新ゲーム理論
第9章　シャープレイ値
第10章　コア
第11章　仁

B4 三木真理子

目的

提携形ゲームにおいてどのような配分がありうるかを考察する

今回触れる3章の内容をざっと説明すると

・利得の期待値から公正な配分を求める⇒シャープレイ値

　：限界貢献度の概念を用いる

・交渉の過程で棄却されない安定した配分を求める⇒コア

　：配分の支配という概念を用いる

・もっとも不満の声が少なくなるような配分⇒仁

　：利得ベクトルに対する提携の要求という概念を用いる

目次

- 1. シャープレイ値

  —利得パラメータの導入、投票ゲームと投票力指数

- 2. コア

  —配分の支配、提携合理性、非分割財の市場とコア、シャープレイ値とコア

- 3. 仁

  —準配分、提携の要求、εコアと最小コア、辞書式中心と仁

限界貢献度

各プレイヤーがあるゲームに参加することで得られる利得の期待値を考える
⇒プレイヤーが参加可能な提携において、そのプレイヤーがどれだけの利得の増加に貢献したかによって決まるのではないか（裁量性）

ゲームvが与えられているとき、

$v(S)-v(S-\{i\})$ ：提携Sからプレイヤーiが抜けたときの利得の差
＝提携Sにおけるプレイヤーiの限界貢献度

ゲームがゼロ単調のとき、つまり

$$v(S) \geqq v(T)+\sum_{i \in S-T} v(i) \quad \forall\ S,\ T \subset N,\ \text{ただし，}\ S \supset T$$

のとき、

$$v(S)-v(S-\{i\}) \geqq v(i) \quad \forall\ i \in N.$$

が成り立つ。

シャープレイ値

ゼロ単調なゲームvにおいて、任意のプレイヤーiについて、

$$\phi_i = \sum_{S \subset N} \gamma(S)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

ただし、

$$\gamma(S) = \frac{1}{n!}(s-1)!(n-s)!$$

s:提携Sのメンバーの数

これを、プレイヤーiのシャープレイ値といい、その組

$$\phi(v) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$$

をゲームvのシャープレイ値という。

つまりシャープレイ値は、ただ一つの利得ベクトルを求める解

シャープレイ値の意味

プレイヤーiのシャープレイ値

$$\phi_i = \sum_{S \subset N} \gamma(S)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

これは、プレイヤーiの参加可能な提携すべてについての限界貢献度を、ウェイト$\gamma(S)$で重みづけして求めた加重平均.

ウェイト$\gamma(S)$の意味は、
「プレイヤーiが最後に参加することである提携Sが成立する確率」

$$\gamma(S) = \frac{1}{n!}(s-1)!(n-s)!$$

s:提携Sのメンバーの数

n! :　ゲームのプレイヤー全体の順列
(s-1)! :　プレイヤーi以外の提携Sのメンバーについての順列
(n-s)! :　提携S以外のプレイヤーについての順列

2人ゲームのシャープレイ値

以下の条件が与えられる2人ゲームを考える.

$$N=\{1, 2\}$$

$$v(\phi)=0,\ v(1),\ v(2),\ v(12)$$

このゲームのシャープレイ値は、以下のように求まる.

$$\phi_i(v)=v(i)+\frac{1}{2}[v(12)-v(1)-v(2)],\ i=1, 2$$

これは、「残余均等配分解」である

各プレイヤーに各自の基本的な値であるv(i)を保証し、

残りを2人のプレイヤーで均等に配分したもの

2人ゲームについて、ゲームの解Fが残余均等配分解になるとき、

この解は2人ゲームに対して基準的(standard)であるという.

シャープレイ値の直感的説明

シャープレイ値は、
各プレイヤーがゲームに参加することで得られると期待できる利得の大きさ

実際に取引によってプレイヤーの得られる値がシャープレイ値になるかどうかは別の問題

期待通りの利得配分が得られるならば、その利得配分は公平な配分であるといえる。

シャープレイ値の公準

ゼロ単調なゲームにおいて、シャープレイ値を

$$\phi(v) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$$

とする． このシャープレイ値は、いくつかの基本的な公準を満たす．

公準1: 全体合理性（効率性、パレート最適性）
公準2: ナルプレイヤー(またはダミプレイヤー)のゼロ評価（ナルゼロ性）
公準3: 対称性・代替性・無名性
公準4: 加法性

この4つの公準を満たすゲームの解は、シャープレイ値に限る
（一意性・存在性）

シャープレイ値の公準

公準1: 全体合理性（効率性、パレート最適性）

$$\sum_{i \in N} \phi_i = v(N)$$

公準2: ナルプレイヤー(またはダミプレイヤー)のゼロ評価（ナルゼロ性）

ナルプレイヤー： $v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall S \subset N - \{i\}$

$\Rightarrow \phi_i = 0$

ダミプレイヤー ： $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \quad \forall S \subset N - \{i\}$

$\Rightarrow \phi_i = v(i)$

公準3: 対称性・代替性・無名性

プレイヤーi,jが対称であるとは、以下が成り立つときのことをいう

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall S \subset N - \{i, j\}$$

シャープレイ値の公準

公準3: 対称性・代替性・無名性

プレイヤーi,jが対称(または代替的)であるとは、
以下が成り立つときのことをいう

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall S \subset N - \{i, j\}$$

2人のプレイヤーが対称なとき、そのシャープレイ値は等しい.
無名性の公準(プレイヤーの番号を付け替えても実質的な解は同じ)に
置き換えることもできる.

公準4: 加法性

和ゲームにおけるプレイヤーiのシャープレイ値はその成分ゲームにおける
シャープレイ値の和に等しい

シャープレイ値の性質いろいろ

定理2. シャープレイ値は個人合理性を満たす

$$\phi_i \geqq v(i) \quad \forall i \in N$$

個人合理性と全体合理性を満たすので、シャープレイ値は「配分」である

定理3. 利得測定法からの独立性(戦略上同等性)

公準5. 単調性

(1) 全体提携単調性

(2) 強単調性

公準6. 自明性

公準7. 提携の戦略上同等性

公準8. 順序保存性

公準9. 整合性（縮小ゲーム性）

投票ゲームの定式化

投票による集団としての意思決定問題を、協力ゲームとして定式化しよう

・投票ゲームの定式化

投票で勝った提携を勝ち提携、負けた提携を負け提携と呼ぶ

勝ち提携の利得を１、負け提携の利得を０として特性関数を作る

勝ち提携の利得は、提携内のプレイヤーに配分される

プレイヤーの集合Nと勝ち提携の集合Wに対して、

特性関数を以下のように定義できる.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{for } S \in W \\ 0 & \text{for } S \notin W \end{cases}$$

投票力指数

投票力指数：

投票ゲームにおいて、各プレイヤーがどれだけの決定力をもっているかを示す指数

↓

投票において、そのプレイヤーが勝ち提携のメンバーになりうるチャンスの大きさ

↓

そのプレイヤーが「要の投票者」になる確率

：そのプレイヤーが提携に参加することによって、

その提携が負け提携から勝ち提携に変わるような投票者

プレイヤーiの投票力指数：プレイヤーiが「要の投票者」になる期待値

⇒「シャープレイ・シュービック指数」

投票力指数の求め方

一般に、ゲーム(N,W)が与えられたときのシャープレイ・シュービック指数は
次のように求められる

W_i:プレイヤーiを含み、かつiが抜ければ勝ち提携でなくなる提携の集合

$$W_i = \{S : i \in S \in W, S - \{i\} \notin W\} \quad \forall i \in N.$$

このとき、$S \in W_i$について、Sは勝ち提携であり、S − {i}は負け提携となるので、

$$v(S) - v(S - \{i\}) = \begin{cases} 1 & S \in W_i \\ 0 & S \notin W_i \end{cases}$$

これが任意のSについて成り立つ。このとき、シャープレイ値は、

$$\phi_i = \sum_{S \in W_i} \gamma(S) \quad \forall i \in N$$

投票力指数の求め方

シャープレイ値は $\phi_i = \sum_{S \in W_i} \gamma(S) \quad \forall\, i \in N$

ここで、$\gamma(S)$は前と同様、プレイヤーの投票順を考慮して、

$$\gamma(S) = \frac{1}{n!}(s-1)!\,(n-s)!$$

と定義できる。W_iに属するすべてのSについての$\gamma(S)$の和が、プレイヤーiの投票力を示す.

定義. シャープレイ・シュービック投票力指数

投票ゲーム（N, W）が与えられたとき,

$$\phi_i = \sum_{S \in W_i} \gamma(S) = \frac{1}{n!} \sum_{S \in W_i} (s-1)!\,(n-s)! \qquad \forall\, i \in N$$

ただし s は S のメンバーの数

重みのパラドックス

重み付き多数決ゲームを考える

$$N=\{1, 2, 3, 4\}, \ [3 : 2, 1, 1, 1]$$

プレイヤー4人、基準数(勝ち提携に必要な票数)3、各プレイヤーの重み[2,1,1,1] を表す

$1\,\dot{2}\,3\,4$	$2\,\dot{1}\,3\,4$	$3\,\dot{1}\,2\,4$	$4\,\dot{1}\,2\,3$
$1\,\dot{2}\,4\,3$	$2\,\dot{1}\,4\,3$	$3\,\dot{1}\,4\,2$	$4\,\dot{1}\,3\,2$
$1\,\dot{3}\,2\,4$	$2\,3\,\dot{1}\,4$	$3\,2\,\dot{1}\,4$	$4\,2\,\dot{1}\,3$
$1\,\dot{3}\,4\,2$	$2\,3\,\dot{4}\,1$	$3\,2\,\dot{4}\,1$	$4\,2\,\dot{3}\,1$
$1\,\dot{4}\,2\,3$	$2\,4\,\dot{1}\,3$	$3\,4\,\dot{1}\,2$	$4\,3\,\dot{1}\,2$
$1\,\dot{4}\,3\,2$	$2\,4\,\dot{3}\,1$	$3\,4\,\dot{2}\,1$	$4\,3\,\dot{2}\,1$

このとき、投票力指数は、以下の順列と要の投票者の数え上げ結果から、

$$\phi=(1/2, 1/6, 1/6, 1/6)=(3, 1, 1, 1)/6$$

⇒重みと一致しない！！

再分配のパラドックス

例：選挙の結果、ある政党の議席が前より減少したにもかかわらず、投票力指数は大きくなることがある.

$N=\{1,2,3\}$の3人（３党）多数決ゲームを考える
プレイヤー1は55議席をもつ政党、プレイヤー2は35議席をもつ政党
プレイヤー3は10議席をもつ政党とし、3党での意思決定ゲームと見なす

$$[70:55,\ 35,\ 10] \xrightarrow{\text{選挙}} [70:50,\ 25,\ 25]$$

$$\phi=(3,\ 3,\ 0)/6 \qquad \phi=(4,\ 1,\ 1)/6$$

プレイヤー1の議席数は減少したにもかかわらず、投票力指数は増加

[理由]
投票力指数の増加は、プレイヤー1が要になっている勝ち提携の数が大きいことから起こる.
⇒プレイヤー1の提携を組む相手が増えたために、勝ち提携を作る際の影響力が大きくなったのかもしれない

分割のパラドックス

例：ある政党が分裂したとき、分裂前の政党の投票力指数と、
　分裂後の個人またはグループの投票力指数の和は異なる.

$N=\{1,2,3\}$, $[4:2,2,\underline{3}]$

投票力指数 $\phi=(10,10,10)/30$

政党プレイヤー３が分裂

$N=\{1,2,3,4,5\}$, $[4:2,2,\underline{1,1,1}]$

投票力指数 $\phi=(9,9,4,4,4)/30$.

→後のゲームでのプレイヤー3,4,5の3人の投票力指数の和は12
　＞分裂前の政党プレイヤー3の投票力指数10

逆に、個々人が新しく党を作ったとしても、
その投票力指数が個々人の和以上のものになるとは限らない

目的(再掲)

提携形ゲームにおいてどのような配分がありうるかを考察する

・利得の期待値から公正な配分を求める⇒シャープレイ値

　：限界貢献度の概念を用いる

・交渉の過程で棄却されない安定した配分を求める⇒コア

　：配分の支配という概念を用いる

・不満はあれど不満の声を最小化する配分⇒仁

　：利得ベクトルに対する提携の要求という概念を用いる

第10章　コア

シャープレイ値はあくまで期待値！

「本来ならこの利得ベクトルが与えられるのがふさわしいよね…」

って前もって言っているだけで、実際にそんな配分になるとは限らない！

↓

実際のゲーム展開を考えてみましょう

提携形ゲームが与えられる

⇒各プレイヤーにとって個人合理性と全体合理性を共に満たす
　配分の集合が交渉領域（解の集合）として定まる.
　(この間なら提携してもいいな…と全員が思える範囲)

⇒交渉の過程である一つの配分にたどり着くが、
　その間に棄却される配分はいったいどんな性質をもっているかを考える

配分の支配

3人ゲームを考える

シャープレイ値 $a = (30,40,50)$ とある配分 $\mathrm{b} = (20,45,55)$

プレイヤー2とプレイヤー3にとっては、配分bの方が利得が大きい！

また、提携{2,3}として考えても、配分bの方が利得が大きい！

⇒配分bは、提携{2}、提携{3}、提携{2,3}に関して配分aを支配する

定義1. 配分間の支配

ゲーム(N, v)において、2つの配分x, yについて、提携Sに関して

(1)選好条件 $x_i > y_i \quad \forall i \in S$

(2)実現可能条件 $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$

の2つの条件が成立するとき、提携Sに関して配分xは配分yを支配する

互いに支配する配分

5人以上のゲームでは、2つの配分が互いに他を支配することがある

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$v(\phi) = 0,\ v(i) = 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5$

$v(12) = 4,\ v(34) = 3$

$$v(S) = \begin{cases} 2 & \{1, 2\}, \{3, 4\} \text{ 以外の 2 人提携} \\ 7 & 3 \text{ 人以上の提携} \end{cases}$$

以上のゲームが与えられたとき、次の*2*つの配分について、

$$x = (2,2,1,0,2)$$
$$y = (1,1,2,1,2)$$

$$x \underset{\{1,\ 2\}}{\mathrm{dom}}\ y, \text{ かつ, } y \underset{\{3,\ 4\}}{\mathrm{dom}}\ x$$

が成り立つ.

互いを支配する配分が存在可能なのは、

プレイヤーが5人以上の時に限られる

提携合理性

先ほど見たように、

「配分の支配」 $\neq$ 純粋に「ある配分」と「他の配分」を比べる

= あることについて...

→提携を基礎にした概念！

個人合理性の拡張として、提携合理性を考える

定義2. 提携合理性

ゲーム(N, v)において、利得ベクトルxがすべての提携にとって

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

を満たすとき、この利得ベクトルは提携合理的である.

「提携合理的＝どの提携にとっても拒否されない」

→支配関係と裏表の意味

コアの定義

ざっと説明のコーナーでは「交渉の過程で棄却されない安定した配分」でしたが正式な定義.

定義5. 支配関係によるコアの定義

ゲーム(N, v)において、いかなる配分にも支配されない配分の集合

定義6. 提携合理性によるコアの定義

ゲーム(N, v, A)が弱優加法的であるならば、

コアは提携合理的配分の集合である.

すなわち、コアをC(v)とすると、

$$C(v) = \{x \in A : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N\}$$

コアの存在検証

$$C(v)=\{x \in Av : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N\}$$

上の定義を用いると、

コア：連立1次不等式の解として与えられる

n次元ベクトル空間の有界閉集合

※ただ一つの配分を表すわけではない。集合。

コアが存在する（コアが空集合でない）

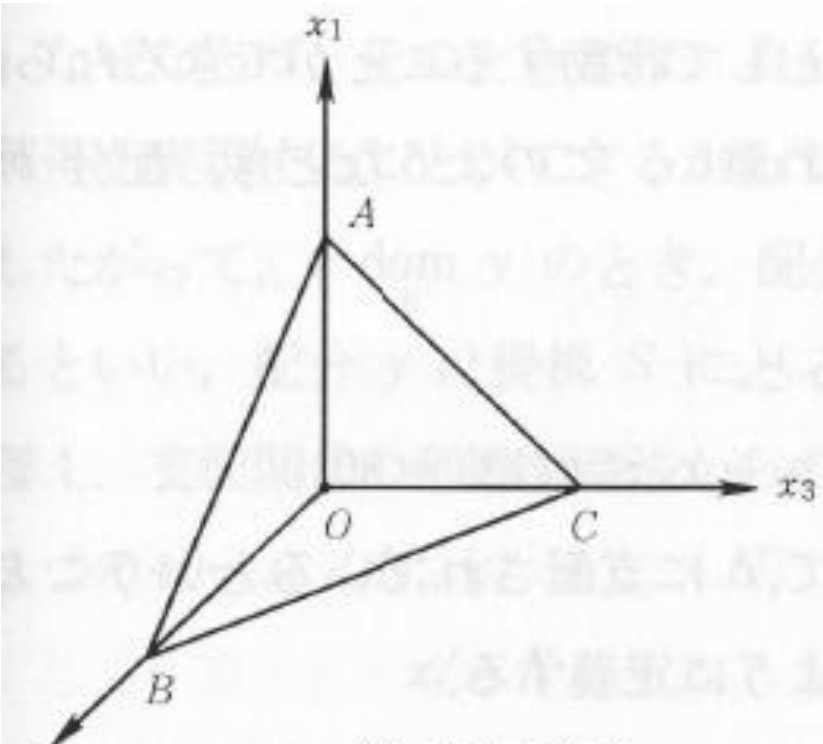
⇒プレイヤー全体が共同で行動した方が部分的な提携で行動するより大きな利得が得られる（＝協力関係が安定）

コアが存在しない（コアが空集合）

⇒全体提携の値に対して部分提携の値が相対的に大きい（＝協力関係が不安定）

基本三角形

コアの存在を視覚的に議論するため、「基本三角形」を導入する



(a) 配分の集合

3次元ベクトル空間において、
3人ゲームの配分の集合は以下の
条件を満たす.

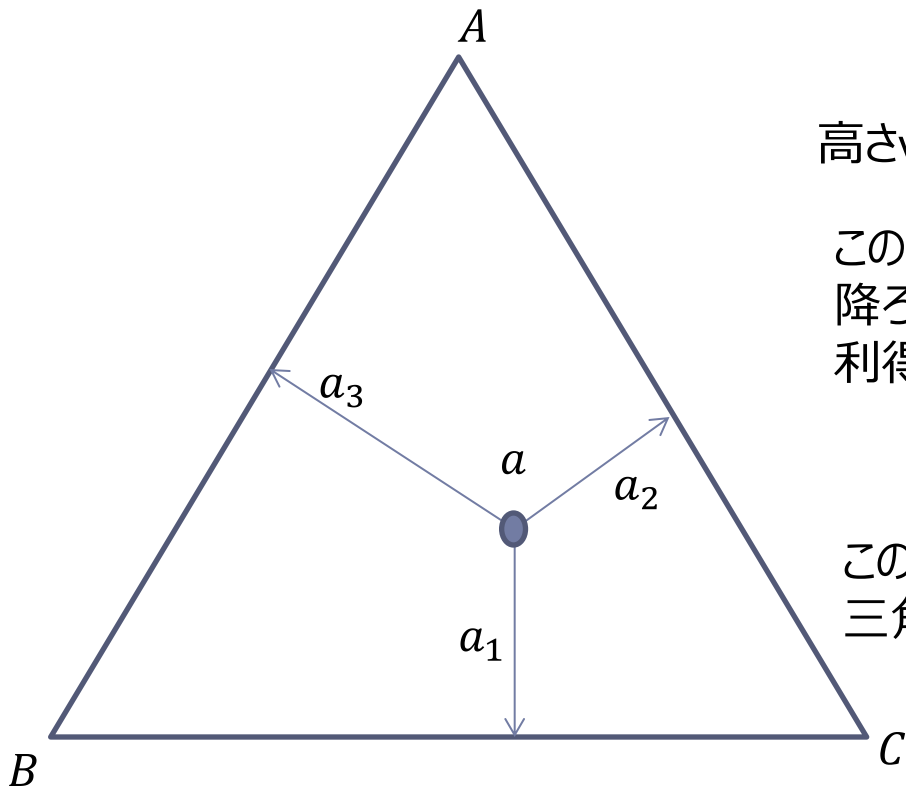
$$x_i \geq v(i) \quad \forall i$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$$

これは
左の三角形ABCの内部である.

$$O = \big(v(1), v(2), v(3)\big)$$
$$A = \big(v(N), v(2), v(3)\big)$$
$$B = \big(v(1), v(N), v(3)\big)$$
$$C = \big(v(1), v(2), v(N)\big)$$

基本三角形

コアの存在を視覚的に議論するため、「基本三角形」を導入する



高さv(N)の正三角形ABCを描く

このとき、内部のある点から三辺に
降ろした垂線の長さで、それぞれの
利得ベクトルの大きさを表す配分を表す

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

このように書くとき、
三角形ABCの内部の点は配分を表す

3人ゲームのコア

例 3． $N=\{1,\ 2,\ 3\}$

$v(\phi)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=60,\ v(13)=70,\ v(23)=80$

$v(123)=120$

提携合理性の条件は

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,$

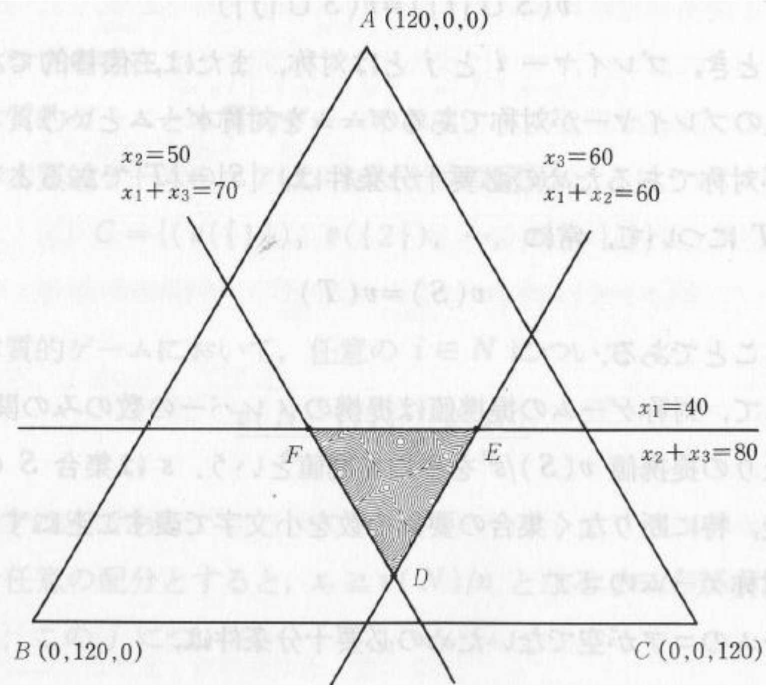
$x_1+x_2 \geqq v(12)=60,$

$x_1+x_3 \geqq v(13)=70,$

$x_2+x_3 \geqq v(23)=80,$

全体合理性の条件は

$x_1+x_2+x_3=120.$



3人ゲームにおいて、コアが空でないための条件

プレイヤ—の集合を$N=\{1,2,3\}$としたとき、

優加法的な提携形3人ゲームのコアが存在するための必要十分条件は、

$$2v(123) \geq \{v(12)+v(13)+v(23)\}$$

非分割財市場のコア

ここで、非分割財の市場での取引を、売り手と買い手の提携ゲームとして定式化する.

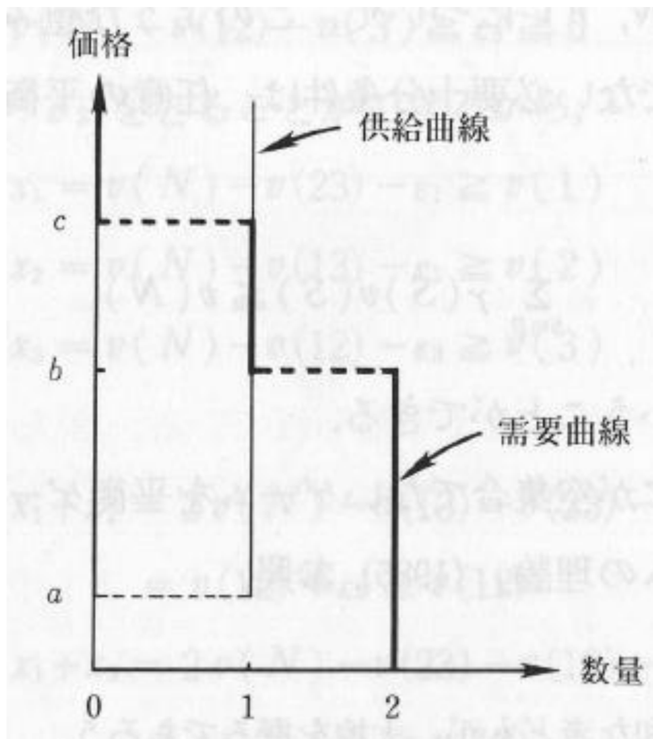


図 10. 4. 非分割市場の需要曲線と供給曲線

$$N=\{1,2,3\}$$

プレイヤー1　:財の現所有者
プレイヤー2　:財の需要者
プレイヤー3　:財の需要者

１ ：a円以上なら売る
２ ：b円以下なら買う
３ ：c円以下なら買う

交換が成立する条件

$$a \leq \max(b,c)$$

非分割財市場のコア

ここで、非分割財の市場での取引を、売り手と買い手の提携ゲームとして定式化する.

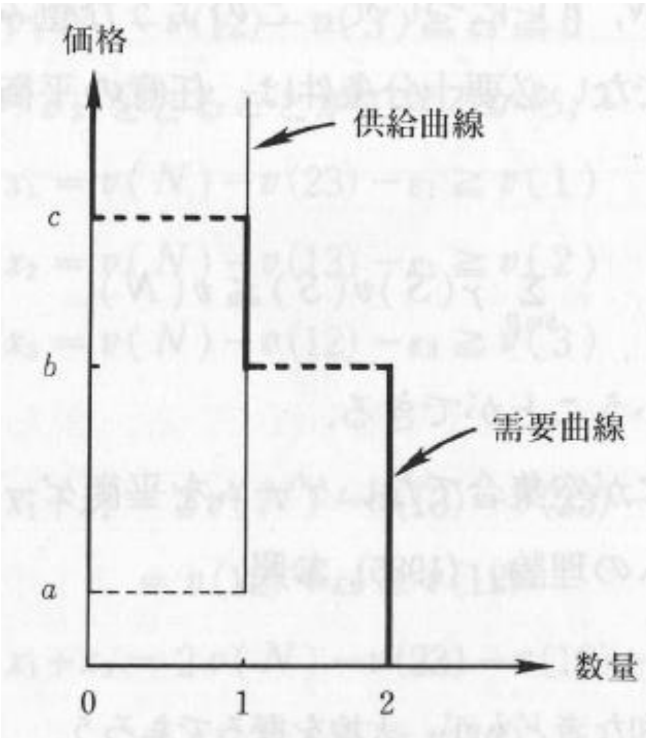


図 10.4. 非分割市場の需要曲線と供給曲線

$$N = \{1,2,3\}$$

プレイヤー1　:財の現所有者(a円以上なら売る)
プレイヤー2　:財の需要者(b円以下なら買う)
プレイヤー3　:財の需要者(c円以下なら買う)

交換が成立する条件

$$a \leq \max(b, c)$$

価格pは需要曲線と供給曲線の交点なので、

$$b \leq p \leq c$$

この中のどこに決まるかは、プレイヤーの交渉能力次第
⇒提携形の協力ゲーム

非分割財市場のコア

提携＝提携内のプレイヤーの間で取引が成立すること
特性関数＝提携のメンバーの財の評価値のなかでの最大値
(財の最終所有者の評価値)

単独⇒取引失敗なので、財の最終所有者はプレイヤー1,その評価値はa円

$$v(1)=a, v(2)=0, v(3)=0$$

2人提携について、売り手と買い手ならその2人の間で取引が成立するので、

$$v(12)=b, v(13)=c, v(23)=0$$

3人で交渉されると、もっとも高い価格で売買がなされると考えられるので

$$v(123)=c$$

市場取引の結果により各プレイヤーが受け取る価値と価格の範囲が求められる!!

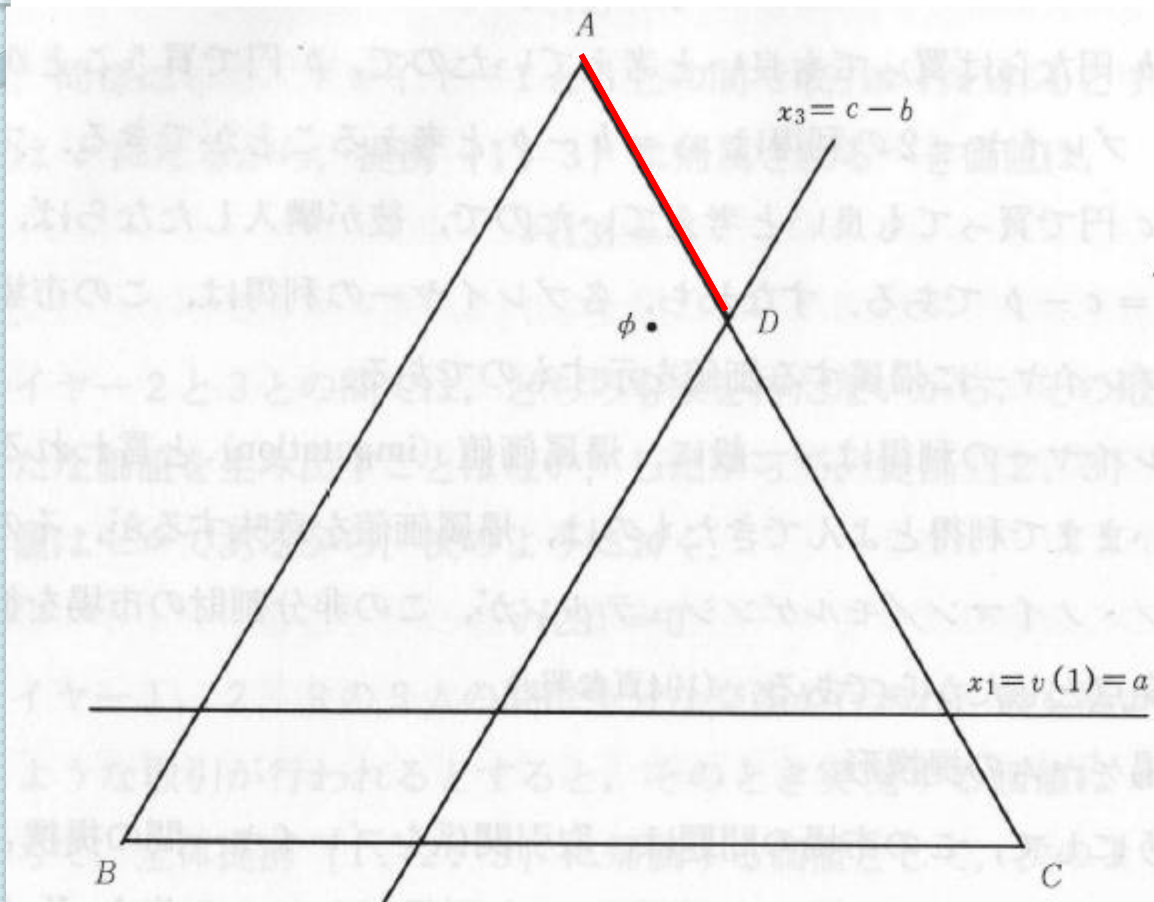
このゲームのコアは

$$C(v)=\{x=(x_1, 0, x_3): \text{ただし}, b \leq x_1 \leq c, x_3=c-x_1\}$$

または $C(v)=\{x=(p, 0, c-p); b \leq p \leq c\}$

非分割財市場のコア

数値例として、(a,b,c)=(20,80,120) の場合を考える



ここでは線分ADがコア

ちなみにシャープレイ値は

$$\phi(v) = (80,\ 10,\ 30)$$

これはコアの外にある
⇒なぜ？

Ａ． 実際には成立しない
{1,2}という提携を
考慮しているから

凸ゲームとシャープレイ値

ゲーム(N,v)において、提携Ｓにプレイヤーiが参加したときの

限界貢献度v(S∪{i})-v(S)が

提携の規模が大きくなるにつれて、常に増加するとき。すなわち、

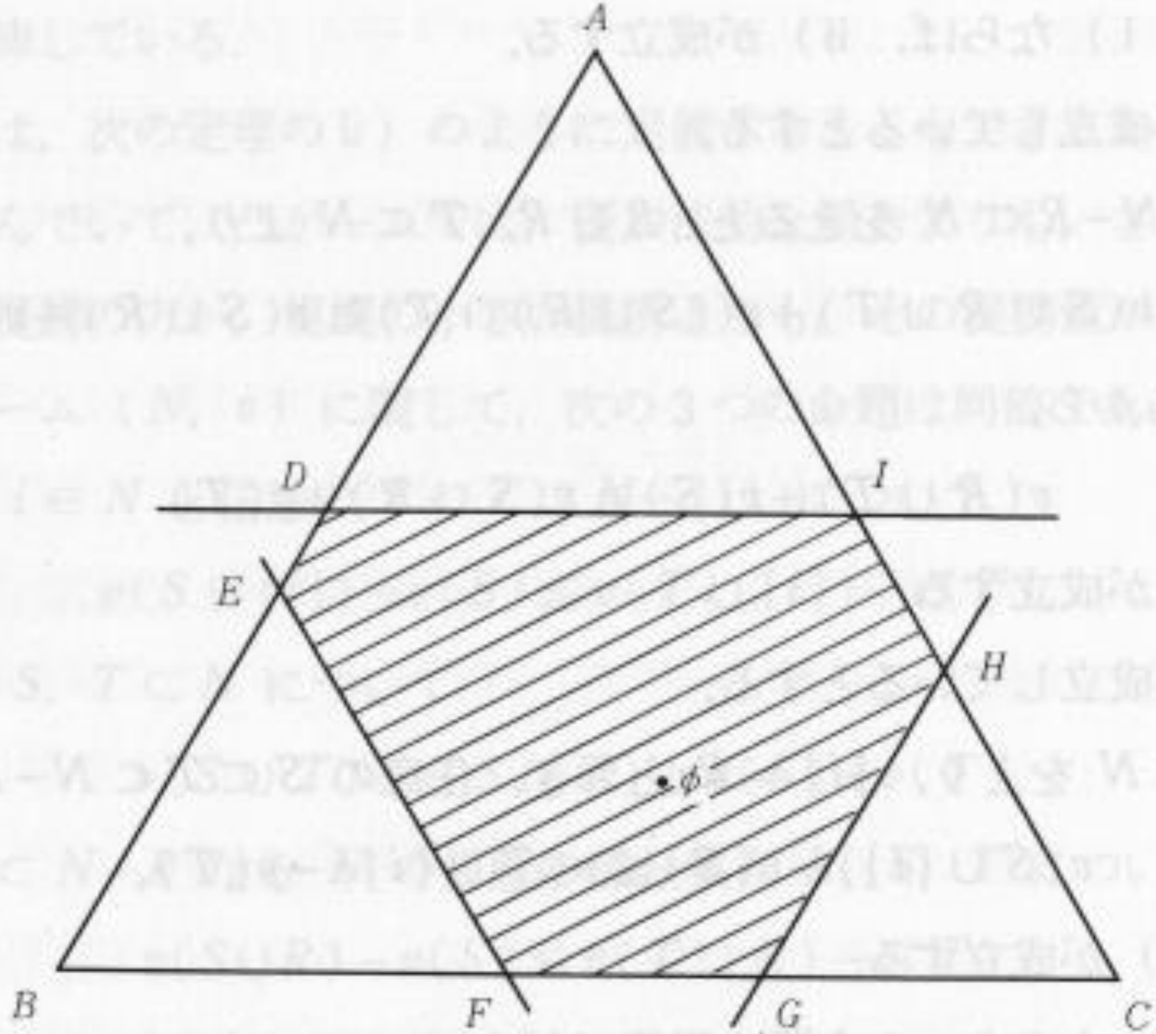
任意のi∈Nと任意のS⊂T⊂N-{i}について

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

のとき、このゲームを凸ゲームという

ここでは、コアは空でなく、かつその範囲も広く、

シャープレイ値はコアの中に含まれる.



$D=(60,\ 60,\ 0)$, $E=(50,\ 70,\ 0)$, $F=(0,\ 70,\ 50)$,

$G=(0,\ 40,\ 80)$, $H=(40,\ 0,\ 80)$, $I=(60,\ 0,\ 60)$

$\phi(v)=(35,\ 40,\ 45)$

目的(再掲)

提携形ゲームにおいてどのような配分がありうるかを考察する

・利得の期待値から公正な配分を求める⇒シャープレイ値
　：限界貢献度の概念を用いる

・交渉の過程で棄却されない安定した配分を求める⇒コア
　：配分の支配という概念を用いる

・不満はあれど不満の声が最小となるような配分⇒仁
　：利得ベクトルに対する提携の要求という概念を用いる

コアがないゲームの全体提携

ゲームのコアが空（提携合理性が成り立つ配分がない）場合であっても、
全体提携を解消することなく交渉が成立することが現実にはありうる.
このとき、どのような解が望ましい？

コアがないとき：
みんなで協力してみんなが満足♪ってことにはいかない
誰かが割を食うことになる
⇒その人の不幸を最小化しよう（J.ロールズ『正義論』）

これらを考えるべく、準配分、要求(超過)、コア、εコアを定義する

準配分

「配分」＝個人合理性と全体合理性を満たす利得ベクトル
「準配分」＝全体合理性を満たす利得ベクトル

配分の集合をA、準配分の集合をA^*とすると、

$$A = \{x \in R^n : \textstyle\sum_{i \in N} x_i = v(N),\ x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N\}$$
$$A^* = \{x \in R^n : \textstyle\sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$$

ここからは、
解の集合として配分ではなく準配分の集合A^*を基礎にして考えていく.

要求（超過）

利得ベクトルxに対する提携Sの要求を以下のように定義する.

$$e(x\ ;\ S)=v(S)-\sum_{i\in S}x_i \quad S\subset N,\ ただし,\ S\neq\phi,\ N$$

要求が正の値　＝　提携Sは利得ベクトルxに対して不満を持っている！

要求が負の値　＝　提携Sは利得ベクトルxに対して剰余を持っている！

準配分と要求の概念を用いると、コアは次のようにかける

$$C=\{x\ :\ x\in A^*,\ e(x\ ;\ S)\leqq 0 \quad \forall\ S\subset N\}$$

前章で定義したコアはこちら

$$C(v)=\{x\in Av : \sum_{i\in S}x_i\geqq v(S) \quad \forall\ S\subset N\}$$

「配分⇒準配分」、「提携合理性⇒要求」と書き換えている

εコア

すべての提携Sが、ある値$\varepsilon > 0$だけ、その提携値v(S)より不足しても我慢するような場合を考える.

⇒コアの条件 $e(x;S) \leq 0$ の緩和

　＝$e(x;S) \leq \varepsilon$　の範囲の準配分の集合を交渉領域として定められる

定義1.εコア

εを任意の実数としたとき、次のような準配分の集合C(ε)をεコアという.

$$C(\varepsilon)=\{x: x \in A^*, e(x;S) \leqq \varepsilon \quad \forall S \subset N, S \neq \phi, N\}$$

※要求がε以下の準配分の集合

提携のサイズsを考慮した一人当たりの要求が妥協の限度εだと考え、

平均要求$\frac{e(x;S)}{s} \leq \varepsilon$を満たす準配分の集合を平均$\varepsilon$コアと定義する.

$$Cs(\varepsilon)=\{x: x \in A^*, e(x;S) \leqq \varepsilon s \quad \forall S \subset N, S \neq \phi, N\}$$

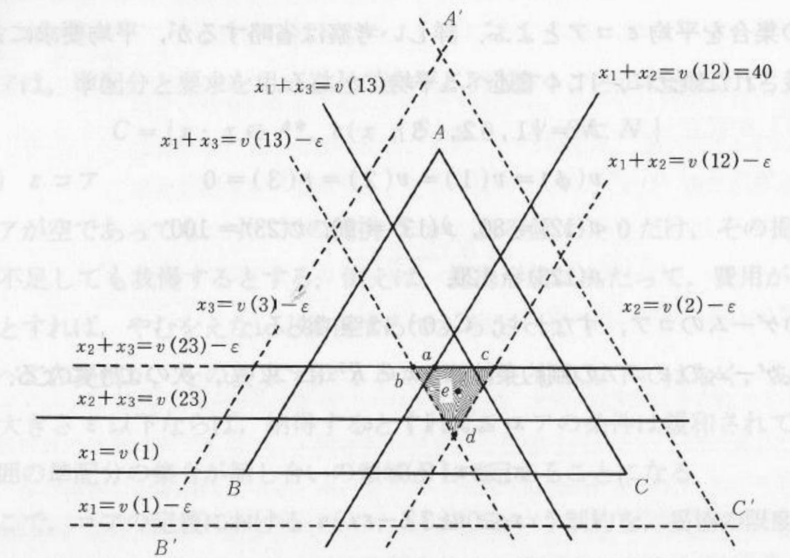
εコアの作り方

任意の準配分xについて、

$$\varepsilon(x) = \max\ [e(x\ ; S) : S \subset N, S \neq \phi, N\ ]$$

として$\mathrm{C}(\varepsilon(x))$をつくると、$\mathrm{C}(\varepsilon(x))$は準配分xを含むので空ではない.

⇒通常のコアが空でも、任意の準配分でεコアは定義できる！



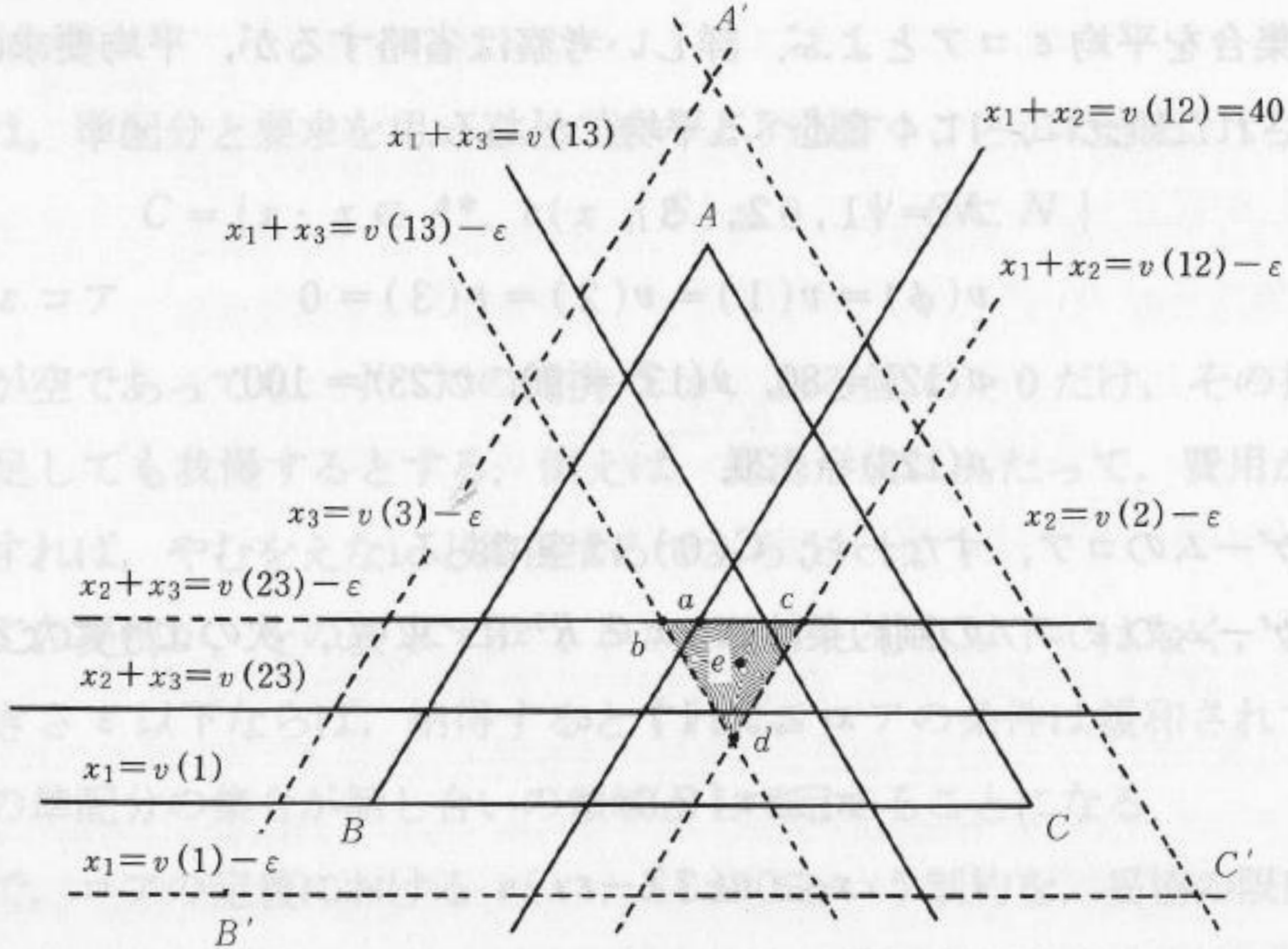
$A=(120,\ 0,\ 0)$, $B=(0,\ 120,\ 0)$, $C=(0,\ 0,\ 120)$

$A'=(160,\ -20,\ -20)$, $B'=(-20,\ 160,\ -20)$, $C'=(-20,\ -20,\ 160)$

$a=(40,\ 40,\ 40)$, $b=(40,\ 50,\ 30)$,

$c=(40,\ 20,\ 60)$, $d=(10,\ 50,\ 60)$, $e=(30,\ 40,\ 50)$

緩和前のコアの条件：実線
緩和後のεコアの条件：点線



$A=(120,\ 0,\ 0)$, $B=(0,\ 120,\ 0)$, $C=(0,\ 0,\ 120)$

$A'=(160,\ -20,\ -20)$, $B'=(-20,\ 160,\ -20)$, $C'=(-20,\ -20,\ 160)$

$a=(40,\ 40,\ 40)$, $b=(40,\ 50,\ 30)$,

$c=(40,\ 20,\ 60)$, $d=(10,\ 50,\ 60)$, $e=(30,\ 40,\ 50)$

最小コア

定義2. 空でないεコアの共通部分を最小コアという.

[最小コアの作り方]

任意の準配分xについて、

$$\varepsilon(x) = \max\ [e(x\ ;\ S) : S \subset N,\ S \neq \phi,\ N]$$

とすると、xを含む空でないεコア$C(\varepsilon(x))$ができる. (前スライド)

最小コアを$C(\varepsilon^*)$とすると、

$$\varepsilon^* = \min\ [\varepsilon(x),\ x \in A^*]$$

$$= \min_{x \in A^*}\ \max\ [e(x\ ;\ S) : S \subset N,\ S \neq \phi,\ N]$$

①すべての準配分xについて、最も要求の大きい提携からの要求$e(x; S)$を求める

②最大要求の最小値をε^*としたときのε コアが最小コア！

最小コアに含まれる配分をx、任意の配分をyとすると、任意の提携Sについて

$$\max e(x; S) \leq \max e(y; S)$$

辞書式中心

εコア: すべての提携について、提携の要求がε以下であるコア
最小コア：空でないεコアの共通部分．最大要求が最小となるコア．

※注意：最小コアはただ一つの準配分から成るとは限らない
ex) 提携Aと提携Bがどちらも10の要求をもつ配分
提携Aは10の要求をもつが提携Bは要求0の配分 …どちらも最小コア！

⇒最小コアをさらに縮小して、全体にとって不満の少ない配分を考えたい．

辞書式中心を得るアルゴリズム

①次のようにおく

$$X^o = \{x \in R^n : \textstyle\sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$$ ：準配分

$$I^0 = \{S : S \subset N,\ S \neq \phi,\ N\}$$ ：提携集合

②$r = 1$より、次のことを再帰的に定義する.

$$\varepsilon^r = \min_{x \in X^{r-1}} \max_{S \in I^{r-1}} e(x; S)$$

$$X^r = \{x \in X^{r-1} : e(x; S) \leq \varepsilon^r \quad \forall S \in I^{r-1}\}$$

$$I_r = \{S \in I^{r-1} : e(x ; S) = \varepsilon^r \quad \forall x \subset X^r\}$$

$$I^r = I^{r-1} - I_r$$

③ $I^r = \emptyset$ならば終了.

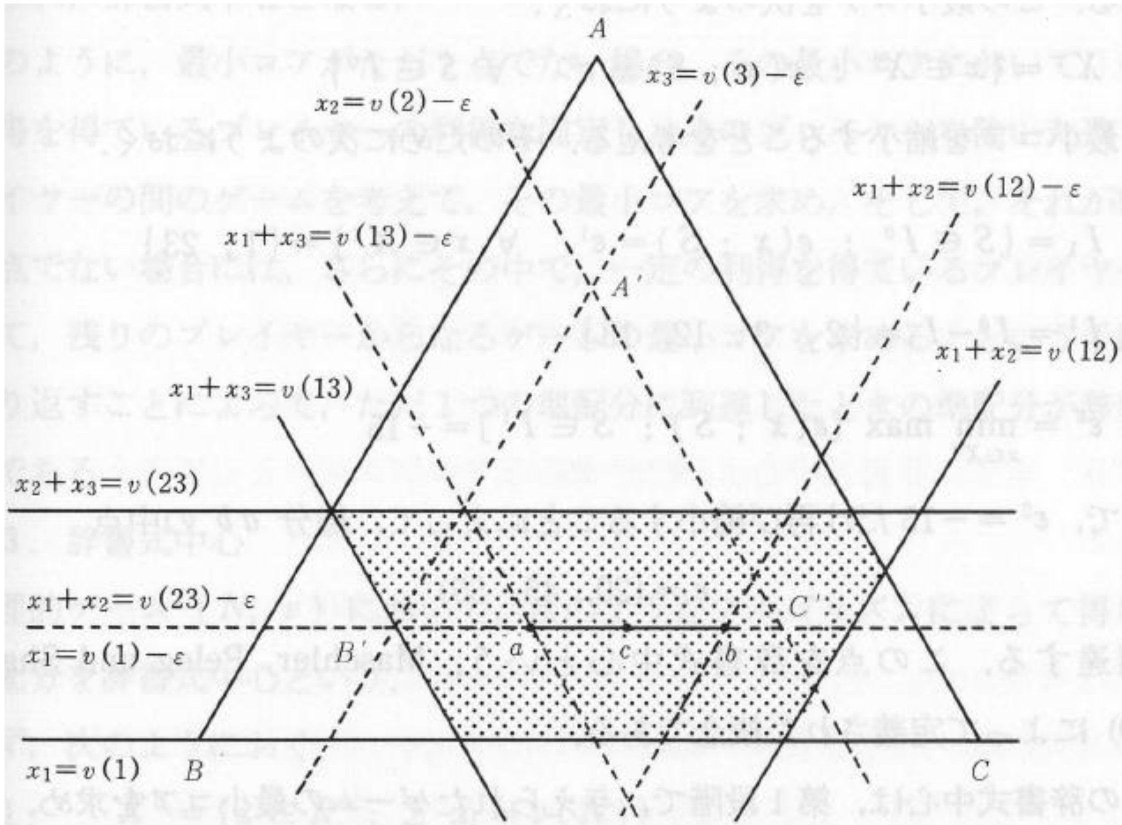
$I^r \neq \emptyset$ ならば、$r = r + 1$として②に戻る

ε^rは、

$$\boxed{\begin{aligned} &\min \varepsilon \\ &s.t.\ x \in X^{r-1} \\ &\quad \varepsilon \geq e(x; S)\ \forall S \in I^{r-1} \end{aligned}}$$

により求められる

辞書式中心



$A = (120,\ 0,\ 0)$, $B = (0,\ 120,\ 0)$, $C = (0,\ 0,\ 120)$

$A' = (80,\ 20,\ 20)$, $B' = (20,\ 80,\ 20)$, $C' = (20,\ 20,\ 80)$

$a = (20,\ 60,\ 40)$, $b = (20,\ 30,\ 70)$, $c = (20,\ 45,\ 45)$

辞書式中心

定理3. 合理的ゲーム(N,v)において、辞書式中心は必ず存在し、
　　　ただ一つの準配分から成る. （＝準仁）

定理4. ゼロ単調なゲームでは、辞書式中心は配分である. （＝仁）

⇒仁に至るため、
「要求ベクトル」
「受容的」
の概念を導入する.

要求ベクトル

ゲーム(N, v)において、配分xが与えられたとき、提携Sのxに対する要求$e(x; S)$を大きい順に並べたベクトルを要求ベクトルという.

$$\Theta(a) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_k(x))$$

ただし、

$$\theta_j = e(x; S_j) \quad j = 1, \dots, k$$

$$\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \cdots \geq \theta_k(x)$$

以下のゲームにおいて配分$a = (20,60,40)$についての各提携の要求は

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\phi) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(12) = 30, \ v(13) = 40, \ v(23) = 80$

$v(123) = 120.$

$e(a; 1) = 0 - a_1 = -20$

$e(a; 2) = 0 - a_2 = -60$

$e(a; 3) = 0 - a_3 = -40$

$e(a; 12) = 30 - (a_1 + a_2) = -50$

$e(a; 13) = 40 - (a_1 + a_3) = -20$

$e(a; 23) = 80 - (a_2 + a_3) = -20$

よって、要求ベクトルは

$$\Theta(a) = (-20, -20, -20, -40, -50, -60)$$

受容的

利得ベクトルxとyについて、要求ベクトルΘ(x)とΘ(y)に関して、
辞書式順序で小さい利得ベクトルの方が受け入れられると考える.

↓

Θ(x)とΘ(y)の成分を大きいものから順に比較していき、
最初に異なる成分がΘj(x)とΘj(y)であって、

$$\Theta_j(x) < \Theta_j(y)$$

のとき、

$$\Theta(x) \underset{\text{Lex}}{<} \Theta(y)$$

と書き、xはyよりも辞書式順序で小さい、または受容的であるという.
すべての成分について等しいとき、

$$\Theta(x) \underset{\text{Lex}}{=} \Theta(y)$$

と書く.

仁の定義

定義4．準仁$Nu^*(v)$

いかなる準配分よりも受容的である準配分の集合を準仁という.

$$Nu^*(v) = \{x \in A^* : \Theta(x) \underset{\text{Lex}}{\leqq} \Theta(y) \quad \forall\ y \in A^*\}$$

定義5. 仁$Nu\ (v)$

いかなる配分よりも受容的である配分の集合を仁という.

$$Nu(v) = \{x \in A : \Theta(x) \underset{\text{Lex}}{\leqq} \Theta(y) \quad \forall\ y \in A\}$$

定理5. ゲーム(N, v)が合理的、すなわち

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i)$$

ならば、準仁、および仁は空ではなく、ただ1つの配分からなる集合である.

仁の存在

定理6. ゼロ単調ゲームでは、準仁は仁と一致する
定理7. 準仁は辞書式中心に一致する

（今までのお話から）
辞書式中心：最小コアの極限（最小コアを縮小していった先）
↓
ゼロ単調なゲームでは、
仁＝準仁＝辞書式中心＝最小コアの極限

直感的な仁の理解
最大要求を最小にする配分をつくる
→それらが均衡しているときには、次に大きい要求を最小にする
→それが均衡しているときにはその次に大きい要求を最小にする
→・・・→仁にたどり着く！