7章 交渉問題
8章 提携形ゲームと配分

2015夏合宿　新ゲーム理論輪読

交通研B4 庄司惟

目次（第7章）

7.1. 交渉問題の定式化

（例）非協力２人ゲーム

プレイヤー２

プレイヤー１

	1	2	3
1	6, 7	4, 8	0, 9
2	8, 5	5, 6	1, 7
3	9, 0	7, 1	2, 3

均衡利得がパレート最適でないことに着目
→話し合いの必要性
→プレイヤーが相互に十分な話し合いを行い，共同で何らかの戦略を選択し，その結果に従って行動することを約束する

7.1. 交渉問題の定式化

交渉問題とは？

⇒複数の自律的なプレイヤーが，それぞれの独自性を保ちながら，とるべき行動について合意し，それが実行されるためには，全てのプレイヤーが十分に納得できる利得が保証されなければならない．このような利得ベクトルの実現を保証するルールを考えるのが交渉問題

交渉問題の基礎的要素

(1)プレイヤーの集合　$N=\{1,2,\cdots,n\}$

(2)交渉の基準点　$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$　※交渉が不成立のときに予想される利得ベクトル

(3)(協力)実現可能集合　$S=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$

(4)交渉問題　(N,S,c)　or　(S,c)

(5)交渉の妥結点　$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ ※全プレイヤーが納得する点

(6)交渉解　$F(N,S,c)=s$　or　$F(S,c)=s$　※ただ一つの妥結点をもたらすルールのこと！！

(7)交渉の妥結点が満たすべき公準

(8)交渉領域　$T=\{x\in S : x\geqq c\}$

7.1. 交渉問題の定式化

交渉の妥結点が満たすべき公準

①（利得ベクトルのor解の）個人合理性

$x_1 \geqq c_1, x_2 \geqq c_2, \cdots, x_n \geqq c_n$ ※xは利得ベクトル，cは基準点

②（解の）強個人合理性

$s_1 > c_1, s_2 > c_2, \cdots, s_n > c_n$ ※sは妥結点

最低でも基準点以上じゃなきゃルール作る意味ない！

③（妥結点の）パレート最適性（共同合理性，効率性）

もし$x(\in R^n)$が$x \geqq s$をみたすならば、xはSの点でない

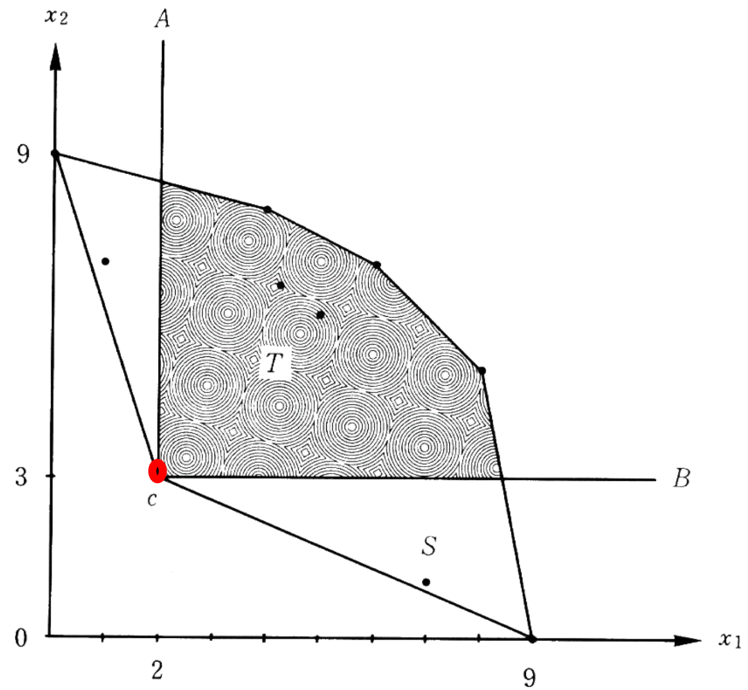
④（妥結点の）弱パレート最適性

もし$x(\in R^n)$が$x > s$をみたすならば、xはSの点でない

どうせルールきめるなら，最高の状態に持っていこう！

重要な概念①　交渉の基準点

	1	2	3
1	6, 7	4, 8	0, 9
2	8, 5	5, 6	1, 7
3	9, 0	7, 1	2, 3



基準点＝交渉の出発点
＝話し合いが無いときに保証される利得の組として，双方のプレイヤーにとって十分納得のいく点
＝均衡利得，保留点

7.1. 交渉問題の定式化

（例）逢引のジレンマ

彼女

彼

	野球	芝居
野球	3, 1	0, 0
芝居	0, 0	1, 3

彼氏は二人で野球に，彼女は二人で芝居に行きたい．二人が別々になってしまうと最悪で，利得は双方0．

・先ほどの例との本質的違いは，決定が確定的に行われるのではないということ．

・行動原理としては，「確率的な考え方で，期待値（？）が最も高そうなものを選ぶ」が想定される．（第２章参照）

重要な概念②　共同混合戦略と協力実現可能集合

非協力ゲーム

他者の行動の不確定さを考慮した期待値

彼女

	野球	芝居
野球	3, 1	0, 0
芝居	0, 0	1, 3

彼

混合戦略　$p=(p_1,p_2)$
$q=(q_1,q_2)$

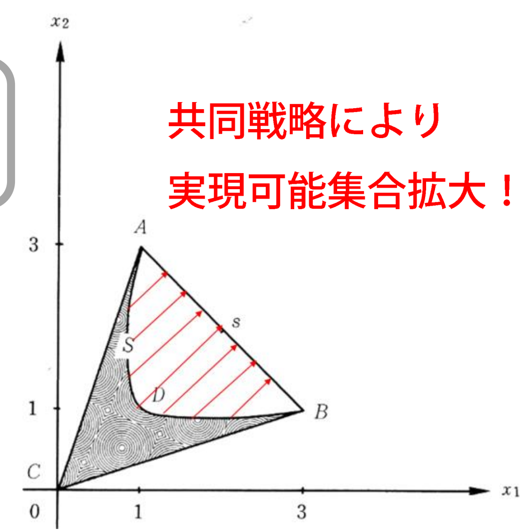
利得の期待値
$$x_1(p,q)=(3\cdot p_1+0\cdot p_2)q_1+(0\cdot p_1+1\cdot p_2)q_2$$
$$x_2(p,q)=(1\cdot q_1+0\cdot q_2)p_1+(0\cdot q_1+3\cdot q_2)p_2$$

協力ゲーム

共同でつくったクジをひくイメージ

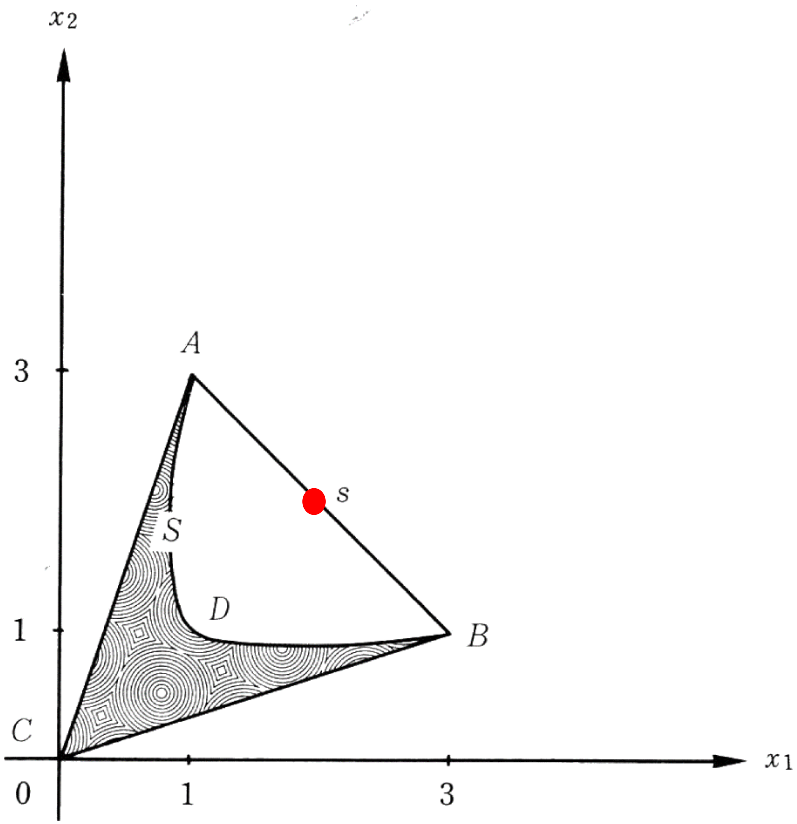
共同混合戦略　$p=(\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22})$

利得の期待値
$$x_1(p)=3\cdot p_{11}+0\cdot p_{12}+0\cdot p_{21}+1\cdot p_{22}$$
$$x_2(p)=1\cdot p_{11}+0\cdot p_{12}+0\cdot p_{21}+3\cdot p_{22}$$



共同戦略により
実現可能集合拡大！

重要な概念②　共同混合戦略と協力実現可能集合



（例）

ルール「確率1/2で一緒に野球に行く，また確率1/2で一緒に芝居に行くことになるようなクジを引く」

対応する共同混合戦略は

P=(1/2,0,0,1/2)

利得の期待値は(2,2)

この値に二人のプレイヤーが妥結したものと考える．

⇒妥結点s=(2,2)

これは線分ABの中点である．

これから

実際にどのようなルール（解）が適切かを考えてみます.

7章では以下の４つが紹介されています.

・均等解
・功利主義的解
・ナッシュ解
・カライ/スモロデンスキー解

7.2. 均等解と功利主義的解

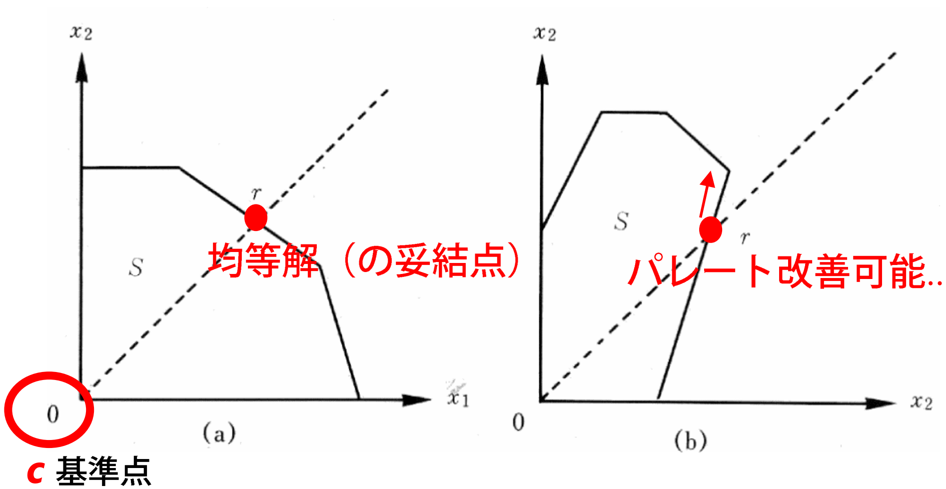
実際にどのようなルール（解）が適切かを考えてみよう．

均等解

利得を均等に配分するうちで
最大の点を与える！

※sは妥結点
※cは基準点

$$s_1 - c_1 = \cdots = s_n - c_n$$



乏しきを憂いず，等しからざるを憂いる．

~~功利主義的解~~

全てのプレイヤーの利得の和を
最大とする点を与える！

デメリット

①パレート最適な点で利得の和が常に一定である状況では妥結点を決定できない．

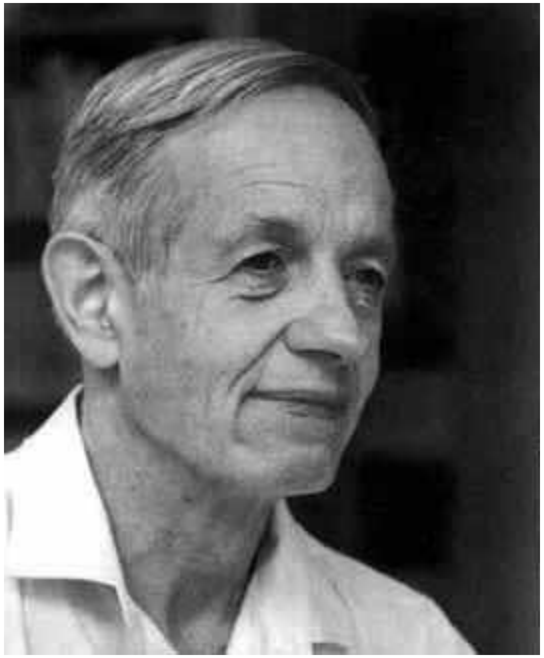
②交渉領域のフロンティアの微小な変動で妥結点が大きく移動することがある．（不安定）

③独立の主体が複数いて，それぞれが自己の利益を主張している場合には使えない．

7.3. ナッシュ解

実際にどのようなルール（解）が適切かを考えてみよう.

"*Equilibrium Points in N-person Games*"（2章）の後に,
"*Two-person Cooperative Games*"(本章)
も発表している.



John F Nash

ナッシュ解
⇒和の最大化ではなく**積の最大化**
⇒各プレイヤーの基準点からの利得の増分の**総積**を最大にする点を与えるルール

$$N(S,c) = \arg\max\left\{\prod_{i\in N}(x_i - c_i) : x \in S, x \geqq c\right\}$$

例題を通して，ナッシュ解の性質を見てみよう．

プレイヤー2

プレイヤー1		1	2	3
	1	8, 4	2, 3	4, 1
	2	6, 2	4, 6	4, 2

本質的には，
「どんなクジをつくったら，
利得の期待値に，全てのプレイヤーが妥結するだろうか？」
を解いている．

例題を通して，ナッシュ解の性質を見てみよう．

素直な解法

	1	2	3
1	8, 4	2, 3	4, 1
2	6, 2	4, 6	4, 2

基準点 $c=(c_1,c_2)$ は，

$$c_1=\max_i \min_j a_{ij}=4, c_2=\max_j \min_i b_{ij}=3$$

実行可能集合においてパレート最適な

線分ABの式は

$$x_1+2x_2=16$$

その時のナッシュ積は，

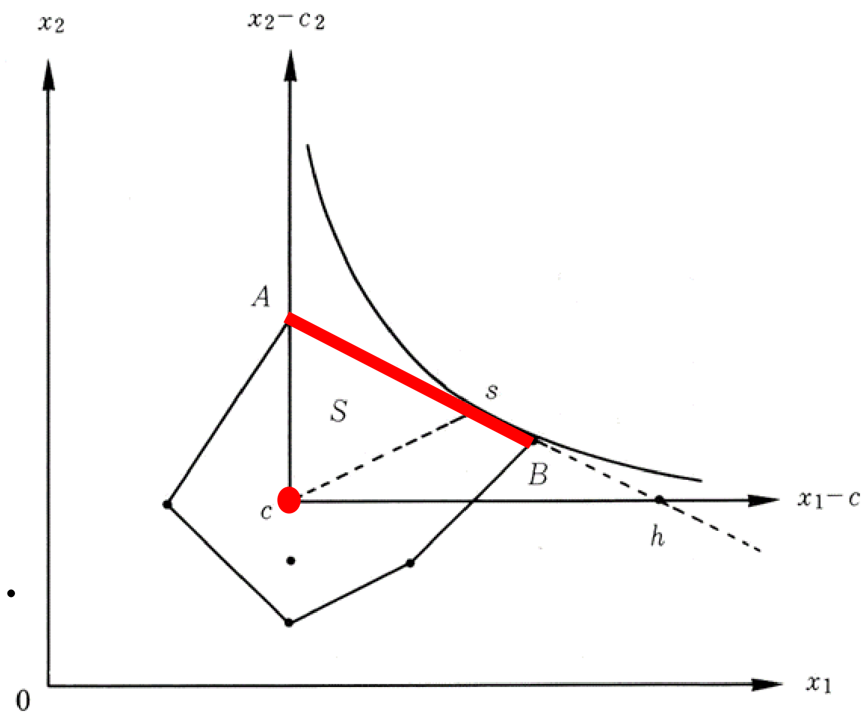
$$(x_1-4)(x_2-3)=(-2x_2+12)(x_2-3)$$

一階条件を解いて

$$x_1=7, x_2=4.5$$

これは実行可能集合に含まれる点である．

よってこの場合のナッシュ解となる．



例題を通して，ナッシュ解の性質を見てみよう．

プレイヤー2

		1	2	3
プレイヤー1	1	8, 4	2, 3	4, 1
	2	6, 2	4, 6	4, 2

ナッシュ解

$$x_1 = 7, x_2 = 4.5$$

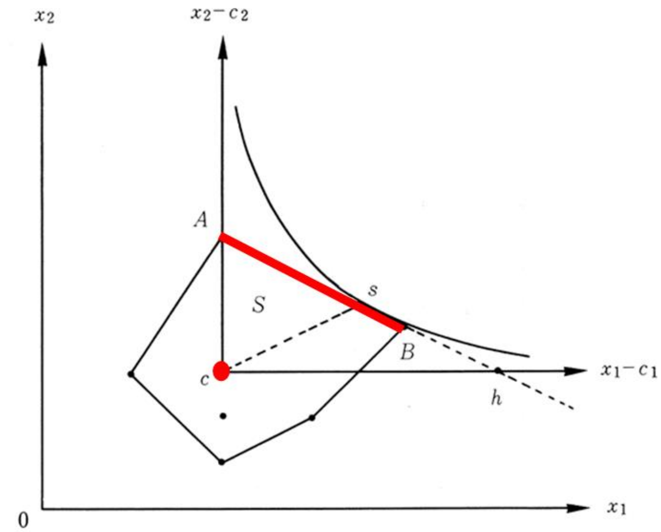
A(4,6),B(8,4)より

ナッシュ解が示すクジの設定は

$$7 = 8p_{11} + 4p_{22}$$

$$4.5 = 4p_{11} + 6p_{22}$$

$$\Leftrightarrow p_{11} = 3/4, p_{22} = 1/4$$



7.4. 交渉の公準

１０つの公準を紹介します

①個人合理性
②共個人合理性
③パレート最適性
④弱パレート最適性

←交渉の妥結点が満たすべき公準(既習)

⑤利得の測定法からの独立性(利得を1人ずつ正一次変換してよい)
⑥対称性
⑦無名性
⑧無関連な代替案からの独立性
⑨全体と部分との整合性（縮小ゲーム性）
⑩個人単調性（後述)

公準６　対称性

２人交渉問題において、交渉領域Sが原点を通る45度線に関して対称ならば、ルールFによる妥結点における2人の利得が等しいとき，ルールFは対称性をもつ.

n人交渉問題(N,S,0)の実現可能集合Sは、以下のように定義する。

$$\pi(S)=\{\pi(x):x\in S\}$$

π：1からNまでの任意の置換（プレイヤー番号の付け替え）

条件１.　　プレイヤーの番号を付け替えても交渉領域に不変
条件２.　　全プレイヤーの受け取る利得が同じ

$$\pi(S)=S,\quad F_i(S)=F_j(S)$$

このとき、交渉解Fは対称性をもつ

公準７　無名性（匿名性）

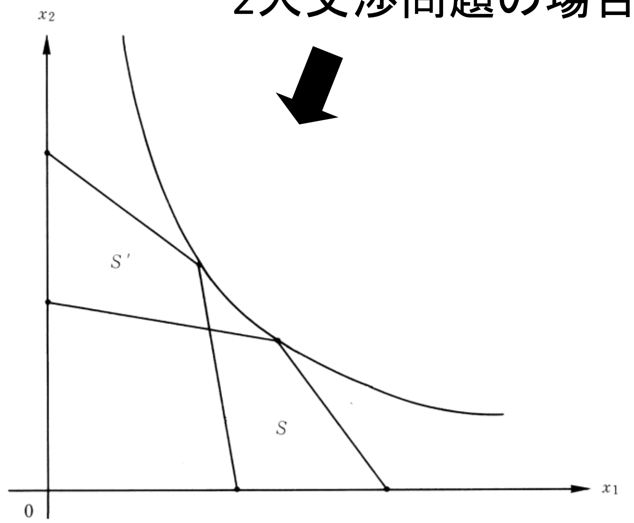
- プレイヤーの番号を付け替えたとき、交渉領域が前と同じではないが、妥結点でプレイヤーの受け取る利得が番号の付け方とは独立で、匿名にしても変わらない

n人交渉問題(N, S, 0)において任意の置換πに対して、交渉解をF(S)とすると

$$F[\pi(S)] = \pi[F(S)]$$

のとき、ルールFは無名性

2人交渉問題の場合



交渉の公準

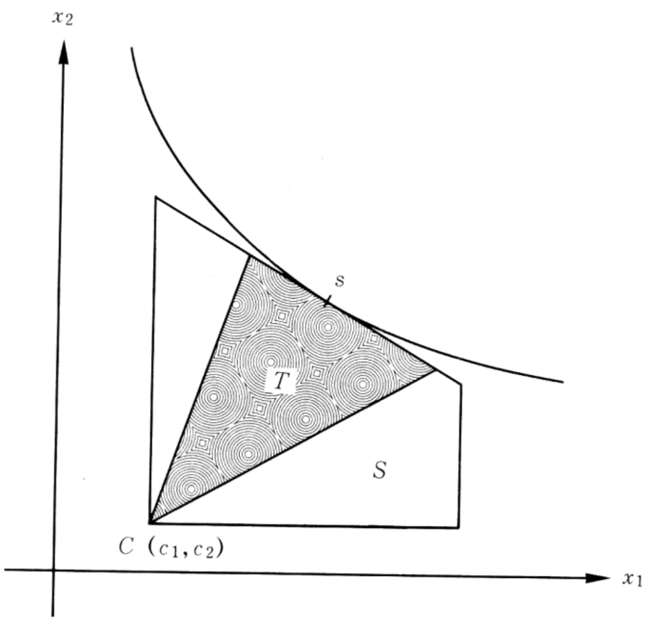
公準８　無関係な代替案からの独立性

交渉問題(S, c)が与えられ、妥結点sが存在するとき、cとsを含むSの部分集合Tを考えて、交渉の場を(T, c)に変えても、以前sが妥結点で存在する

２つの交渉問題(S, c)と(T, c)が

$$T \subset S で, かつ, F(S) \in T ならば$$

$$F(S) = F(T)$$



交渉の公準

公準９　全体と部分との整合性（縮小ゲーム性）

N={1, 2, 3}の3人交渉問題(N, T, 0)
　妥結点 t=(t_1, t_2, t_3)

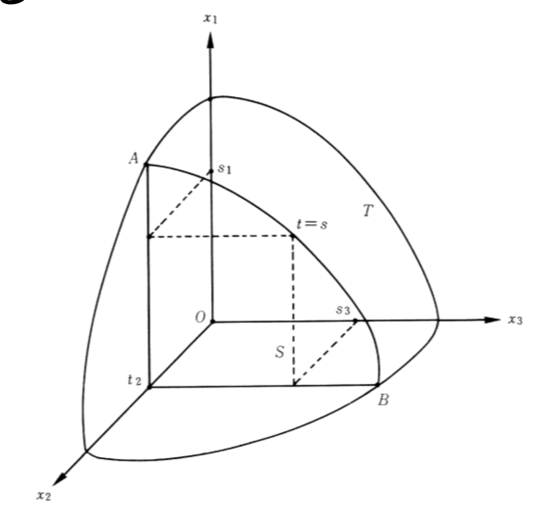
⬇ プレイヤー2の利得をt_2に固定

N′={1, 3}の2人交渉問題(N′, T, 0)
　妥結点 s=(s_1, s_3)

もし、$t_1 < s_1$ならば、プレイヤー１は３とだけ交渉する

ルールの妥当性

$$s_1 = t_1,\ s_3 = t_3$$



7.5. ナッシュ解の一意性

定理１：ナッシュの定理(1950)

二人交渉問題のナッシュ解は，次の5つの公準をみたし，かつ，この5つの公準をみたす解はナッシュ解に限る.

個人合理性，パレート最適性，利得測定法からの独立性，対称性，無関連な代替案からの独立性

定理２：ロスの定理(1977)

①任意の交渉問題において，ナッシュ解は次の4つの公準を満たし，かつ，この4つの公準を満たす解はナッシュ解に限る.

強個人合理性，利得測定法からの独立性，対称性，無関連な代替案からの独立性

②任意の交渉問題において，次の3つの公準を満たす解は，ナッシュ解か，または非合意解(F(s)＝c＝0)である.

利得測定法からの独立性，対称性，無関連な代替案からの独立性

7.5. ナッシュ解の一意性

定理３：レンズベルクの定理(1985)

任意の交渉問題において，ナッシュ解は次の5つの公準を満たし，かつ，この5つの公準を満たす解はナッシュ解に限る.

個人合理性，パレート最適性，利得測定法からの独立性，匿名性，全体と部分との整合性

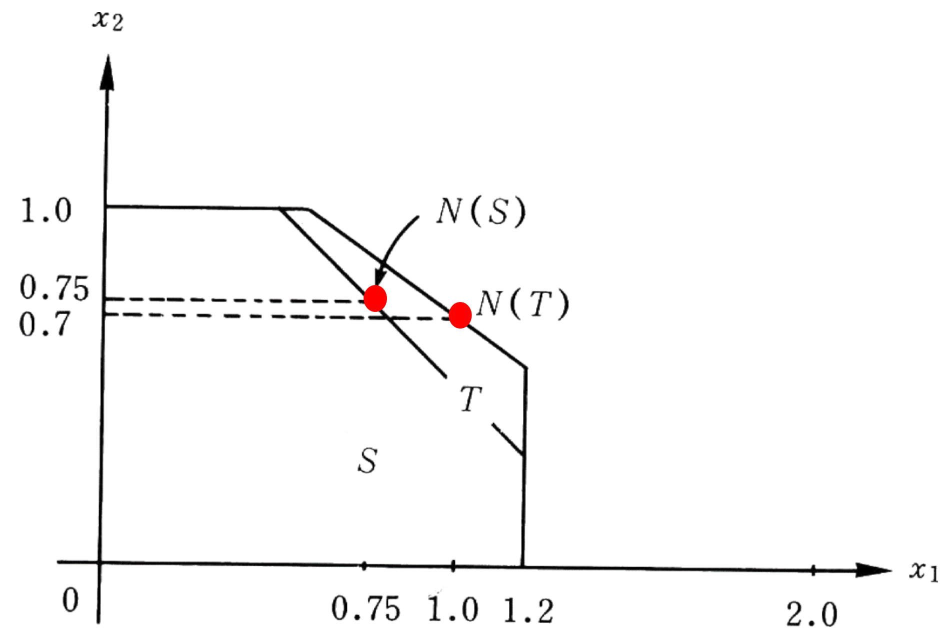
7.5. ナッシュ解の一意性

ナッシュの定理(1950)	ロスの定理(1977)	レンズベルクの定理(1985)
個人合理性		個人合理性
パレート最適性	強個人合理性	パレート最適性
利得測定法からの独立性	利得測定法からの独立性	利得測定法からの独立性
対称性	対称性	匿名性
無関連な代替案からの独立性	無関連な代替案からの独立性	全体と部分との整合性

7.6. カライ/スモロデンスキー解

ナッシュ解の有名な欠点
「単調性の公準を満たさないこと」

交渉領域がSからTに変化.
ナッシュ解は以下のように変化
N(S)=(0.75,0.75)
N(T)=(1,0.7)
⇒全体の交渉領域が拡大したことで，かえってプレイヤー2の利得が減少してしまっている！！（ナッシュ解はジレンマ的な側面を持つことがわかる）
※単調性＝交渉領域が拡大したとき，各プレイヤーの利得は減少してはならない
を満たす解を考えよう.
（疑問）なんでナッシュ解は単調性の公準を満たさないのか？



7.6. カライ/スモロデンスキー解 26

の前に，単調性を公準として明確に定義しなおそう．

前提となる重要な概念＝最大限度額と理想点

最大限度額＝交渉領域S内でプレイヤーiの利得の上限

理想点＝二人のプレイヤーの最大限度額の組

$$M(S)=\left(M(S)_1,\, M(S)_2\right)$$

公準⑩　（解Fの）個人単調性

$T\supset S$, かつ, $M(T)_i=M(S)_i \quad (i=1,2)$ならば

$F_i(T)\geqq F_i(S), \quad i=1,2$

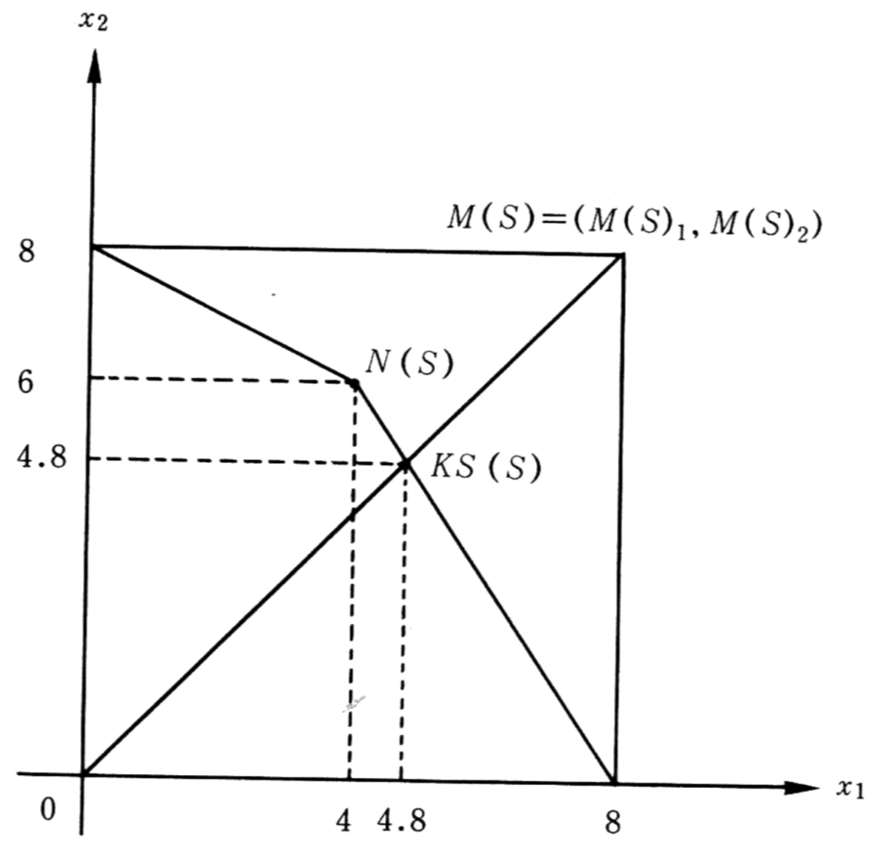
7.6. カライ/スモロデンスキー解

Pa(S): 交渉領域Sとのパレート最適な点の集合

L(c,M): 基準点cと理想点Mとを結ぶ直線

Pa(S)とL(c,M)の交点を妥結点とするルールを,

カライ/スモロデンスキー解という.



7.6. カライ/スモロデンスキー解

定理：カライ/スモロデンスキーの定理

任意の二人交渉問題において，カライ/スモロデンスキー解は，次の5つの公準をみたし，かつ，この5つの公準を満たす解は，カライ/スモロデンスキー解に限る

個人合理性，パレート最適性，利得測定法からの独立性，対称性，個人単調性

7.6. カライ/スモロデンスキー解

ナッシュの定理 (1950)

個人合理性
パレート最適性
利得測定法からの独立性
対称性
無関連な代替案からの独立性

ロスの定理 (1977)

強個人合理性
利得測定法からの独立性
対称性
無関連な代替案からの独立性

レンズベルクの定理(1985)

個人合理性
パレート最適性
利得測定法からの独立性
匿名性
全体と部分との整合性

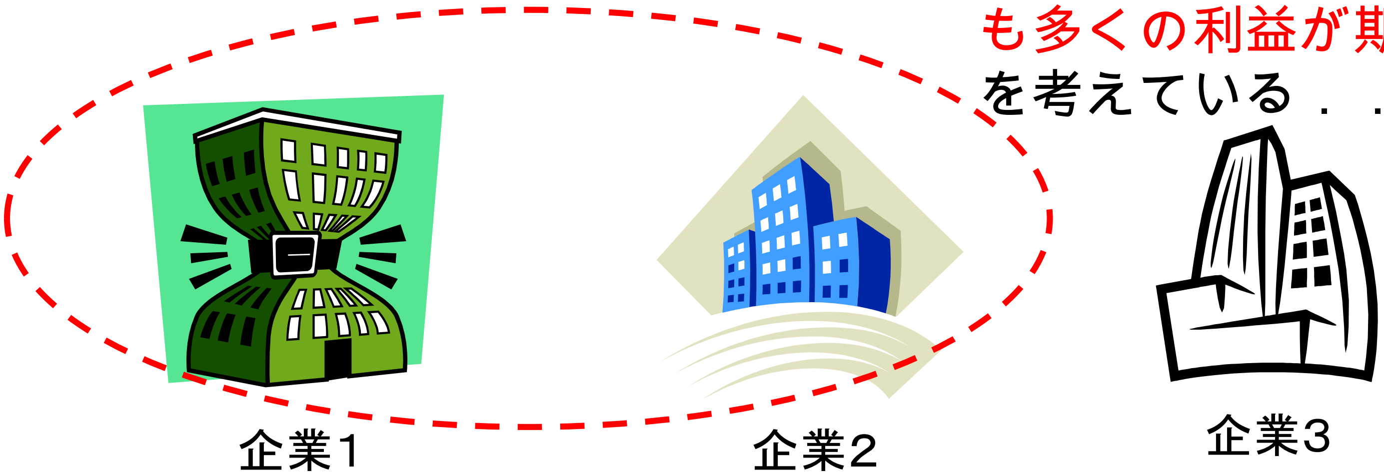
カライ/スモトデンスキーの定理 (1950)

個人合理性
パレート最適性
利得測定法からの独立性
対称性
個人単調性

目次（第8章）

例１）複数企業の合同事業

３つの企業が事業を始めようとしている．そこに何らかの形での共同事業があり，それぞれが，どの企業と組めば最も多くの利益が期待できるかを考えている．．．



提携構造:[{1,2},{3}]

提携：共同事業のようなものをプレイヤーNの部分集合として表したときの，その部分集合

許容提携：可能性として想定できるすべての提携（たとえば，φや{1,2,3}も含む）

特性関数：提携に，提携として得られると期待される利得を対応させる関数のこと

$$
\begin{aligned}
v &= \left(v(\phi), v(\{1\}), \cdots v(\{2,3\}), v(\{1,2,3\}),\right) \\
&= \left(v(S) \quad : \quad S \subset N\right) \\
&= \left(0,10,20,30,60,70,80,120\right)
\end{aligned}
$$

※利得をどのように分けるかについてはまた別のプロセスによる.

利得ベクトル $x = \left(x_1, x_2, x_3\right) = (40,40,40)$

提携形ゲーム：プレイヤーの集合と特性関数と利得ベクトルの集合の組によって表されるもの.

$$\left(N, v, X\right)$$

8.1. 協力ゲームの提携形

（例）多数決ゲームを提携形で記述してみよう！

３人の人がいて，そこに，ある人から12万円が贈られてきて，３人の多数決で分け，多数派が全部とってよろしい，と言ってきた．

プレイヤーの集合 $N=\{1,2,3\}$

8通りの提携のうち，多数派であるのは

$$\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{2,3\}\ \{1,2,3\}$$

特性関数は以下のようになる

$$v(\phi)=0$$
$$v(i)=0,\ i=1,2,3$$
$$v(12)=12$$
$$v(13)=12$$
$$v(23)=12$$
$$v(123)=12$$

ここで，$v(i)\equiv v(\{i\}),\ i=1,2,3$

$v(12)\equiv v(\{1,2\})$

…

$v(123)\equiv v(\{1,2,3\})$とする

特性関数

$$v=\big(v(S):\quad S\subset N\big)=(0,0,0,0,12,12,12,12)$$

利得ベクトル

$$X=\{x=(x_1,x_2,x_3)\}\subset R^3$$

(N,v,X)の形式で表された

たとえば

$$K=\{(6,6,0),(6,0,6),(0,6,6)\}$$

という利得ベクトルの集合が考えられる.

8.1. 協力ゲームの提携形

協力ゲームの提携形をまとめると・・・

①プレイヤーの集合　$N=\{1,2,\cdots,n\}$

②提携　$2^N=\{S:S\subset N\}$

③特性関数　$v:2^N\to R$

④利得ベクトル　$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

⑤提携形ゲーム　(N,v,X)または(N,v)　※利得ベクトルの定め方！

⑥ゲームの解　$F(N,v,X)=Y=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\subset X$

⑦譲渡可能効用と別払い

特性関数

決め方はいろいろだが，一般には提携に漏れたプレイヤーからの影響をうける．

$$v(S) = \max_{\sigma_S} \min_{\sigma_{N-S}} f_S(\sigma_S, \sigma_{N-S})$$

提携$S, N-S$が持つ戦略

提携Sのもつ利得関数

以上のような形で定義された特性関数を，フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン型関数という．

譲渡可能効用と別払い

「提携形ゲームは，譲渡可能効用をもつ別払いのあるゲームである」という前提条件

譲渡可能効用をもつゲーム⇒利得が制限なしに分割可能で，プレイヤーの間で自由に譲渡できる．プレイヤーAからBに譲渡した場合，Aの失った利得の大きさとBの得た利得の大きさは等しい．

別払い⇒利得の一部を譲渡すること，およびその譲渡された利得のこと

8.1. 協力ゲームの提携形

提携形ゲームの（特性関数の）特性

①合理性

②非本質的と本質的

③単調性とゼロ単調性

④弱優加法性と優加法性

⑤定和

8.1. 協力ゲームの提携形

合理性

バラバラよりも一緒にやったほうがいい

$$v(N) \geq \sum_{i \subset N} v(i)$$

のとき，合理的であるという.

非本質的と本質的

提携してもしなくても一緒

$$v(N) = \sum_{i \subset N} v(i)$$

が成り立つゲームを

非本質的ゲームといい，

$$v(N) > \sum_{i \subset N} v(i)$$

提携したらよくなる

が成り立つゲームを

本質的ゲームという.

単調性とゼロ単調性

提携が大きくなると利得も大きい

$$v(S) \geq v(T) \quad \forall S, T \subset N, T \subset S$$

のとき，このゲームは単調である

といい，さらに

$$v(S) \geq v(T) + \sum_{i \in S-T} v(i)$$

提携が大きくなると**全体として**利得が大きい

のとき，ゼロ単調であるという.

弱優加法性と優加法性

任意の部分集合Sに対して

任意の部分集合でゼロ単調

$$v(N) \geq v(S) + \sum_{i \in N-S} v(i)$$

であるとき，弱優加法的であるという.

また，互いに素な任意の提携R, Sについて

$$v(R \cup S) \geq v(R) + v(S)$$

が成立するとき，優加法的であるという.

小さい提携複数よりも，大きな提携一つ

定和

任意の提携Sについて

$$v(S)+v(N-S)=v(N)$$

が成り立つとき，定和である

という.

（例）

	1	2
1	1,1	1,0
2	0,1	1,1

戦略系ゲームとしては定和ではない

特性関数を作ると,

$$v(1)=\max_i \min_j a_{ij}=1$$

$$v(2)=\max_j \min_i b_{ij}=1$$

$$v(12)=\max(a_{ij}+b_{ij})=2$$

↓

提携系ゲームとしては定和ゲームである

8.2. 全体としての協力関係

湖と工場の浄化/汚染問題

ある湖の周囲にn個の向上がある．これらの工場は湖の水を用いて生産活動を行っていて，使用後の水は再び湖に放出する．工場は①浄化してから放出②そのまま放出　を選ぶ．各工場の水必要量は1単位で等しい．

放出する前の浄化処理には，どの工場も水1単位当たりB円かかる．もしk個の工場が汚水を浄化しないで放出した場合，各工場がその水を使用できるようにする浄化費用は，水1単位当たりkD円である．

あるプレイヤーiの戦略

浄化しない他プレイヤーの数

	0	1	…	n-1
浄化する	B	B+D	…	B+(n-1)D
浄化しない	D	2D	…	nD

D>Bなら，後で浄化する方が高く，どの工場も浄化してから放水する．

B>nDなら，例え全ての工場が浄化しなかったとしても，後から浄化した方が安いので，全工場が浄化しないで放水する．

⇒nD>B>Dの場合は？

8.2. 全体としての協力関係

あるプレイヤーiの戦略

	浄化しない他プレイヤーの数			
	0	1	…	n-1
浄化する	B	B+D	…	B+(n-1)D
浄化しない	D	2D	…	nD

nD>B>Dの場合は？
⇒何人かのプレイヤーが浄化してから放水すると費用が安くなる可能性があるので，**浄化のための話し合いが起こる**
プレイヤー集合Nの部分集合Sが協定を結んだとして，Sのメンバー全体での費用を考える．（以下略）

利得ベクトルの公準を考える．

①全体合理性 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(N)$

②個人合理性 $x_i \geq v(i)$

（単独で行動したとき以上の利得が見込まれねばならない．）

全体合理性を満たす利得ベクトルを準配分，

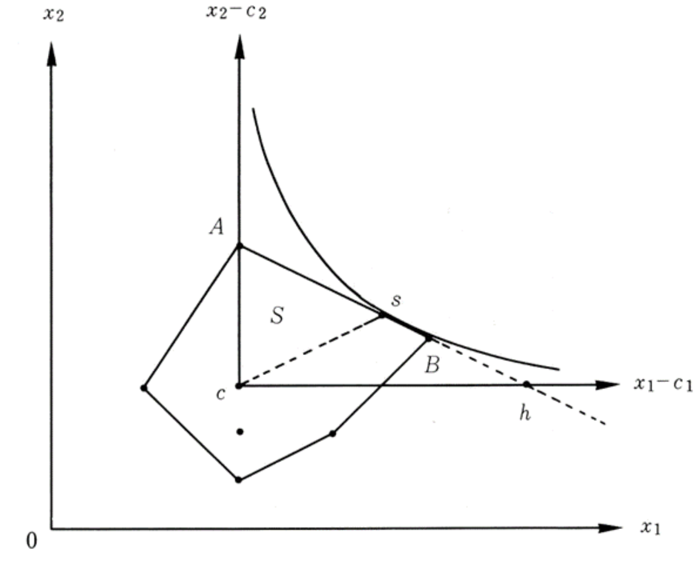
全体合理性と個人合理性を満たす利得ベクトルを配分と呼ぶ．

※準配分，配分は最も弱い意味でのゲームの解である．実際にはこれだけでは不十分で，他の何らかの基準によって範囲を限定した配分の集合の部分集合を求めることになる．

例題を通して，ナッシュ解の性質を見てみよう.

(1)ナッシュ解の「利得の測定法からの独立性」を利用した解法

	1	2	3
1	8, 4	2, 3	4, 1
2	6, 2	4, 6	4, 2



めも

- プレイヤーの間で，十分な話し合いが行われ，決められた約束は実行されるという状況を，いかにして作り出すことができるか．
- 基準点をどのように定めるかも重要な一問題（本章では既に定まっているとした）
- 交渉解，すなわちルールFが与えられれば，妥結点は基準点に応じて一意に定まる．従って，交渉のルールが共通の認識になっているときには，現実の交渉は，基準点を定める交渉になる．基準点が公平でなければ，公平な利得といっても意味の無いことになる．（日米交渉の例）

めも

8.1. 協力ゲームの提携形
8.2. 全体としての協力関係
8.3. 配分

プレイヤーの思考回路を想定
「まず，考えられる提携構造の中で，自分が参加可能な共同事業において，提携として自分が実際に得ることができると期待される利益を考える．」