Robert B. Dial, 1970
A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration
Transpn Res. Vol.5, pp.83-111, 1971.

理論談話会 2017.9.15

B4 広瀬啓人

Dial配分の特徴

- Dialのアルゴリズム

＝交通量配分において経路候補探索に用いられる

- 交通量配分

確率的配分問題

$$\min Z(\boldsymbol{f}) = \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs} c_k^{rs} - \frac{1}{\theta}\sum_{rs} q_{rs}\left(-\sum_{rs}\sum_{k}\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\ln\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}}\right)$$

$subject\ to$

$$x_a = \sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}$$

$$q_{rs} = \sum_{k} f_k^{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0$$

a : リンク　r : 出発地　s : 目的地　k : パス（経路）
x_a : リンクaにおけるフロー数
t_a : リンクaにおける旅行時間
f_k^{rs} : ODペアrsを結ぶパスkにおけるフロー数
c_k^{rs} : ODペアrsを結ぶパスkにおける旅行時間
q_{rs} : ODペアrs間の総フロー数
$\delta_{a,k}^{rs}$: リンクaがODペアrsを結ぶパスk上にあるかを示すダミー変数

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1 & \text{リンク}a\text{がパス}k\text{上にあるとき} \\ 0 & \text{ないとき} \end{cases}$$

経路変数を用いた記述 → 配分においては経路の列挙が必要になる

実際の交通ネットワークでは、経路数が膨大で全てを列挙するのが難しい・・・

Dial配分の特徴

実際の交通ネットワークでは、経路数が膨大で全てを列挙するのが難しい・・・

- Dialのアルゴリズムでは、経路を全て列挙することを回避
- ある規則の下に、経路候補を限定する
- 1回の計算で1つの起点から複数の終点までの配分が可能

アルゴリズムの概要

ある始点rからの経路を考える

Step 0	準備	リンク尤度の計算
Step 1	前進処理	リンク・ウェイトの計算
Step 2	後退処理	リンク交通量の計算

次のrへ

全てのトリップ始点ノードについて、この作業を行う

アルゴリズム

Step 0 | 準備 | リンク尤度の計算

(a) 起点rから他の全てのノードへの最小交通費用を計算

rからノードiへの最小交通費用：$c(i)$

(b) 全リンクについて、リンク尤度を計算

- リンク$[i \rightarrow j]$のリンク尤度

$$L[i \rightarrow j] = \begin{cases} \exp[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}] & (c(i) < c(j)) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- <u>リンク尤度＝リンクの“選ばれやすさ”</u>

アルゴリズム

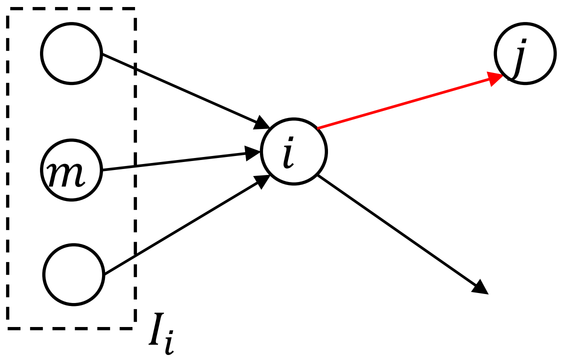
Step 1 | 前進処理 | リンク・ウェイトの計算

- $c(i)$の昇順にノードiを並べる・・・始点rから近い順
- ノードiから出ているリンクのリンク・ウェイトを計算

  - リンク$[i \rightarrow j]$のリンク・ウェイト

$$W[i \rightarrow j] = \begin{cases} L[i \rightarrow j] & i = r \\ \sum_{m \in I_i} W[m \rightarrow i] \times L[i \rightarrow j] & otherwise \end{cases}$$

I_i: ノードiを終点とするリンク集合



アルゴリズム

Step 2 | 後退処理 | リンク交通量の計算

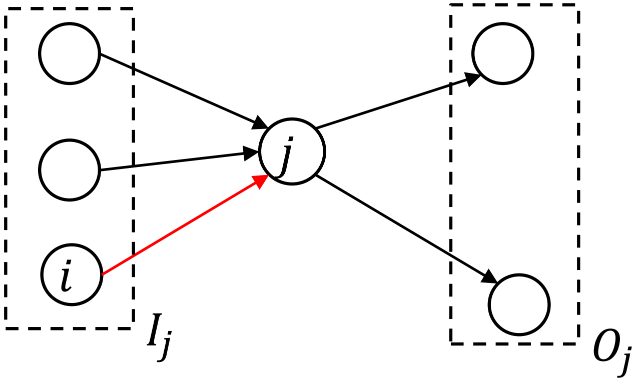
- $c(j)$の降順にノードjを並べる･･･始点rから遠い順
- ノードjに流入するリンクの交通量を計算

  - リンク$[i \rightarrow j]$のリンク交通量

$$x_{ij} = (q_{rj} + \sum_{m\in O_j} x_{jm}) \frac{W[i \rightarrow j]}{\sum_{m\in I_j} W[m \rightarrow j]}$$

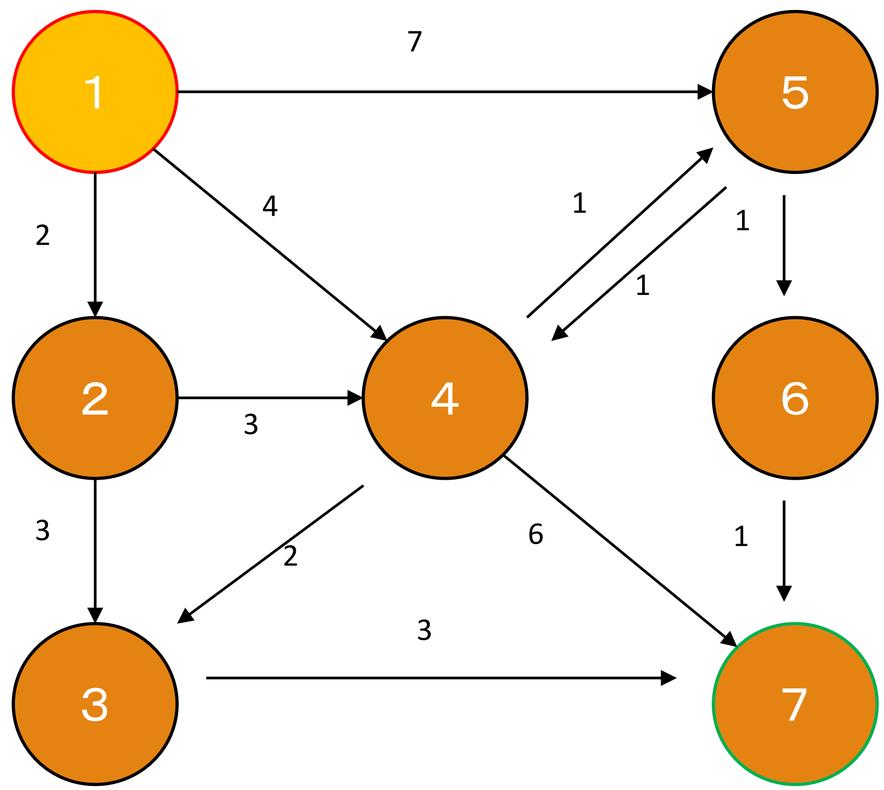
jを通過する総交通量

O_j: ノードjを始点とするリンク集合
I_i: ノードjを終点とするリンク集合



計算例

- 1→7に1000台が流れるとき、配分は？



計算例

Step 0 | 準備 | リンク尤度の計算

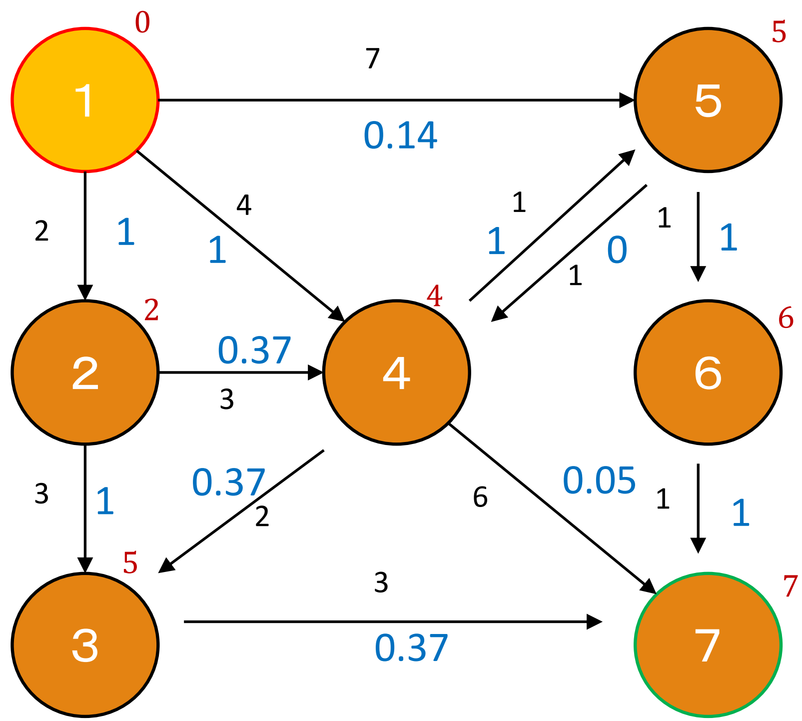
(a) 起点rから他の全てのノードへの最小交通費用を計算(ダイクストラ法)

(b) 全リンクについて、リンク尤度を計算

$$L[i \to j] = \begin{cases} \exp[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}] & (c(i) > c(j)) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

例($\theta = 1$とする)

$$L[1 \to 5] = \exp\left(c(5) - c(1) - t_{1,5}\right)$$
$$= \exp(5 - 0 - 7)$$
$$=0.135$$



計算例

Step 1 前進処理 リンク・ウェイトの計算

$c(i)$について昇順に、iから流出するリンクのリンク・ウェイトを計算

$$W[i \to j] = \begin{cases} L[i \to j] & i = r \\ \sum_{m \in I_i} W[m \to i] \times L[i \to j] & otherwise \end{cases}$$

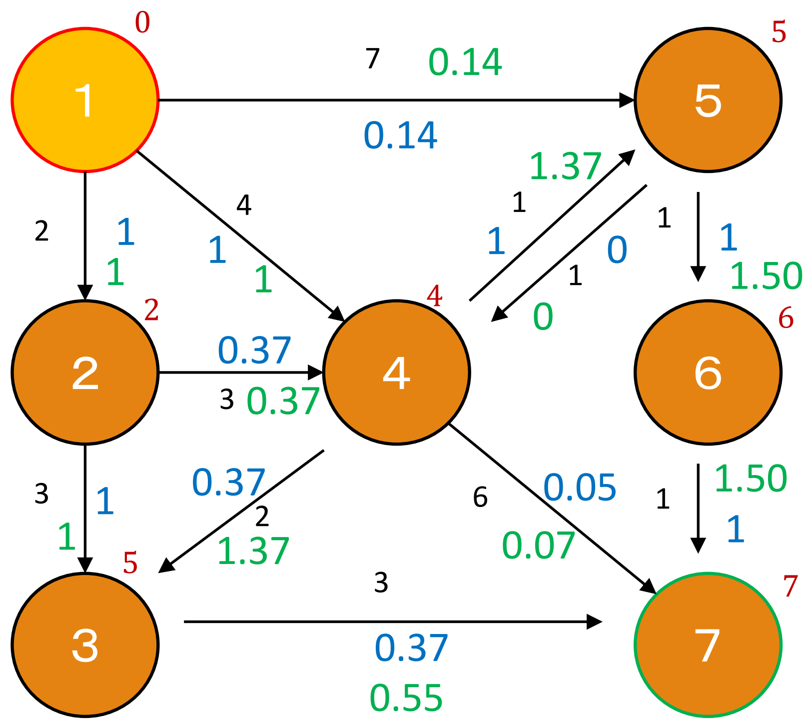
発ノード$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6$の順に計算

$$W[1 \to 5] = L[1 \to 5] = 0.135$$

$$W[3 \to 7]$$

$$= (W[2 \to 3] + W[4 \to 3]) \times L[3 \to 7])$$

$$= 0.553$$



計算例

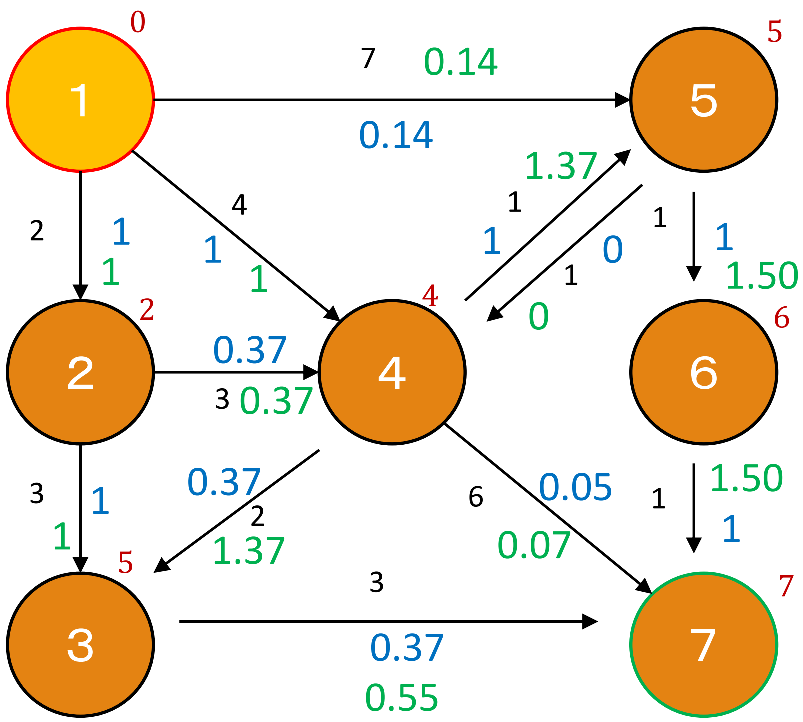
Step 2　後退処理　リンク交通量の計算

$c(j)$について降順に、jから流出するリンクのリンク・ウェイトを計算

$$x_{ij} = (q_{rj} + \sum_{m \in O_j} x_{jm}) \frac{W[i \to j]}{\sum_{m \in I_j} W[m \to j]}$$

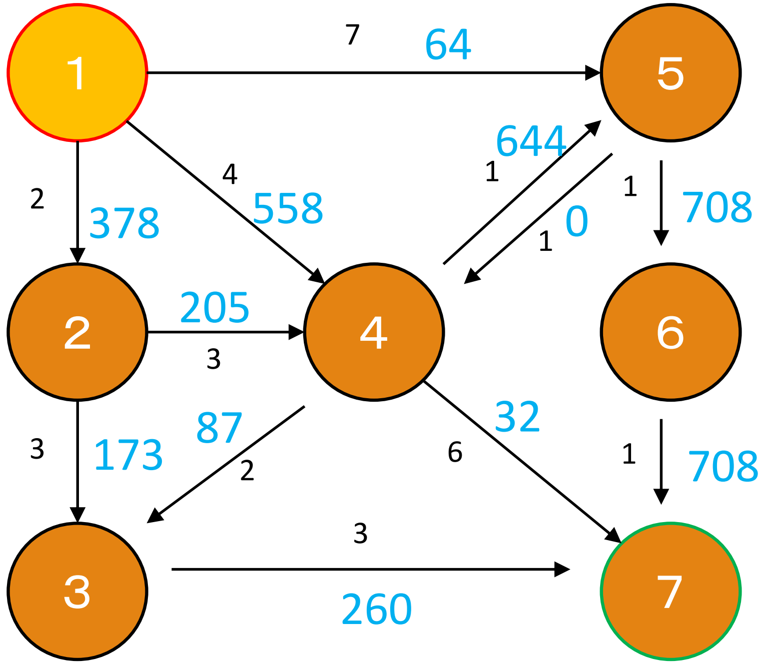
着ノード7 → 6 → 5 → 3 → 4 → 2の順に計算

$$W[4 \to 7]$$
$$= q_{1,7} \times \frac{W[4 \to 7]}{W[3 \to 7] + W[4 \to 7] + W[6 \to 7]}$$
$$= 1000 \times \frac{0.06}{0.55 + 0.06 + 1.50} = 32.1$$



計算例

- 1→7に1000台が流れるとき、配分は？

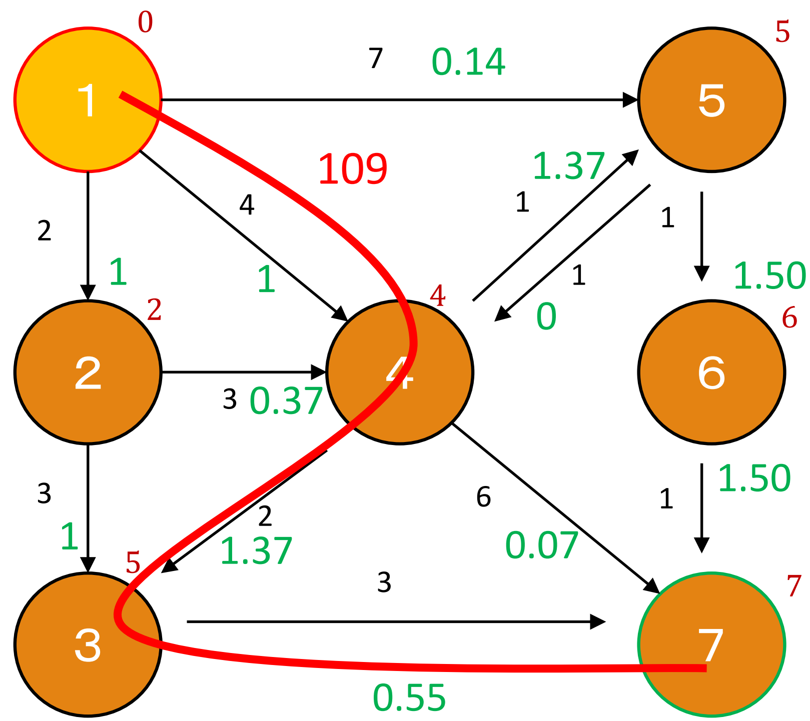


計算例

- 経路交通量を求めたいとき・・・リンク・ウェイトを利用

  例：1→4→3→7

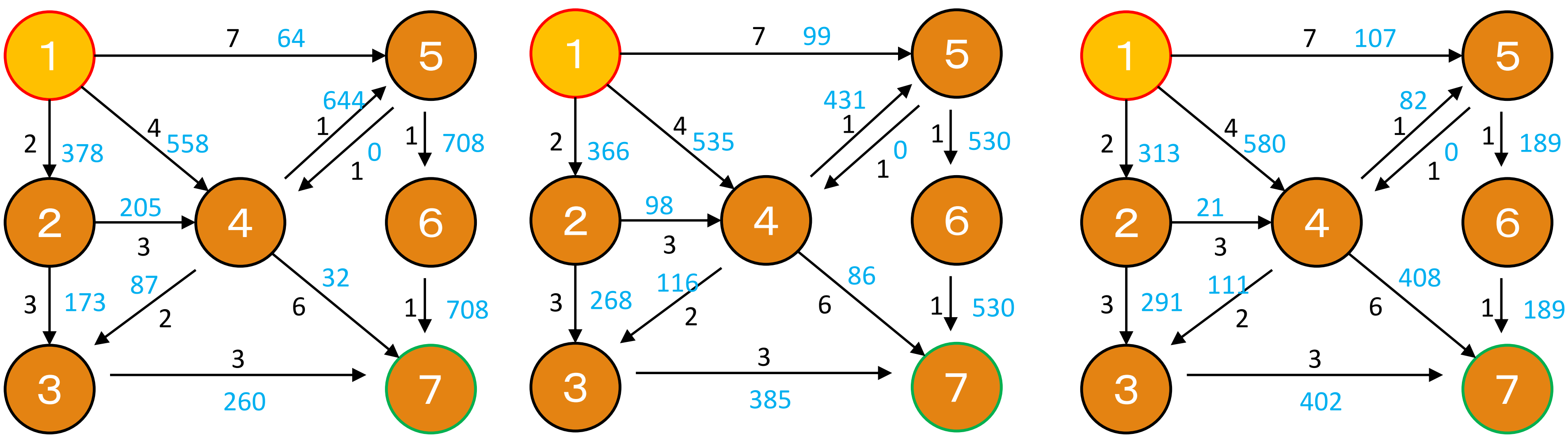
$$
\begin{aligned}
&1000 \\
&\times \frac{W[3 \to 7]}{W[3 \to 7] + W[4 \to 7] + W[6 \to 7]} \\
&\times \frac{W[4 \to 3]}{W[2 \to 3] + W[4 \to 3]} \\
&\times \frac{W[1 \to 4]}{W[1 \to 4] + W[2 \to 4] + W[5 \to 4]} \\
&= 109
\end{aligned}
$$



パラメータθの意味

$$L[i \rightarrow j] = \begin{cases} \exp[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}] & (c(i) > c(j)) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$\theta = 1$ $\theta = 0.5$ $\theta = 0.1$



- リンク尤度を求めた際のθは、経路転換の度合いを表す
- θが大きくなると、コストの影響が大きくなり、UEに近い配分になる。
- 一方、0に近づくとコストの影響が小さくなり、すべての経路が等価に近づく。

ロジット型確率配分との等価性

- ロジット型確率配分モデル

ODペア$(\mathrm{r} \rightarrow s)$の$k$番目経路の効用関数

$$U_k^{rs} = \underbrace{-c_k^{rs}}_{\text{確定項}} + \underbrace{\xi_k^{rs}}_{\text{誤差項}}$$

誤差項にガンベル分布を仮定すると

$$P_k^{rs} = \frac{\exp[-\theta c_k^{rs}]}{\sum_k \exp[-\theta c_k^{rs}]}$$

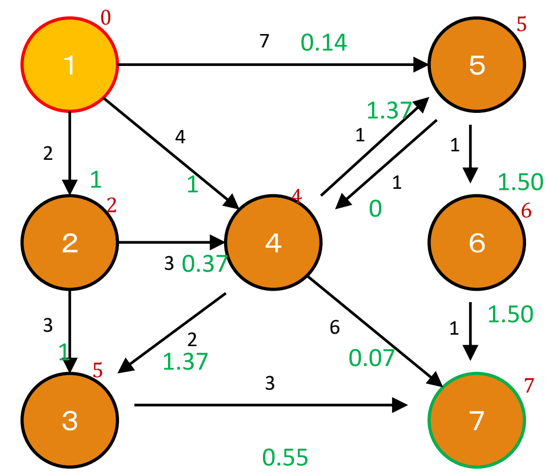
r : 出発地　　s : 目的地　　k : パス（経路）
f_k^{rs} : ODペアrsを結ぶパスkにおけるフロー数
c_k^{rs} : ODペアrsを結ぶパスkにおける旅行時間
q_{rs} : ODペアrs間の総フロー数

- Dial配分は、ロジット型確率配分の解法の1つ

ロジット型確率配分との等価性

- 先ほどの例を用いて証明

経路k:1→4→3→7の選択確率



$$P_k = \frac{W[3 \to 7]}{\sum_m W[m \to 7]} \times \frac{W[4 \to 3]}{\sum_m W[m \to 3]} \times \frac{W[1 \to 4]}{\sum_m W[m \to 4]}$$

$$W[i \to j] = \sum_{m \in I_i} W[m \to i] \times L[i \to j]$$ より、

$$P_k = \frac{\sum_m W[m \to 3] \times L[3 \to 7]}{\sum_m W[m \to 7]} \times \frac{\sum_m W[m \to 4] \times L[4 \to 3]}{\sum_m W[m \to 3]} \times \frac{W[1 \to 4]}{\sum_m W[m \to 4]} = \frac{L[3 \to 7] \times L[4 \to 3] \times L[1 \to 4]}{\sum_m W[m \to 7]}$$

$$L[i \to j] = \exp\left[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}\right]$$ より、

(分子) $= L[3 \to 7] \times L[4 \to 3] \times L[1 \to 4]$

$= \exp\left[\theta\{c(7) - c(3) - t_{3,7}\}\right] \times \exp\left[\theta\{c(3) - c(4) - t_{3,4}\}\right] \times \exp\left[\theta\{c(4) - c(1) - t_{1,4}\}\right]$

$= \exp[\theta\{c(7) - c_k\}]$ (c_k: 経路kの長さ)

よって、$P_k = \dfrac{\exp[\theta\{c(7) - c_a\}]}{\sum_m W[m \to 7]}$

ロジット型確率配分との等価性

$$P_k = \frac{\exp[\theta\{c(7) - c_k\}]}{\sum_m W[m \to 7]} = \frac{\exp[\theta c(7)\ ]}{\sum_m W[m \to 7]} \times \exp[-\theta c_k]$$

ここで、全経路の選択確率の和は1なので、

$$\sum_k P_k = \frac{\exp[\theta c(7)\ ]}{\sum_m W[m \to 7]} \times \sum_k \exp[-\theta c_k] = 1$$

$$\frac{\exp[\theta c(7)\ ]}{\sum_m W[m \to 7]} = \frac{1}{\sum_k \exp[-\theta c_k]}$$

これを上の式に代入して、

$$\boxed{P_k = \frac{\exp[-\theta c_k]}{\sum_k \exp[-\theta c_k]}}$$

これは、ロジット型の経路選択率と等しい.

まとめ

- Dial配分は、“後戻り経路”を選択肢から排除することで、全列挙を避けて経路を列挙する手法である.
- 一度に一つの起点から複数の終点への配分計算を行うことができる.
- ロジット型確率配分モデルと等価な結果が得られる.