赤松ら(2006) ボトルネック通行権取引制度

通勤ラッシュにおける出発時刻選択行動を制御するメカニズム．

- 道路のボトルネック箇所について，時間帯別に “通行権” を設定して販売する．
- VCG mechanism を利用してドライバーへの通行権割当を決定．

参考資料

- オークション理論とメカニズムデザイン (原先生). http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/summercamp2015/document/key_hara.pdf
- 離散最適化基礎論 第 13 回 オークション理論 (電通大 岡本先生). http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2012/gametheory/handout13.pdf
- Akamatsu, T., Sato, S., & Nguyen, L. X. (2006). 時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究. 土木学会論文集 D, 62, 605–620. doi:10.2208/JSCEJD.62.605