

課題論文

Wilson, A. G. :

**A Statistical Theory of
Spatial Distribution Models,**

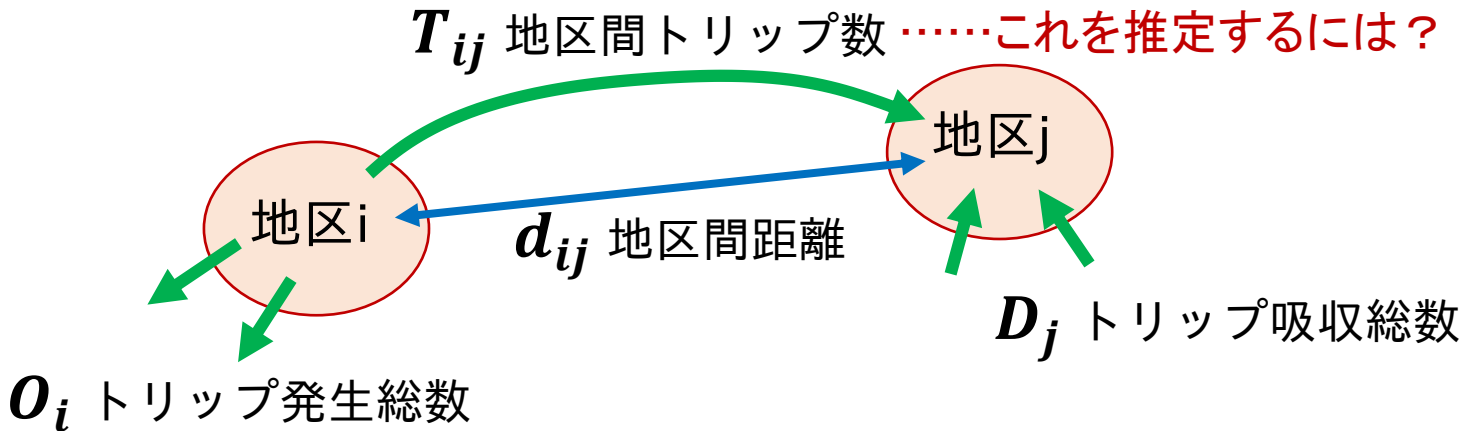
Transportation research, 1(3), pp. 253-269, 1967

交通・都市・国土学研究室

修士2年 梅澤祥太

基本的な空間分布モデル① 重力モデル

以下のような状況を設定する。ここでのトリップ目的は通勤とする。



① 重力モデル

ニュートンの重力法則 $F_{ij} = \gamma \frac{m_i m_j}{(d_{ij})^2}$ (1) を応用し、

$m_{i,j}$: 質量、 γ : 定数

$$T_{ij} = k \frac{O_i D_j}{(d_{ij})^2}$$

k : 定数

(2)

基本的な空間分布モデル① 重力モデル

ここで、 T_{ij} については以下の式が成り立つはずである。

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (3)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \quad (4)$$

しかし、(2)の重力モデルの式はこれを満たさない。



修正重力モデル

$$T_{ij} = \underline{A_i B_j O_i D_j} f(d_{ij}) \quad (5)$$

定数群

距離関数、ただし d_{ij} は実距離に限らない(トリップ時間、一般化費用など)

$$A_i = \left[\sum_j B_j D_j f(d_{ij}) \right]^{-1} \quad (6)$$

$$B_j = \left[\sum_i A_i O_i f(d_{ij}) \right]^{-1} \quad (7)$$

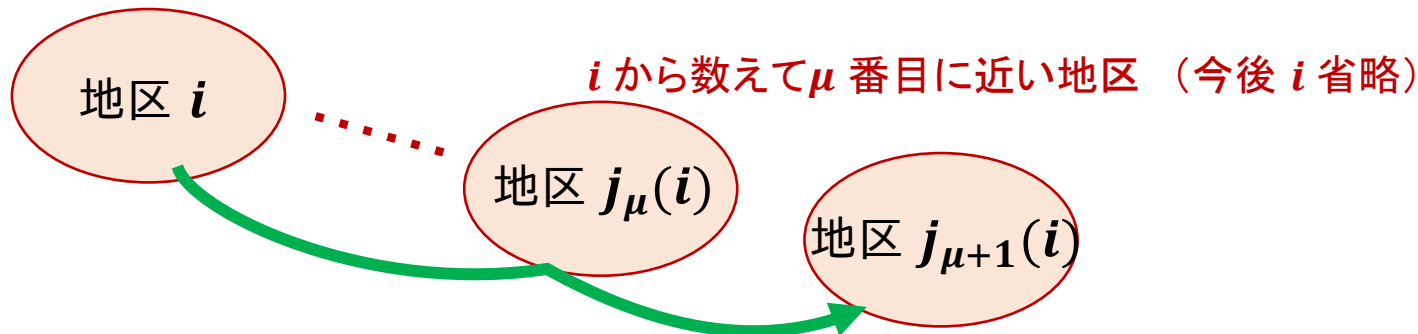
この A_i, B_j は反復計算によって求められる。

また、(5)式は確かに(3), (4) 式を満たす。

基本的な空間分布モデル② 介在機会モデル

② 介在機会モデル

トリップ数は終点地区の機会数に比例し、途中に存在する介在機会数に反比例すると仮定。



U_{ij_μ} : 旅行者が i を出発して μ 番目の地区を越す確率

一つの機会が旅行者を満足させる確率を L とすると、

常に一定と仮定

$$\underline{U_{ij_1}} = 1 - \underline{LD_{j_1}}$$

地区 j_1 を越す 地区 j_1 に一番近い地区 j_1 における機会数
地区 j_1 で満足する確率

基本的な空間分布モデル② 介在機会モデル

同様にして

$$U_{ij_1} = 1 - LD_{j_1}$$

$$U_{ij_2} = U_{ij_1}(1 - LD_{j_2})$$

$$\vdots$$

$$U_{ij_\mu} = U_{ij_{\mu-1}}(1 - LD_{j_\mu})$$

(8)

$$\frac{U_{ij_\mu} - U_{ij_{\mu-1}}}{U_{ij_{\mu-1}}} = -LD_{j_\mu}$$

(9)

A_{j_μ} を地区 j_μ までの機会総数とすると、

$$D_{j_\mu} = A_{j_\mu} - A_{j_{\mu-1}}$$

(10)

これを用いて、(9) 式を以下に変形する

$$\frac{U_{ij_\mu} - U_{ij_{\mu-1}}}{U_{ij_{\mu-1}}} = -L(A_{j_\mu} - A_{j_{\mu-1}})$$

(11)

基本的な空間分布モデル② 介在機会モデル

ここで変化の連続性を仮定し、(11)を積分すると

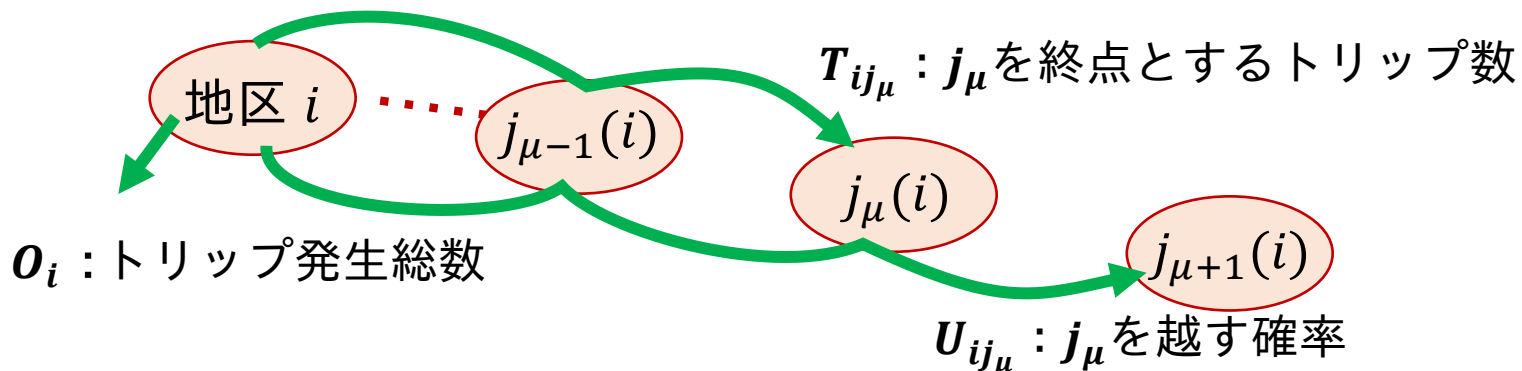
$$\frac{dU}{U} = -L dA \quad (12)$$

$$\log U = -LA + C.$$

$$U_{ij_\mu} = k_i \exp(-LA_{j_\mu}) \quad (13)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \underbrace{T_{ij_\mu}}_{j_\mu \text{ で終わる}} &= \underbrace{O_i U_{ij_{\mu-1}}}_{j_{\mu-1} \text{ を越える}} - \underbrace{O_i U_{ij_\mu}}_{j_\mu \text{ を越える}} \\ &= O_i (U_{ij_{\mu-1}} - U_{ij_\mu}) \end{aligned} \quad (14)$$



基本的な空間分布モデル② 介在機会モデル

(13), (14) 式から、介在機会モデルの通常形が得られる

$$T_{ij\mu} = k_i O_i \left[\exp(-LA_{j\mu-1}) - \exp(-LA_{j\mu}) \right] \quad (15)$$

ここで k_i は、結果として得られる T_{ij} が制約条件式(3)を満たすように定められる

$$\sum_j T_{ij} = k_i O_i [1 - \exp(-LA_{j_N})] = O_i$$

N : 地区総数

しかし、このモデルは制約条件式(4)は満たさない

なお、もし D_j が既知であれば、(6), (7) 式と同様の手順で行列 T_{ij} を調整可能

本論文で提案するモデル

一般的な議論

重力モデル：物理学の重力法則からの類推に依拠し、発見的なものに過ぎない

介在機会モデル：理論的な導き方の妥当性がある

→ 介在機会モデルのほうがより良いモデルと言われる

提案する統計理論

- ・ 統計力学（物理学の中でも重力法則と異なる分野）からの類推
- ・ 重力モデルに妥当な論理的根拠を与える
- ・ 仮定を変えれば介在機会モデルも導ける

→ 十分に一般的な法則であり、目的や状況に応じた適切な空間分布モデルを導くことができる。

本論文で提案するモデル

具体的な手法

システムを完全に特定化する 変数群 を定義し、これらの変数に関する制約式を列挙する。 $\hookrightarrow T_{ij}$ を用いる

T_{ij} の集合 $\{T_{ij}\}$ をトリップ分布と定義

重要な仮定：分布 $\{T_{ij}\}$ が実現する確率は分布 $\{T_{ij}\}$ を生じさせるシステムの状態数に比例

個人によって全体の分布 $\{T_{ij}\}$ が形成される場合の数を $w(T_{ij})$ とするならば、 $\{T_{ij}\}$ が実現する確率は $w(T_{ij})$ に比例。

$\rightarrow w(T_{ij})$ を $\{T_{ij}\}$ のもっともらしさの尺度（尤度）とみなす。

第2章 重力モデルの統計理論

一般的な重力モデルの導出

まず制約条件式は、(3),(4) 式を再掲した以下の2式に加え

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (20)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \quad (21)$$

「地域全体でトリップのために使用される総額が一定である」という仮定を示す (22) 式を設定する

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C \quad (22)$$

c_{ij} : i, j 間の流動抵抗(距離に限らない), 一般化費用

トリップ総数を T とすると、

$$T = \sum_i O_i = \sum_j D_j \quad (23)$$

一般的な重力モデルの導出

分布 $\{T_{ij}\}$ を生じさせる場合の数は

$$w(T_{ij}) = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \quad \dots\dots (\text{補足説明は別紙参照}) \quad (24)$$

起こりうる状態の総数は

$$W = \sum w(T_{ij}) \quad (\text{和の範囲は } T_{ij} \text{ が(20)-(22)を満たすところ}) \quad (25)$$

しかし、最大値を与える分布 $\{T_{ij}\}$ が他に比べて圧倒的に起こりやすい分布であるためには、 $w(T_{ij})$ の最大値は他の項の値よりずっと大きいはずである

→ よって、 $w(T_{ij})$ を最大化する T_{ij} の集合を求める
計算をしやすくするため、対数をとって考える。

一般的な重力モデルの導出

最大化問題は、

$$\max. \log w(\mathbf{T}_{ij}) \quad \text{s.t.} \quad \sum_j \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{O}_i, \quad \sum_i \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{D}_j, \quad \sum_i \sum_j \mathbf{T}_{ij} \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{C}$$

ラグランジュの未定乗数法より、

$$\begin{aligned} M = \log w(\mathbf{T}_{ij}) &+ \sum_i \lambda_i^{(1)} \left(\mathbf{O}_i - \sum_j \mathbf{T}_{ij} \right) \\ &+ \sum_j \lambda_j^{(2)} \left(\mathbf{D}_j - \sum_i \mathbf{T}_{ij} \right) + \beta \left(\mathbf{C} - \sum_i \sum_j \mathbf{T}_{ij} \mathbf{c}_{ij} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{T}_{ij}} = -\log \mathbf{T}_{ij} - \lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \beta \mathbf{c}_{ij} = \mathbf{0} \quad (30)$$

ただし、以下のスターリング近似を用いた

$$\log N! \cong N \log N - N \quad (27)$$

一般的な重力モデルの導出

したがって、

$$T_{ij} = \exp(-\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \beta c_{ij}) \quad (31)$$

これを(20), (21) 式に代入すると、

$$\exp(-\lambda_i^{(1)}) = \frac{O_i}{\sum_j \exp(-\lambda_j^{(2)} - \beta c_{ij})} \quad (32)$$

$$\exp(-\lambda_j^{(2)}) = \frac{D_j}{\sum_i \exp(-\lambda_i^{(1)} - \beta c_{ij})} \quad (33)$$

ここで、次のように A_i, B_j をおく

$$A_i = \frac{\exp(-\lambda_i^{(1)})}{O_i} \quad (34)$$

$$B_j = \frac{\exp(-\lambda_j^{(2)})}{D_j} \quad (35)$$

一般的な重力モデルの導出

すると、以下を得られ

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij}) \quad (36)$$

(32)-(35) 式を用いると

$$A_i = \left[\sum_j B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}) \right]^{-1} \quad (37)$$

$$B_j = \left[\sum_i A_i O_i \exp(-\beta c_{ij}) \right]^{-1} \quad (38)$$

となり、(5)-(7) 式で定義された（修正）重力モデルと一致する

→ この統計力学的誘導は重力モデルの新たな理論的根拠となる

（同質目的のトリップを対象とし、起点と終点の総トリップ数 O_i , D_j と地区間のトリップ費用 c_{ij} が既知であり、地域全体の交通費支出額 C が一定ならば、最も起こりやすい地区間トリップが存在し、その分布は重力モデルと一致する）

■ 重力モデル式の変数の解釈（詳細略）

重力モデルを示した以下の式

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij}) \quad (36) \text{再}$$

β : 平均トリップ距離と密接に関連

$\beta \rightarrow$ 大 で 平均トリップ距離 \rightarrow 大

A_i, B_j : 1地区の魅力が増すことで他の多くのトリップを減少させる働きのある競争項

$$T_{i1} = A_i B_1 O_i D_1 \exp(-\beta c_{i1})$$

例 : D_1 が大きく増加すると T_{i1} も同程度に増加

A_i の減少は比較的少なく、 B_j の増大も非常に僅か

ゆえ、 A_i は地区1へのトリップの増大を埋め合わせるために他の全てのTをわずかつつ減少させる

本手法における疑問点（概要）

① スターリング近似は妥当か

ダーウィン・ファウラー法という別の方法を用いると、分布関数の平均値が得られ、それはスターリング近似を用いた場合の最尤推定量と一致する

② $w(T_{ij}) = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!}$ の最大値は突出した最大値になるのか

最大値近傍での $\log w(T_{ij})$ 微小変化を調べればよい

$$d[\log w(T_{ij})] = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{dT_{ij}}{T_{ij}} \right)^2 T_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \underline{p^2} T_{ij} \quad (44)$$

各 T_{ij} の最尤分布
からの乖離度

$$= -\frac{1}{2} p^2 \sum_n S_n T_n \quad (45)$$

N : トリップ規模のグループ数
 T_n : n 番目のグループの T_{ij} の平均
 S_n : そのトリップ行列の要素

この式を用いてチェック（適合の可否判断）ができる

■ 本手法での必要な仮定

重力モデルを導く際の基本原理は極めて一般的なものであり、唯一必要な仮定は、分布が生じる確率はシステムの状態数に比例するということ

この統計理論の特徴は、比較的弱い制約式からモデルを導出できるという点にある。さまざまな状況に応じて、モデルの新規構築や改良を行うことができる。

これからいくつかのモデルを導出してみる。

重力モデルでの表現

一般的な重力モデルは(5)-(7)式で表わされる。ここでは制約式(4)を用いずに、 $B_j = 1$ としてみる。

$$T_{ij} = A_i O_i D_j f(c_{ij}) \quad (47)$$

このとき、

$$A_i = \left[\sum_j D_j f(c_{ij}) \right]^{-1} \quad (48)$$

なので、制約式(3)は成り立つ

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (49)$$

(3)再

ここで、 $D_j^* = \sum_i T_{ij}$ とすると、 $D_j^* = D_j$ とは限らない。
= 制約式(4)を満たさない

しかし、(4)の制約式は成立しないと仮定し、 D_j を吸収力の尺度、 D_j^* をモデルの結果として得られるトリップ数と定義する場合などには使うことができる。

■ 本手法による導出

最大化問題は、

$$\max. \log w(T_{ij}) \quad s. t. \sum_j T_{ij} = O_i, \sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C$$

同様に解けば、

$$T_{ij} = \exp(-\lambda_i^{(1)} - \beta c_{ij}) \quad (50)$$

$$T_{ij} = \frac{O_i \exp(-\beta c_{ij})}{\sum_k \exp(-\beta c_{ik})} \quad (51)$$

これは(47), (48) に似ているが、 D_j が欠落している。

ここで、 j へのトリップ者は交通費用 c_{ij} と引き換えに、他地区に行くと同程度以上の、 W_j の便益を受けると仮定。

例： W_j は、大規模ショッピングセンターの買い物客が享受できる規模の経済の尺度などとみなせるかもしれない

■ 本手法による導出

(51)式において、 c_{ij} を $c_{ij} - W_{ij}$ で置き換える

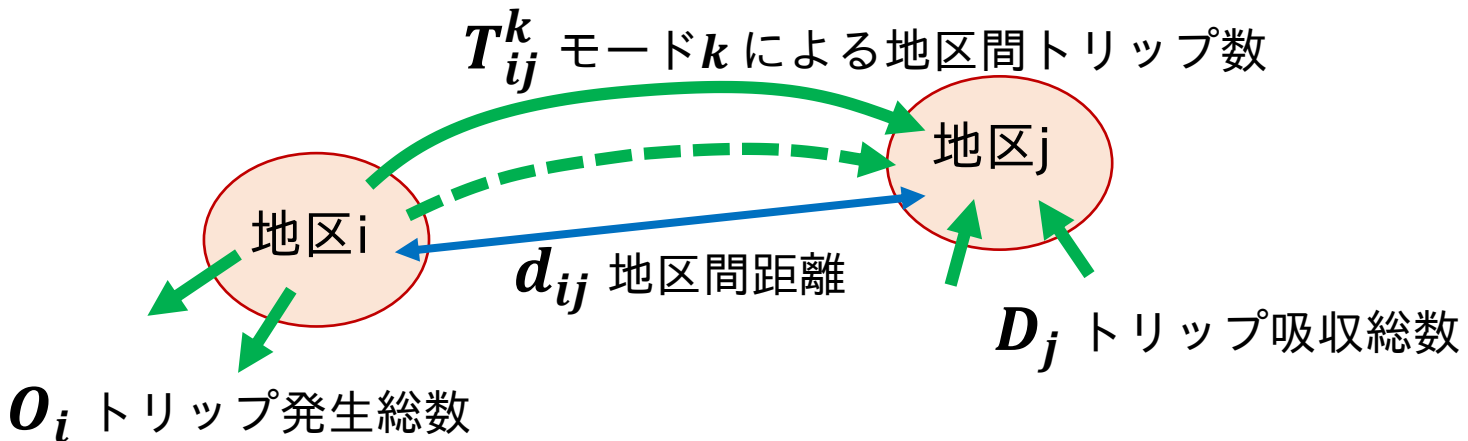
$$T_{ij} = \frac{O_i \exp(\beta W_j - \beta c_{ij})}{\sum_k \exp(\beta W_k - \beta c_{ik})} \quad (52)$$

ここで、 $\exp(\beta W_j)$ が吸収力の尺度 D_j に等しいとすれば、このモデルは重力モデルの(47)-(48) 式に帰着する

なお、このような例での D_j は地区の規模を表す変数とみなされ、規模の便益を表す指標 W_j の代理変数と考えるのが通例

状況設定と本手法による導出

i, j 間に複数の交通モードが存在する場合を考える



この場合の制約条件式は以下の3本となる。

$$\sum_i \sum_k T_{ij}^k = D_j \quad (53)$$

$$\sum_j \sum_k T_{ij}^k = O_i \quad (54)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^k c_{ij}^k = C \quad (55)$$

本手法による導出

最大化問題を定式化すると、

$$\begin{aligned} \max. \log w(T_{ij}^k) &= \log \frac{T!}{\prod_{ijk} T_{ij}^k!} \\ \text{s. t. } \sum_i \sum_k T_{ij}^k &= D_j, \sum_j \sum_k T_{ij}^k = O_i, \sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^k c_{ij}^k = C \end{aligned}$$

同様にラグランジュの未定乗数法で解くと

$$T_{ij}^k = \exp(-\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)} - \beta c_{ij}^k) \quad (56)$$

これを(53), (54) 式に代入して

$$\exp(-\lambda_j^{(2)}) = \frac{D_j}{\sum_i \sum_k \exp(-\lambda_i^{(1)} - \beta c_{ij}^k)} \quad (57)$$

$$\exp(-\lambda_i^{(1)}) = \frac{O_i}{\sum_j \sum_k \exp(-\lambda_j^{(2)} - \beta c_{ij}^k)} \quad (58)$$

本手法による導出

さらに、以下のように A_i, B_j をおく

$$A_i = \frac{\exp(-\lambda_i^{(1)})}{O_i} \quad B_j = \frac{\exp(-\lambda_j^{(2)})}{D_j}$$

すると、

$$T_{ij}^k = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (59)$$

$$A_i = \left[\sum_j \sum_k B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} = \left[\sum_j B_j D_j \sum_k \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (60)$$

$$B_j = \left[\sum_i \sum_k A_i O_i \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} = \left[\sum_i A_i O_i \sum_k \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (61)$$

以下を考慮し、(59)-(61)式がこの分布モデルの定義式となる。

$$T_{ij} = \sum_k T_{ij}^k = A_i B_j O_i D_j \sum_k \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (62)$$

■ 本手法による導出

さらに (59), (62) より、 i, j 間をモード k でトリップする割合 (モーダルスプリット) の式が得られる。

$$\frac{T_{ij}^k}{T_{ij}} = \frac{\exp(-\beta c_{ij}^k)}{\sum_k \exp(-\beta c_{ij}^k)} \quad (63)$$

また、以下の仮定をおくと、

$$\exp(-\beta c_{ij}) = \sum_k \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (64)$$

(62) 式の T_{ij} は(36) 式の通常重力モデルと一致する。

よって、各モードの流動抵抗 $\exp(-\beta c_{ij}^k)$ が既知なら、流動抵抗の合成指標 $\exp(-\beta c_{ij})$ または平均一般化費用 c_{ij} が導ける

条件を変えた場合 その1

モードごとの発生、吸収トリップ数 O_i^k, D_j^k が既知の場合
制約式は

$$\sum_i T_{ij}^k = D_j^k \quad (65)$$

$$\sum_j T_{ij}^k = O_i^k \quad (66)$$

今まで同様に最大化問題を解くと、

$$T_{ij}^k = A_i^k B_j^k O_i^k D_j^k \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (67)$$

$$A_i^k = \left[\sum_j B_j^k D_j^k \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (68)$$

$$B_j^k = \left[\sum_i A_i^k O_i^k \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (69)$$

なお、この場合の $(T_{ij}^k)/T_{ij}$ は先のような単純な比にはならない。

条件を変えた場合 その2

モードごとの発生トリップ数 O_i^k が既知（吸収は D_j のみ）の場合
制約式は

$$\sum_i \sum_k T_{ij}^k = D_j \quad (53)\text{再}$$

$$\sum_j T_{ij}^k = O_i^k \quad (66)\text{再}$$

今まで同様に最大化問題を解くと、

$$T_{ij}^k = A_i^k B_j O_i^k D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (70)$$

$$A_i^k = \left[\sum_j B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (71)$$

$$B_j = \left[\sum_i \sum_k A_i^k O_i^k \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (72)$$

となる。

以上見た3つの場合のまとめ

(67)-(69) 式のモデル

トリップ末端のモーダルスプリットが既知としている。

トリップ末端量はモード別に推定されていて、各モード別に独立に分布

(53)-(55) 式のモデル

O_i と D_j のみ既知である場合のモード選択の集計値は、相対費用 c_{ij}^k によって決定される。

モード分離手法より基本的なメカニズムを表し、各人がトリップする際にモード間比較をされると考えられる状況では、適しているといえる。

(70)-(72) 式のモデル

上記2つの中間的なものであり、やや使いづらい。ただ次の3.4のような状況ではこの構造が参考になる。

複数交通モードがあるが、利用制約がある場合

例：自動車非保有者は交通モードに自動車を選択できない
制約は以下のようにすることで定式化できる

制約は以下のようにすることで定式化できる

$$\sum_j \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} = O_i^n \quad (73)$$

起点はタイプ別に分類

$$\sum_i \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} = D_j \quad (74)$$

終点はタイプに依らない

$$\sum_i \sum_j \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} = C \quad (75)$$

n : トリップ者の階級

$\gamma(n)$: タイプ n の者が利用可能なモードの集合

複数交通モードがあるが、利用制約がある場合

最大化問題を定式化すると、

$$\begin{aligned} \max. \log w(T_{ij}^{kn}) &= \log \frac{T!}{\prod_{ijkn} T_{ij}^{kn}!} \\ \text{s.t. } \sum_i \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} &= D_j, \sum_j \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} = O_i^n, \sum_i \sum_j \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} T_{ij}^{kn} = C \end{aligned}$$

同様にラグランジュの未定乗数法で解くと

$$T_{ij}^{kn} = A_i^n B_j O_i^n D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad (81)$$

$$A_i^n = \left[\sum_j \sum_{k \in \gamma(n)} B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (82)$$

$$B_j = \left[\sum_i \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} A_i^n O_i^n \exp(-\beta c_{ij}^k) \right]^{-1} \quad (83)$$

複数交通モードがあるが、利用制約がある場合

この結果から、以下のようにトリップ総数を導出できる

$$T_{ij}^k = B_j D_j \left(\sum_n A_i^n O_i^n \right) \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad \text{.....交通モード別} \quad (84)$$

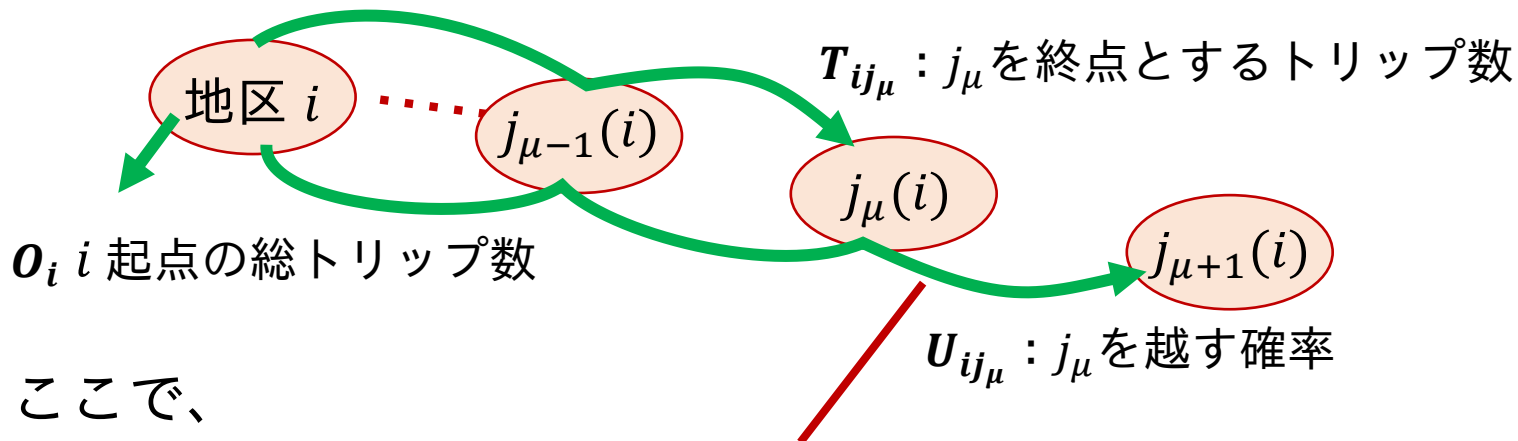
$$T_{ij}^n = A_i^n B_j O_i^n D_j \sum_{k \in \gamma(n)} \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad \text{.....利用者タイプ別} \quad (85)$$

$$T_{ij} = B_j D_j \sum_n \sum_{k \in \gamma(n)} A_i^n O_i^n \exp(-\beta c_{ij}^k) \quad \text{.....総数} \quad (86)$$

本手法による介在機会モデルの導出

(再掲) 1章で定義した変数

$$\begin{aligned} \underline{T_{ij_\mu}} &= \underline{O_i U_{ij_{\mu-1}}} - \underline{O_i U_{ij_\mu}} \\ &\text{\small } j_\mu \text{で終わる} \quad \text{\small } j_{\mu-1} \text{を越える} \quad \text{\small } j_\mu \text{を越える} \\ &= O_i (U_{ij_{\mu-1}} - U_{ij_\mu}) \end{aligned}$$



ここで、

$$S_{ij_\mu} = O_i U_{ij_\mu} \quad \dots \text{\small } j_\mu \text{を越えるトリップ数} \quad (87)$$

とすると、

$$T_{ij_\mu} = S_{ij_{\mu-1}} - S_{ij_\mu} \quad (88)$$

→ T_{ij_μ} の代わりに、 S_{ij_μ} を変数として手法を適用する

本手法による介在機会モデルの導出

まず、最大化すべき関数は、与分布 $\{s_{ij_\mu}\}$ の総状態数を S として

$$\frac{S!}{\prod_{ij_\mu} s_{ij_\mu}!}$$

続いて制約式だが、1章で見たように(4)のような吸収制約は無い
(3)のような発生制約は以下となる。

$$\frac{s_{ij_\mu}}{j_\mu \text{ を越える}} \leq \frac{o_i}{\text{発生トリップ総数}} \quad (89)$$

これを j_μ について総計して

$$\sum_{j_\mu} s_{ij_\mu} = k'_i o_i \quad (1 \leq k'_i \leq N) \quad (90)$$

全員が j_2 でとどまる
全員が j_N まで行く

本手法による介在機会モデルの導出

重力モデルの費用制約式にあたるものを考える

j_μ を越えてなお S_{ij_μ} のトリップがあるなら、そのトリップ費用はより i に近い地区へのトリップ費用より大きいはずである。

i を出発してある地区に到達したトリップ費用を、途中通過してきた機会数を用いて表すこととする。

j_μ を越えてなお続けるトリップの最小費用は $A_{j_\mu} S_{ij_\mu}$

j_μ までの機会総数 j_μ を越えるトリップ数

これを、 i, j_μ について合計して、以下の制約式を得る。

$$\sum_i \sum_{j_\mu} A_{j_\mu} S_{ij_\mu} = C \quad (91)$$

ここで、定義より

$$A_{j_\mu} = \sum_{n=1}^{\mu} D_{j_n} \quad (92)$$

$$S_{ij_\mu} = \sum_{n=\mu+1}^N T_{ij_n} \quad (93)$$

本手法による介在機会モデルの導出

(93)を(91)に代入すると、

$$\left(T_{ij_\mu} \text{の係数} \right) = (\mu - 1)D_{j_1} + (\mu - 2)D_{j_2} + \cdots + D_{j_{\mu-1}} \quad (94)$$

通過してきた機会数は通過された・介在した回数で重みづけしたトリップ行列の要素に関連する費用に寄与する。

最大化問題にまとめると

$$\max. \log \frac{S!}{\prod_{ij_\mu} S_{ij_\mu}!} \quad s. t. \sum_{j_\mu} S_{ij_\mu} = k'_i O_i, \sum_i \sum_{j_\mu} A_{j_\mu} S_{ij_\mu} = C$$

同様にラグランジュの未定乗数法で解くと

$$S_{ij_\mu} = \exp(-LA_{j_\mu} - \lambda_i^{(1)}) \quad (95)$$

$L, \lambda_i^{(1)}$ はラグランジュ乗数

■ 本手法による介在機会モデルの導出

(95)を(90)に代入すると、

$$\exp(-\lambda_i^{(1)}) = \frac{k_i' \mathbf{O}_i}{\sum_{j_\mu} \exp(-LA_{j_\mu})} \quad (96)$$

ここで、

$$k_i = \frac{k_i'}{\sum_{j_\mu} \exp(-LA_{j_\mu})} \quad (97)$$

とおくと、

$$S_{ij_\mu} = k_i \mathbf{O}_i \exp(-LA_{j_\mu}) \quad (98)$$

となる。さらに(88)式を用いると、

$$T_{ij_\mu} = k_i \mathbf{O}_i \left[\exp(-LA_{j_{\mu-1}}) - \exp(-LA_{j_\mu}) \right] \quad (99)$$

→これは(15)式と一致する。介在機会モデルを導出できた

■ 本手法による介在機会モデルの導出

ただし、この誘導では(92)のようなやや変わった費用制約式や(94)で示唆されているような i, j 間の移動コストの想定を犠牲にしている（用いていない）

→ゆえ、介在機会モデルよりも重力モデルのほうが好まれるという論拠であろう（と主張している）

重力モデルと介在機会モデルの要素を複合してみる

費用の尺度として介在機会数を用いるが、(94)のような重みづけをしない場合

ここでは、トリップ費用を機会数そのものと仮定する

$$c_{ij} = A_{j\mu(i)} \quad (100)$$

(36)-(38) の一般的な重力モデル

(47)-(48) の単一競争項のモデル

それぞれに、(100)を代入してみると、

重力モデルと介在機会モデルの要素を複合してみる

(36)-(38) の一般的な重力モデル

$$T_{ij\mu} = a_i b_{j\mu} O_i D_{j\mu} \exp(-\beta A_{j\mu(i)}) \quad (101)$$

$$a_i = \left[\sum_{j\mu} b_{j\mu} D_{j\mu} \exp(-\beta A_{j\mu(i)}) \right]^{-1} \quad (102)$$

$$b_{A_{j\mu(i)}} = \left[\sum_i a_i O_i \exp(-\beta A_{j\mu(i)}) \right]^{-1} \quad (103)$$

(47)-(48) の単一競争項のモデル

$$T_{ij\mu} = a_i O_i D_{j\mu} \exp(-\beta A_{j\mu(i)}) \quad (104)$$

$$a_i = \left[\sum_{j\mu} D_{j\mu} \exp(-\beta A_{j\mu(i)}) \right]^{-1} \quad (105)$$

重力モデルと介在機会モデルの要素を複合してみる

となる。もし、費用を表すのに、(94)のような重み付けをしたものより、(100)のような単純なものの方が望ましければ、通常の介在機会モデルよりも適したモデルになるといえる

(ただしそれには両モデルの具体検証が必要である)

本論分で得られた知見

空間分布モデルの新しい統計理論を示した

それは、広範囲にわたる様々な状況に対応できるような柔軟性のある手法である。

また、重力モデルと介在機会モデルの基本形を導き、さらに制約条件を変えるなどして、拡張することができた。

※なお、この論文はいわゆる「Wilsonのエントロピーモデル」の基礎となるものである（ただし本論文中にエントロピーという語は出てこない）。

詳細は同著「Entropy in Urban and Regional Modelling」(1970)

主論文以外の参考文献

A.G.ウィルソン著, 田淵隆俊訳：空間分布モデルの統計理論, 都市解析論文選集, 古今書院, pp. 170-194, 1987

(主論文の邦訳、ただし一部誤記あり)

野上道男・杉浦芳夫：パソコンによる数理地理学演習, 古今書院, pp. 162-167, 1986

(エントロピーモデルの説明)