ON THE INTERNAL STRUCTURE OF CITIES

Robert E. Lucas, Jr. , Esteban Rossi-Hansberg

Econometrica, Vol.70, No.4, pp.1445-1476, 2002.

2017/9/15-16 理論合宿

山本正太郎

0. Contents

1. Introduction

■Keyword

生産の外部性
(Production externality)
生産者は，他の生産者が近傍に存在することによる恩恵を受ける．

生産の外部性によって，都市は離散することなく凝結している．

1. Introduction

■主な既往研究

Lucas(2001) , Mills(1967)など

いずれも，都市内部におけるBusiness area（企業用地） と Residential area（居住用地）の位置を所与のものとして与えている.

Fujita and Ogawa(1982)

生産の外部性を考慮した上で企業と労働者間の土地獲得競争を記述.

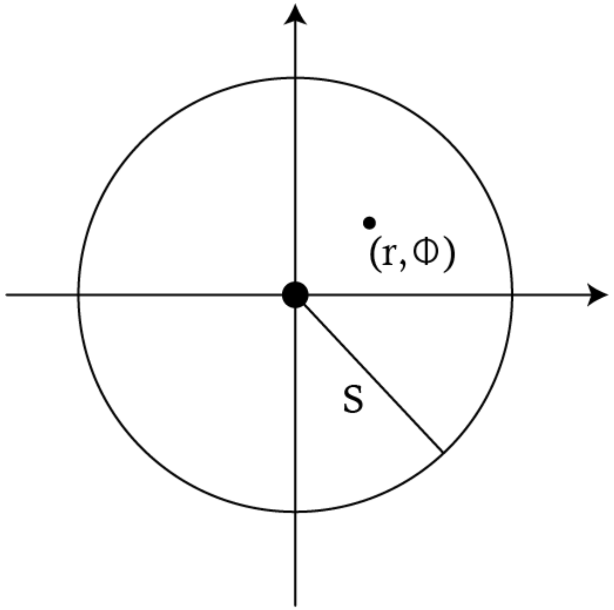
■本研究の方向性

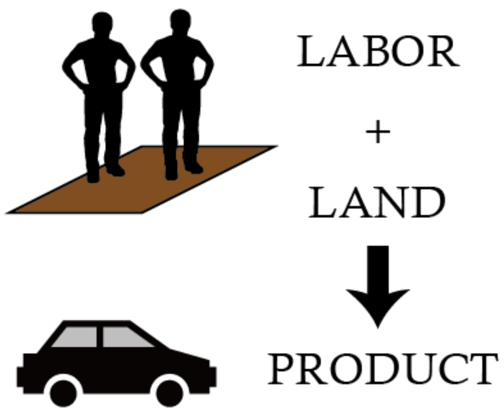
藤田論文の考え方を踏襲しつつ，居住地の人口密度など，いくつかの仮定を廃してなお均衡状態が存在することを確認し，数値実験によって通勤費用等のパラメータが都市内部の構造に与える影響を明らかにする.

2. The Model

■モデル構築の為の仮定

1. 半径Sの円形都市を仮定する.
2. 生産される商品は１つ.
3. 商品生産は土地と労働力を必要とする.
4. 都市内の土地は全て不在地主(absentee landlord)によって所有されているが，不在地主はモデルに一切関与しない.
5. 労働力はreservation utility $\bar{u}$を確保する範囲で，弾力的に供給される.
6. 労働者は商品と居住する土地の消費割合について選好を持つ.

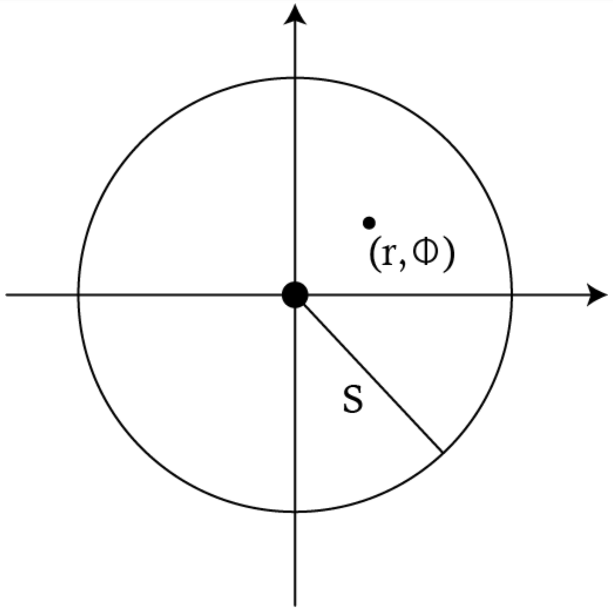




2. The Model

■文字の設定

今回はsymmetryな均衡のみを考えるので，座標ϕについては考慮しない．



Location rについて，文字を以下のように設定

- $\theta(r)$: 生産に投入される土地の割合
- $1-\theta(r)$: 居住に利用される土地の割合
- $n(r)$: 雇用密度（土地1単位あたりの雇用数）
- $N(r)$: 居住密度（土地1単位あたりの居住数）
- $l(r)$: 1人の労働者が占有する土地の単位数

Location rにおける総雇用は
$2\pi r\theta(r)n(r)$

$N(r)$と$l(r)$について，
$N(r)l(r)=1$

2. The Model

■生産関数の設定

以下の３つの要素を考慮する.

1) 生産に投入された**土地**, **労働力**と**技術水準**
2) 他の地域から受ける**外部効果**
3) 通勤行動に伴う**労働時間の損失**

1) について, Location rにおいて生産に投入される土地と労働力の総量はそれぞれ

$$2\pi r\theta(r), 2\pi r\theta(r)n(r)$$

土地1単位から生み出される商品生産$x(r)$を,

$$x(r) = g\big(z(r)\big)f\big(n(r)\big)$$

雇用密度

と設定する.

ここで, 関数gとfについてはCobb-Douglas 型を仮定して

$$g(z) = Z^{\gamma}$$

$$f(n) = An^{\alpha}$$

と設定する.

2. The Model

■生産関数の設定（続き）

2) 他の地域から受ける**外部効果**について

$location(r,0)$における生産活動が(s,ϕ)地点における雇用からうける外部効果について，**外部効果は2点間の距離に関して，パラメータδに応じて指数関数的に減少する**と仮定し，

$z(r)$を

$$z(r) = \delta \int_0^S \int_0^{2\pi} s\theta(s,\phi)n(s,\phi)e^{-\delta x(r,s,\phi)}d\phi ds$$

$$where, x(r,s,\phi) = [r^2 - 2\cos(\phi)\, rs + s^2]^{1/2}$$

と設定する．

2. The Model

■生産関数の設定（続き）

2) 他の地域から受ける**外部効果**について

今回はsymmetryな均衡を仮定しているので，以下のように書き直すことができる．

$$z(r) = \int_0^S \boxed{\psi(r,s)}\, s\, \boxed{\theta(s)n(s)} ds \quad where, \quad \boxed{\psi(r,s) = \delta \int_0^{2\pi} e^{-\delta x(r,s,\phi)} d\phi}$$

Location sにおける総雇用　　距離による減衰効果

3) 通勤行動に伴う**労働時間の損失**について

$location\ s$に居住し，$location\ r$ で労働する労働者は，$e^{-\kappa|r-s|}$時間しか$location\ r$ に労働時間を「輸送できない」と考える．

2. The Model

■労働者の選好について

労働者は商品cと居住地lの購入について選好を持ち，
その効用関数UはCobb-Douglas 型：$U(c,l)=c^{\beta}l^{1-\beta}$

また，全ての労働者はreservation utility（留保効用）を享受しなければならないので，すべての$location\ r$ について，$U(c(r),l(r))=\bar{u}$

以上の仮定のもとで，$r\in[0,S]$について，関数(z,θ,n,N,c,l)の組を見つけていく.

2. The Model

■人口収容に関する制限

都市のどこかで，全ての労働者が居住地を獲得し，人口が収容されなければならない.

$location\ r$ において**居住地を獲得していない労働者のストック**を$H(r)$とおく.

$$y(r) = 2\pi r[\theta(r)n(r) - \big(1 - \theta(r)\big)N(r)]$$

と設定すると，$y(r)$は$location\ r$ における雇用人数の居住人数に対する超過を表す.

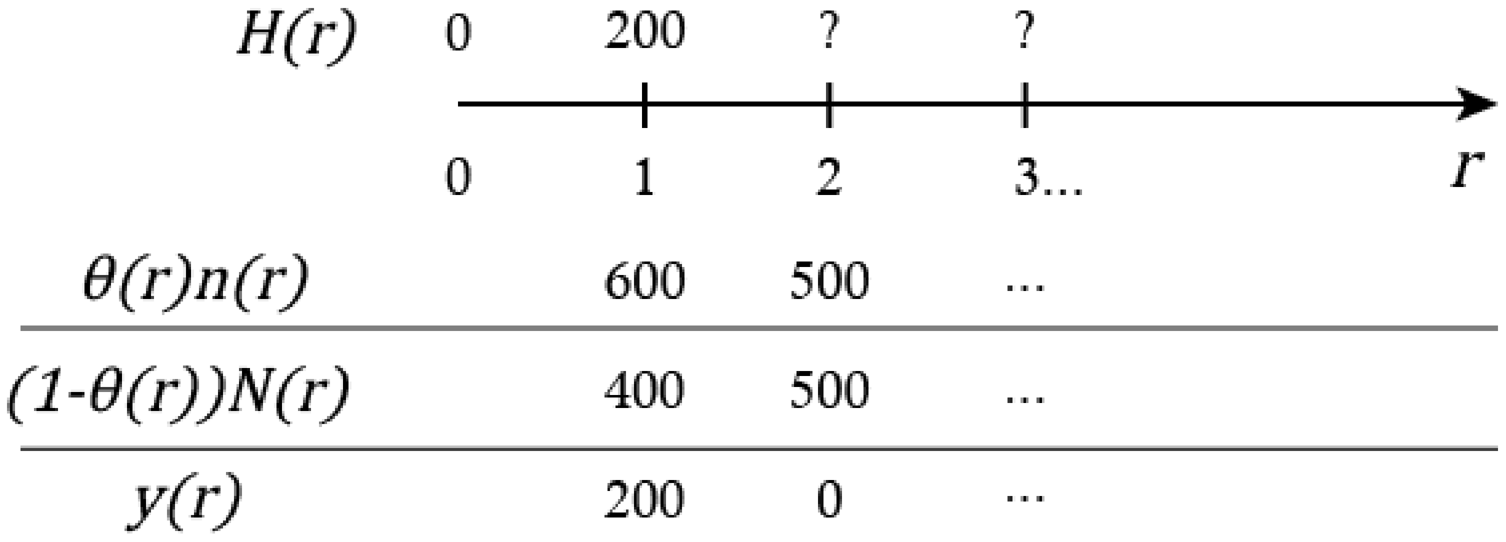
したがって，$y(r)$が正ならば$H(r)$は増加し，負ならば$H(r)$は減少する.

2. The Model

■人口収容に関する制限（続き）

但し，$H(r)$に影響するのは$location\ r$ における$y(r)$だけではない.

簡単のため，直線都市で離散的に考えてみると



$H(0) = 0$ として考える.

$y(1) = 200$で,

$H(1) = 200$であるが,

$y(2) = 0$のとき,

$H(2) = 200$ とはならず,

$H(2) > 200$である.

2. The Model

■人口収容に関する制限（続き）

Q.なぜ$H(2) > 200$なのか？

→**通勤行動に伴う労働時間の損失**があるため，$r(1)$で200人分の労働力が外部から必要な場合，200人より多くの労働者が$location\ 1$に通勤してこなければならない.

したがって，関数$H(r)$は労働時間の損失度合を表すパラメータκを使って，

$$\frac{dH(r)}{dr} = y(r) + \kappa H(r) \quad if\ H(r) > 0$$

となる連続な関数であり，$H(S) \leq 0$でなければならない.

2. The Model

■賃金についての仮定

関数$w(r)$を設定する． $w(r)$は$location\ r$ の土地利用に応じて異なる意味を持つ.

1)　rが純粋な企業用地の場合： $w(r) = location\ r$ において**企業が支払う賃金**

$location\ r$ で雇用されている住民が$location\ s$から通勤する場合，労働時間の損失の観点から以下が成り立つ.

$$w(s) = e^{-\kappa|r-s|}w(r)$$

2)　rが純粋な居住用地の場合： $w(r) = location\ r$ における**労働者の所得**

1)の場合とは逆に,

$$w(s) = e^{\kappa|r-s|}w(r)$$

3)　rがmixed-useの場合： $w(r) = location\ r$ における賃金と所得双方を表す.

2. The Model

■企業の利潤最大化行動と付け値地代

企業の利潤を$q(r)$とすると，企業の利潤最大化行動は

$$q(r) = \max_{n}\{g\big(z(r)\big)f(n) - w(r)n\}$$

と書けて，雇用密度nに関する最大化行動となる.

一階条件を解いて得られる最適なnと$q(r)$をそれぞれ

$$n = \hat{n}(w,z), \qquad q = \hat{q}(w,z)$$

とすると，$q = \hat{q}(w,z)$は所与の(w,z)のもとでの**企業の付け値地代**となる.

Cobb-Douglas型関数の想定のもとで実際に最大化問題を解くと,

$$\hat{n}(w,z) = \left(\frac{\alpha A z^{\gamma}}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad \hat{q}(w,z) = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} z^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}$$

2. The Model

■労働者の消費最小化行動

rに居住する労働者は所得$w(r)$を商品購入cと居住地購入lに割り当てる.

商品1単位あたりの価格を1，居住地1単位あたりの価格を$Q(r)$とすると，労働者の消費最小化行動は以下のように書ける.

$$w(r) = \min_{c,l}[c + Q(r)l]\ , \qquad subject\ to\ U(c,l) \geq \bar{u}$$

$\bar{u}$を固定すると， $w(r)$を最小化する$\tilde{c}$と$\tilde{l}$はQに依存するから,

$$w = \tilde{c}(\mathrm{Q}) + Q\tilde{l}(\mathrm{Q})$$

これをQについて解いてその解を$\hat{Q}(w)$とおくと， $\tilde{c}(\mathrm{Q}), \tilde{l}(Q)$はそれぞれ$\hat{c}(w) = \tilde{c}(\mathrm{Q(w)})$,

$\hat{l}(w) = \tilde{l}(\mathrm{Q(w)})$と表すことができるから，Cobb-Douglas型の想定のもとで最小化問題を解くと,

$$\hat{N}(w) = \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,\bar{u}^{-\frac{1}{1-\beta}}\,w^{\frac{\beta}{1-\beta}} \quad \because \hat{N}(w) \equiv 1/\,\hat{l}(w)$$

$$\hat{Q}(w) = \beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,(1-\beta)(\frac{w}{\bar{u}})^{\frac{1}{1-\beta}}$$

2. The Model

■その他の条件

土地は最も価値を生む用途に付されるから，以下は自明.

$$\theta(r) > 0 \text{ ならば} q(r) \geq Q(r) \qquad \theta(r) < 1 \text{ ならば} q(r) \leq Q(r)$$

また労働力の移動可能性は，次の形で$w(r)$を制約する．(wage arbitrage condition)

$$e^{-\kappa|r-s|}w(s) \leq w(r) \leq e^{\kappa|r-s|}w(s) \quad for\ all\ s \in [0, S]$$

この制約式は，「どの労働者も，就業地を変更することによって現在の所得を上回る所得を得ることはできない」ということを表現している.

2. The Model

■均衡の定義

以上の条件設定をもとに均衡を定義する.

均衡の定義：区間[0,S]において，区分的に連続な(piecewise continuous)関数θ, yと連続な関数の組(z, n, N, w, q, Q, H)が全てのrについて以下７つの条件を満たす.

1) $w(r)$について，　$e^{-\kappa|r-s|}w(s) \le w(r) \le e^{\kappa|r-s|}w(s) \quad for\ all\ s \in [0, S]$

2) $n(r)$と$q(r)$について，　$n(r) = \hat{n}\big(w(r), z(r)\big),\ q(r) = \hat{q}(w(r), z(r))$

3) $N(r)$と$Q(r)$について，　$N(r) = \hat{N}(w(r)),\ Q(r) = \hat{Q}(w(r))$

4) $\theta(r), q(r), Q(r)$について，$0 \le \theta(r) \le 1,\ \theta(r) > 0$ ならば$q(r) \ge Q(r),\ \theta(r) < 1$ ならば$q(r) \le Q(r)$

5) $y(r), n(r), N(r), \theta(r), H(r)$について，$H(0) = 0,\ y(r) = 2\pi r[\theta(r)n(r) - \big(1 - \theta(r)\big)N(r)],$

$$\frac{dH(r)}{dr} = y(r) + \kappa H(r) \quad if\ H(r) > 0, \qquad \frac{dH(r)}{dr} = y(r) - \kappa H(r) \quad if\ H(r) < 0$$

6) $H(S) = 0$

7) z, θ, nについて，　$z(r) = \int_0^S \psi(r, s)\, s\, \theta(s) n(s) ds$

3. Equilibrium with productivity fixed

■ 3 章以降の論文構成

Step1

区間$[0, S]$において，連続な生産関数zと賃金の初期値$\omega > 0$を与え，均衡条件 1)〜5)を満たすような関数の組$(n, N, w, q, Q, \theta, y, H)$を見つける．

まずは，所与の生産関数zのもとでの均衡を構築する．

賃金の初期値ωを都市の最遠部における労働者ストック$H(S; \omega, z)$に写す対応(correspondence) $\varphi(\cdot\,; z)$を設定する．

3. Equilibrium with productivity fixed

■ 3 章以降の論文構成

Step2

区間$[0,S]$において，所与の連続な生産関数zのもとで$0 \in \varphi(\omega^* ; z)$となる$\omega^*$と，$H(S;\omega^*, z) = 0$を満たす関数の組$(n, N, w, q, Q, \theta, y, H)$が存在することを示す．

Step2を立証すれば，均衡条件 1)〜6)を満たす値の組み合わせが存在することを示せる．

Step3

$z(r) = \int_0^S \psi(r,s)\, s\, \theta(s) n(s) ds$ について，その写像TがSchauderの不動点定理の仮定を満たしていることを示す．

Step3 が立証されれば，全ての均衡条件を満たしていることが証明される・

3. Equilibrium with productivity fixed

■Step1（曲線$w_m(r)$の導入）

企業・居住双方の付け値地代が等しくなる賃金$w_m(r)$を考える． w_mは$\hat{q}\big(w_m, z(r)\big) = \hat{Q}(w_m)$を満たすから

$$w_m(r) = Kz(r)^{\gamma(1-\beta)/(1-\alpha\beta)}$$

但し，Kは生産関数の切片Aとその他のパラメータに依存し， $w_m(r)$は$location\ r$における生産関数$z(r)$を通じてrの影響を受ける．

関数$w_m(r)$をプロットすると右図によようになる．

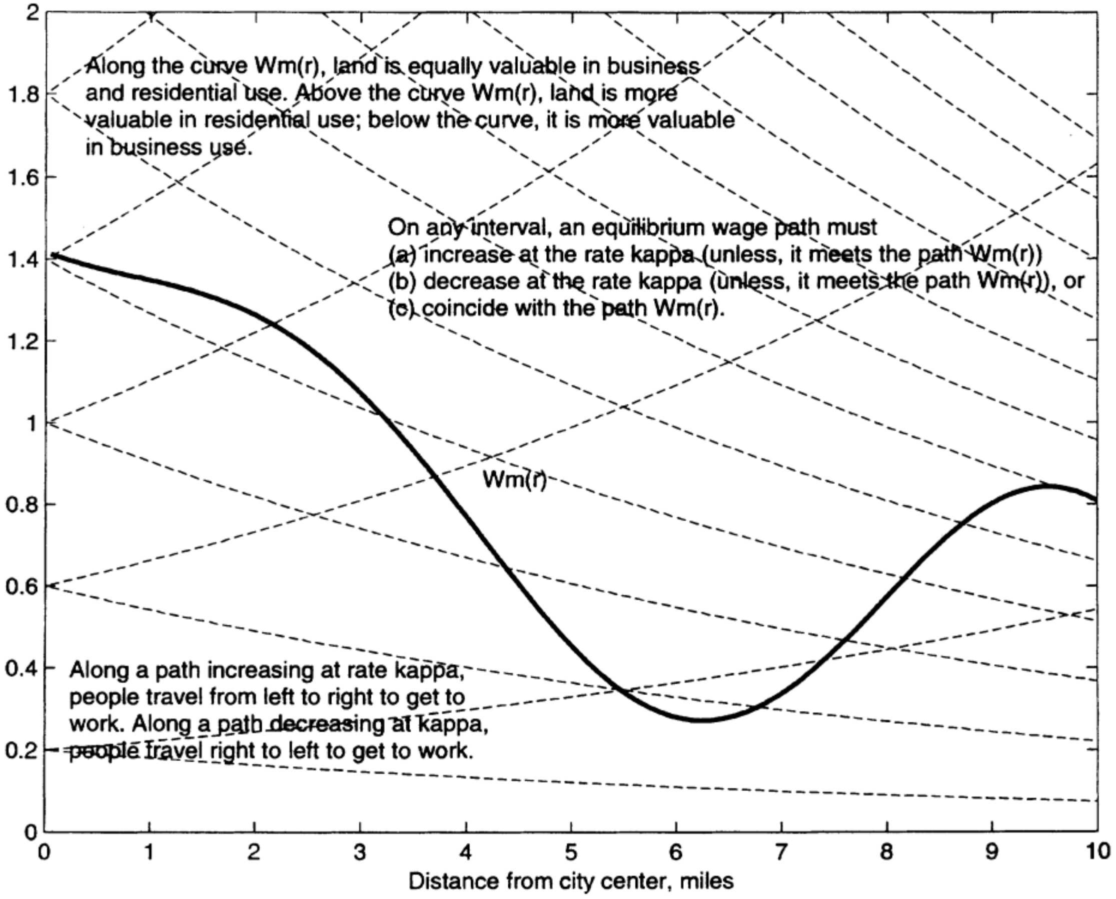


FIGURE 2.—Equilibrium wage determination.

3. Equilibrium with productivity fixed

■Step1 （曲線$w_m(r)$の意味）

1) $w(r) > w_m(r)$の場合

$$\hat{q}(w_m, z(r)) < \hat{Q}(w_m)$$

なので，$location\ r$の土地利用は居住専用となる．$(= y(r) < 0)$

2) $w(r) < w_m(r)$の場合

$$\hat{q}(w_m, z(r)) > \hat{Q}(w_m)$$

なので，$location\ r$の土地利用は企業専用となる．$(= y(r) > 0)$

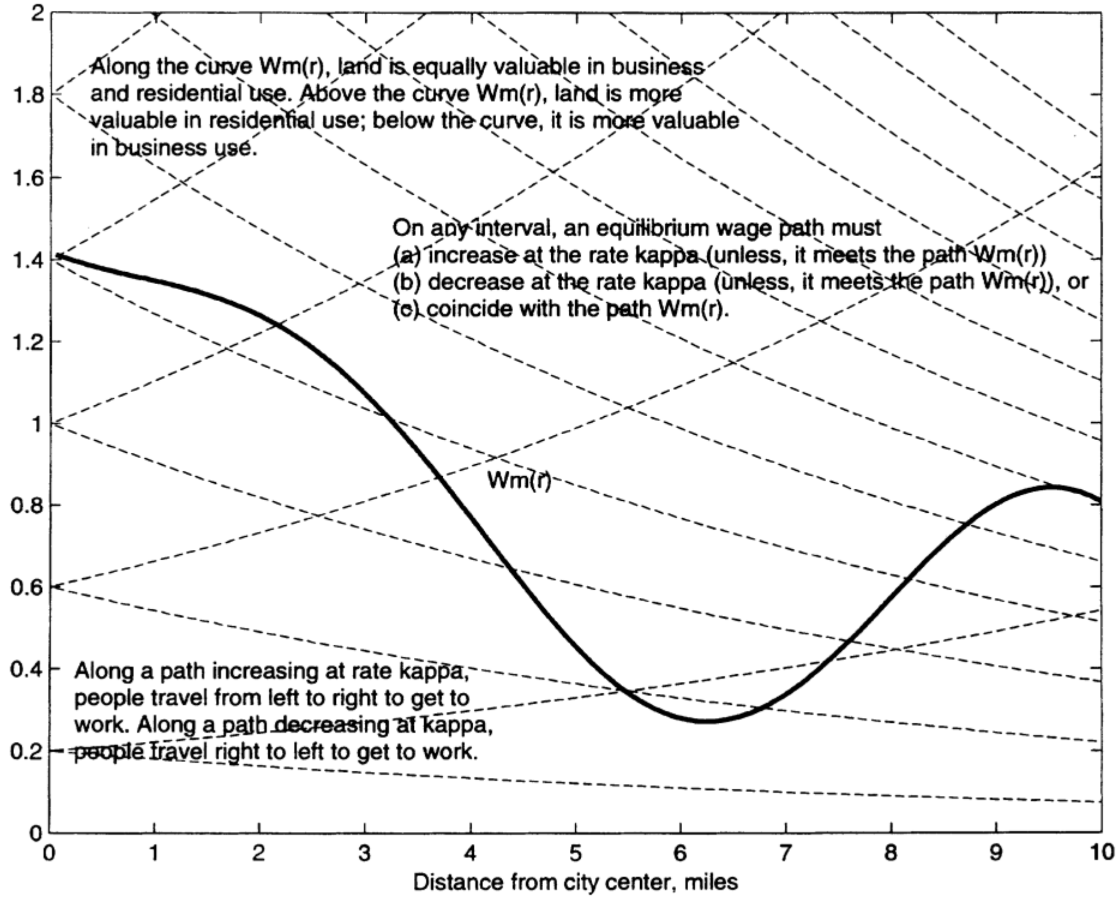


FIGURE 2.—Equilibrium wage determination.

3. Equilibrium with productivity fixed

■Step1（他の賃金曲線）

$H(r) > 0$である区間(r_1, r_2)を考える．
区間内にある$location\ r$について

wage arbitrage conditionから

$$w(r) = w(r_1)e^{-\kappa(r-r_1)}$$

同様に，$H(r) < 0$ならば

$$w(r) = w(r_1)e^{\kappa(r-r_1)}$$

したがって，$H(r) \neq 0$である限り，

賃金$w(r)$は右図の点線のようにrについて単調増加／単調減少となる．

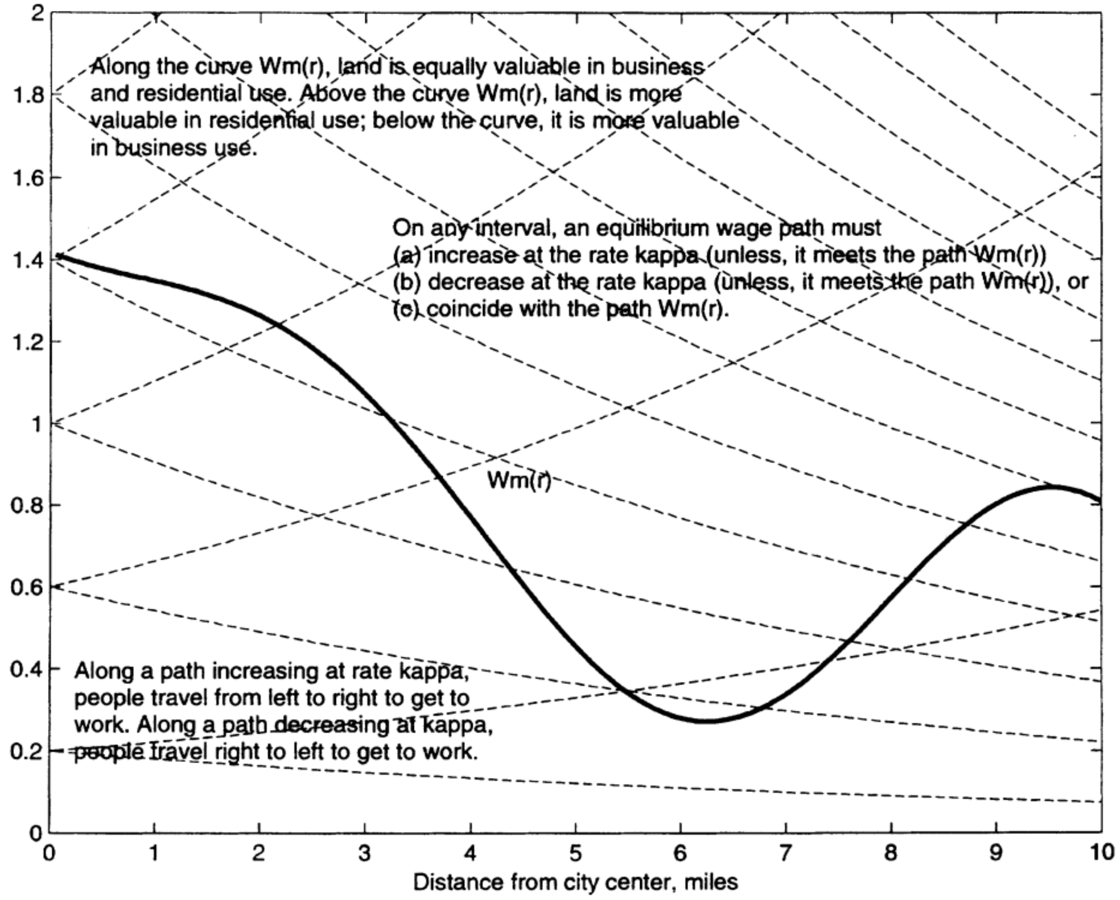


FIGURE 2.—Equilibrium wage determination.

3. Equilibrium with productivity fixed

■Shooting Algorithm

→初期値ωから$w(r)$を一意に決める

1) $w_o = \omega$を決める

2) $\omega \leq w_m(r)$なら単調減少$Ke^{-\kappa r}$,

$\omega \geq w_m(r)$なら単調増加$Ke^{\kappa r}$のグラフを$(0, \omega)$から描く.

3) $H(r) = 0$になったら，指数の正負を入れ替える.

4) $H(S, w_o) = 0$になったところで終了

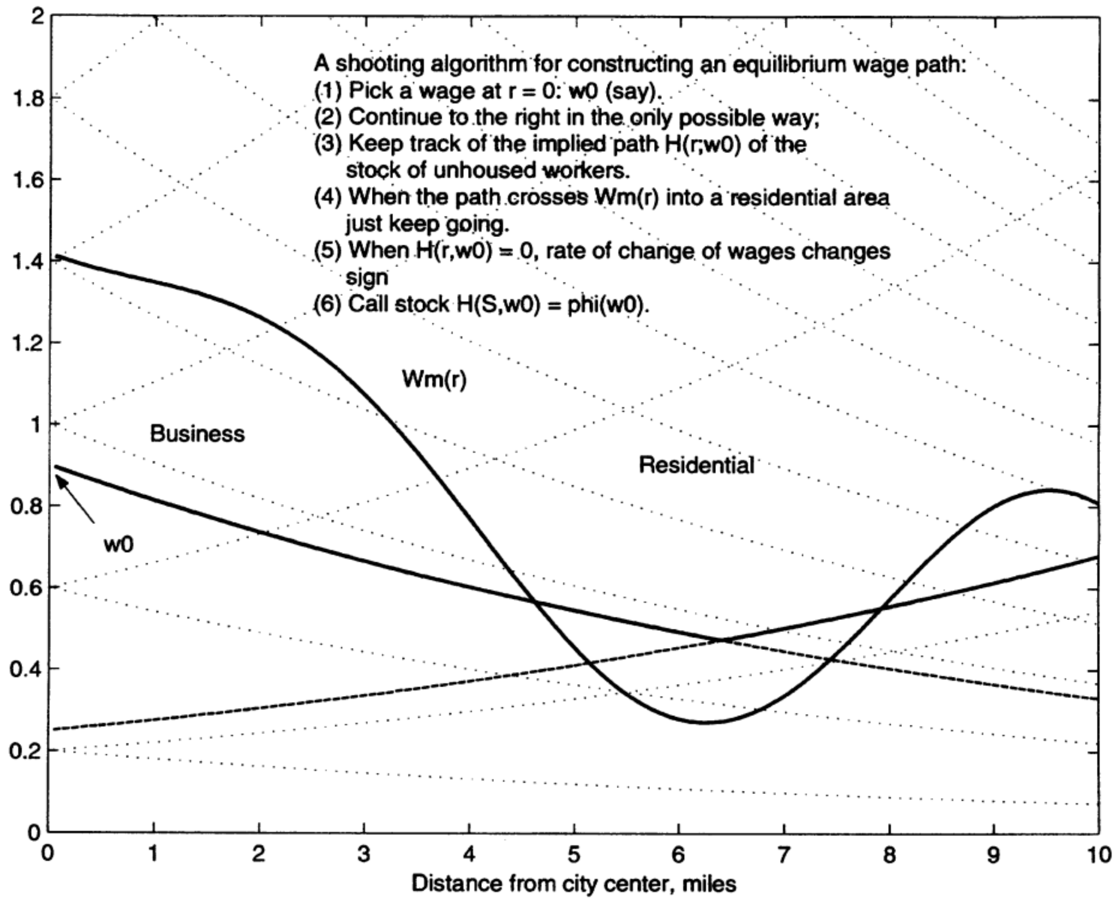


FIGURE 3.—Equilibrium wage determination.

3. Equilibrium with productivity fixed

■ここまでのまとめ

＞生産関数$z(r)$とパラメータを与える

＞与えられた$z(r)$とパラメータのもとで**曲線**$\boldsymbol{w_m(r)}$を描く

＞**Shooting algorithm**で$H(S,\omega) = 0$となるωを探す

＞そのωのもとで，$w(r)$を確定する

＞$w(r)$が確定すれば，関数(n, N, q, Q)の値も一意に決まる.

3. Equilibrium with productivity fixed

■ここまでの証明

命題：「どのような連続な関数zを与えても，均衡条件1)~6)を満たす関数の組(n, N, w, q, Q, H)が存在し，その組み合わせは$w(r)$によって一意に決まる．」

→$0 \in \varphi(\omega^*)$となる唯一のω^*が存在することを証明すれば良い．

証明

ωをHに写す対応φは，ωが十分に0に近ければ$\varphi(\omega) > 0$を満たし，同様にωが十分に大きければ$\varphi(\omega) < 0$である．対応 φ: $R_{++} \rightarrow R$は**単調減少で，上半連続かつ凸な関数**である．従って$0 \in \varphi(\omega^*)$となる唯一のω^*が必ず存在する．

（従ってω^*から都市の極限で労働者のストックが0になる賃金曲線が必ず一本引けて，それに応じて自動的に(n, N, w, q, Q, H)が決定される．）

3. Equilibrium with productivity fixed

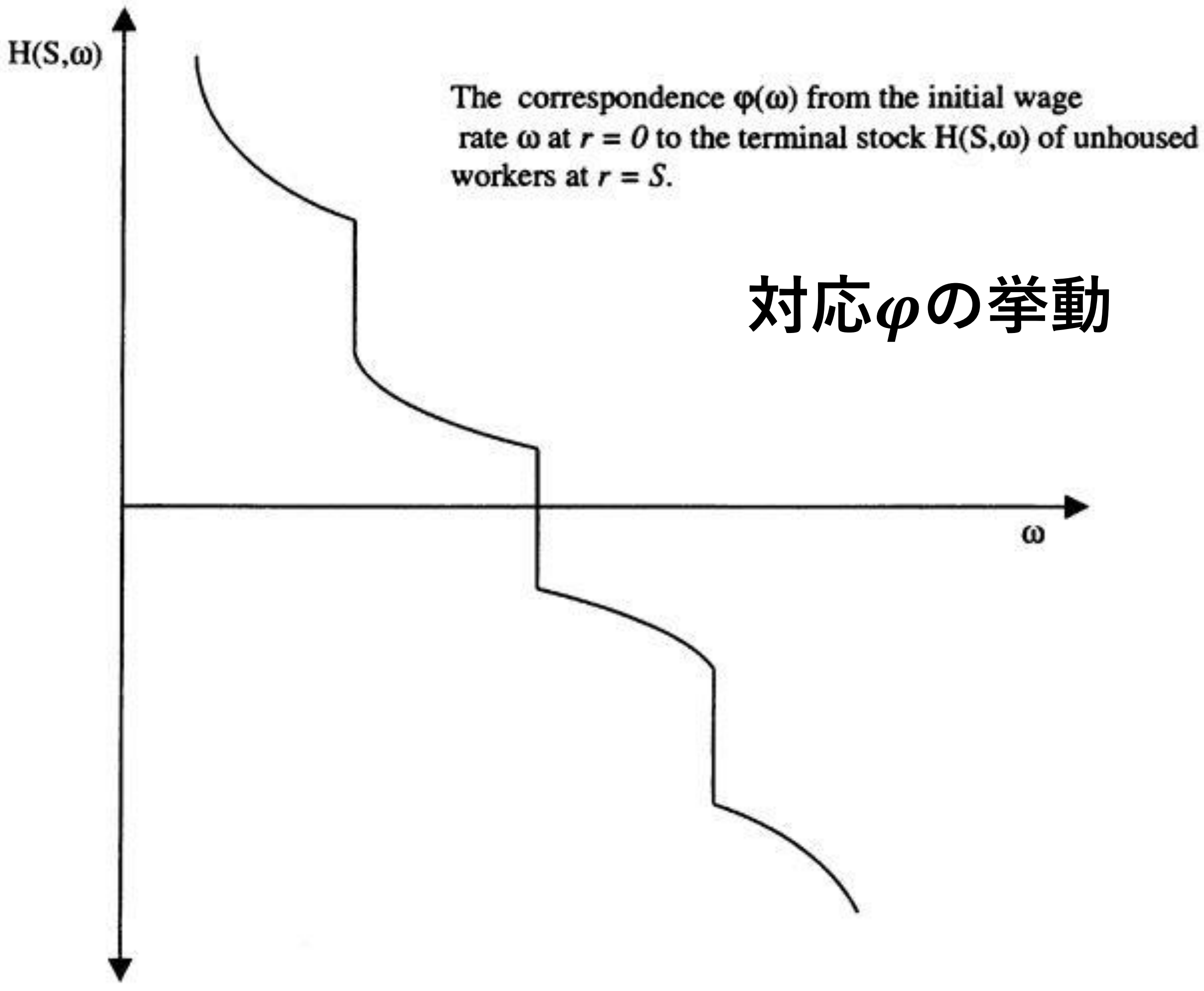


FIGURE 5.

対応φの挙動

ても，均衡条件1)〜6)を満た
の組み合わせは$w(r)$

ことを証明すれば良い．

$\varphi(\omega) > 0$を満たし，同様にωが十
$\to R$は**単調減少で，上半連続かつ**
のω^*が必ず存在する．
る賃金曲線が必ず一本引けて，それに

3. Equilibrium with productivity fixed

■数値実験 1

パラメータ設定

$\kappa = 0.005, \delta = 5, \gamma = 0.04, A = u = 1, \alpha = 0.95, \beta = 0.9, S = 10$

zについて$r = 0$から$r = S$に向けて**線形に減少する関数を仮定**し，$y(r)$と$H(r)$をプロット．

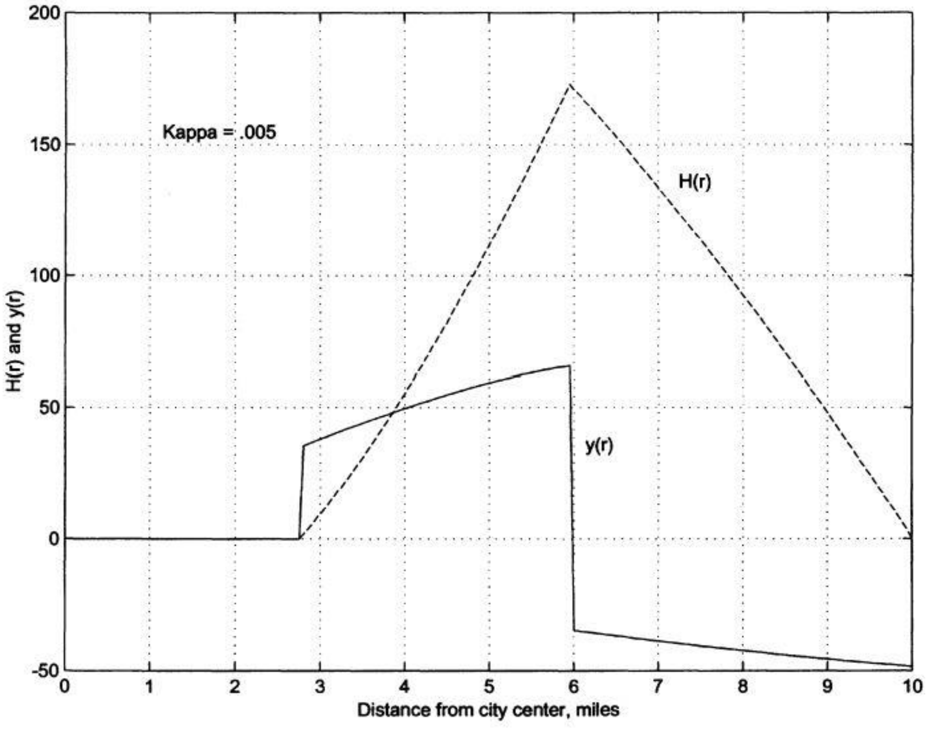


FIGURE 6.—Linear productivity example.

$r \in [0,2.7]$: mixed area

$r \in [2.7,6]$: business area

$r \in [6,10]$: residential area

3. Equilibrium with productivity fixed

■数値実験 2

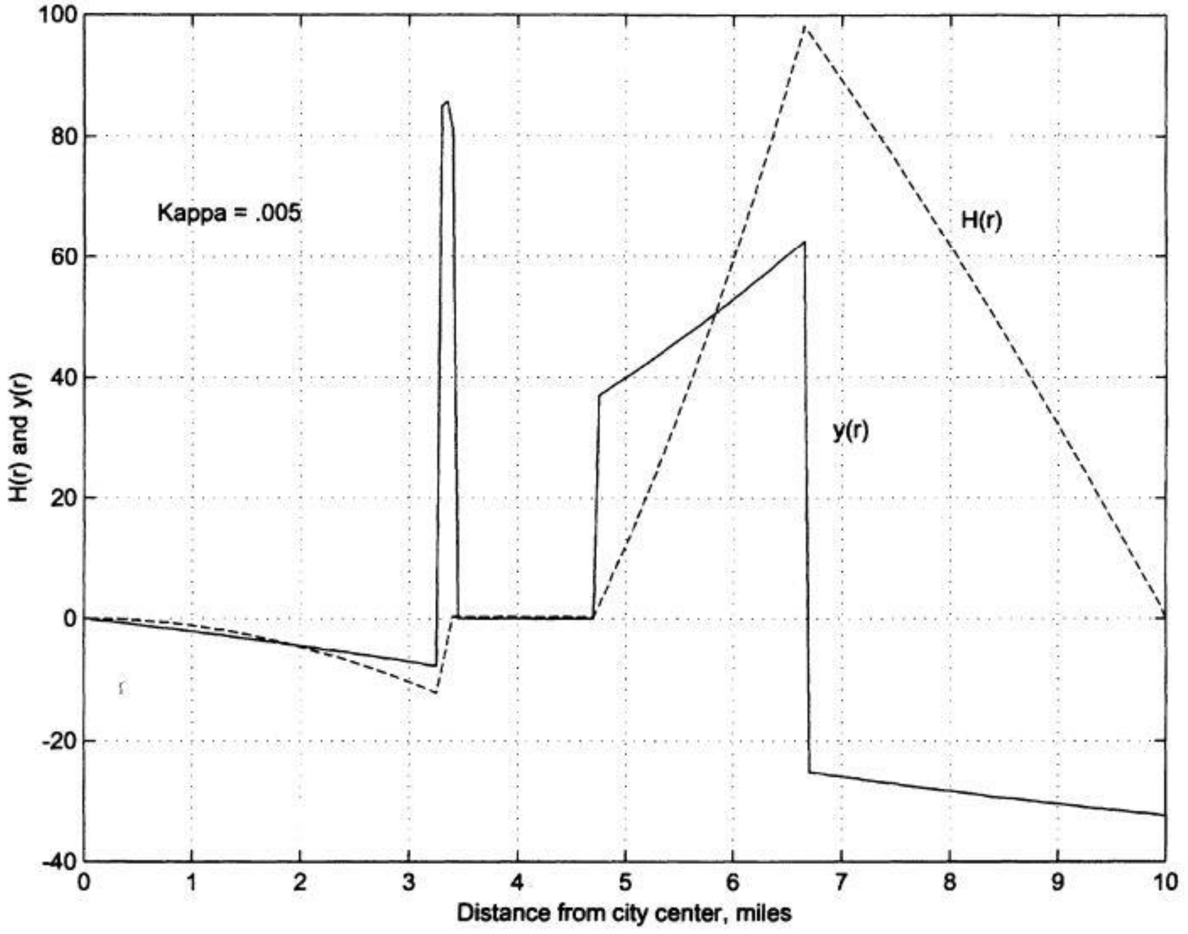


FIGURE 7.—Step function productivity example.

$$z(r) = \begin{cases} 0 \ \ \text{if}\, r \in \left[0, \dfrac{10}{3}\right) \cup \left(\dfrac{20}{3}, 10\right] \\ 1 \ \ \text{if}\, r \in [\dfrac{10}{3}, \dfrac{20}{3}] \end{cases}$$

4. Existence of equilibrium

■外部性の導入

第３章では，区間$[0, S]$において，所与のzのもとで，どんな連続で非負な関数zに対しても，均衡条件1)～6)を満たす均衡が存在することを明らかにした.

第４章では，生産関数zに外部効果を導入する.

$$z(r) = \int_0^S \psi(r, s)\, s\, \theta(s) n(s) ds \quad where,\ \ \psi(r, s) = \delta \int_0^{2\pi} e^{-\delta x(r, s, \phi)} d\phi$$

その上で，zに関する不動点問題を解く.

4. Existence of equilibrium

■不動点問題

作用素Tが以下のように定義されるとき，

$$(Tz)(r) = \int_0^S \psi(r,s)\theta(s;z)n(s;z)sds$$

$z(r)$を求めることは，以下の不動点問題に帰着する．

$$Tz = z$$

したがって，ある初期値z_0から，

$$T^{n+1}z_0 = T(T^n z_0) \quad (n = 0,1,2 \dots)$$

を収束するまで繰り返し計算すればよい．

4. Existence of equilibrium

■作用素Tの収束

右図のように線形な関数z_0を与えて繰り返し計算すると，$\boldsymbol{Tz(r)}$**はある関数に収束する．**

収束した$z(r)$を元に，第３章の手順に従って均衡を構築する．

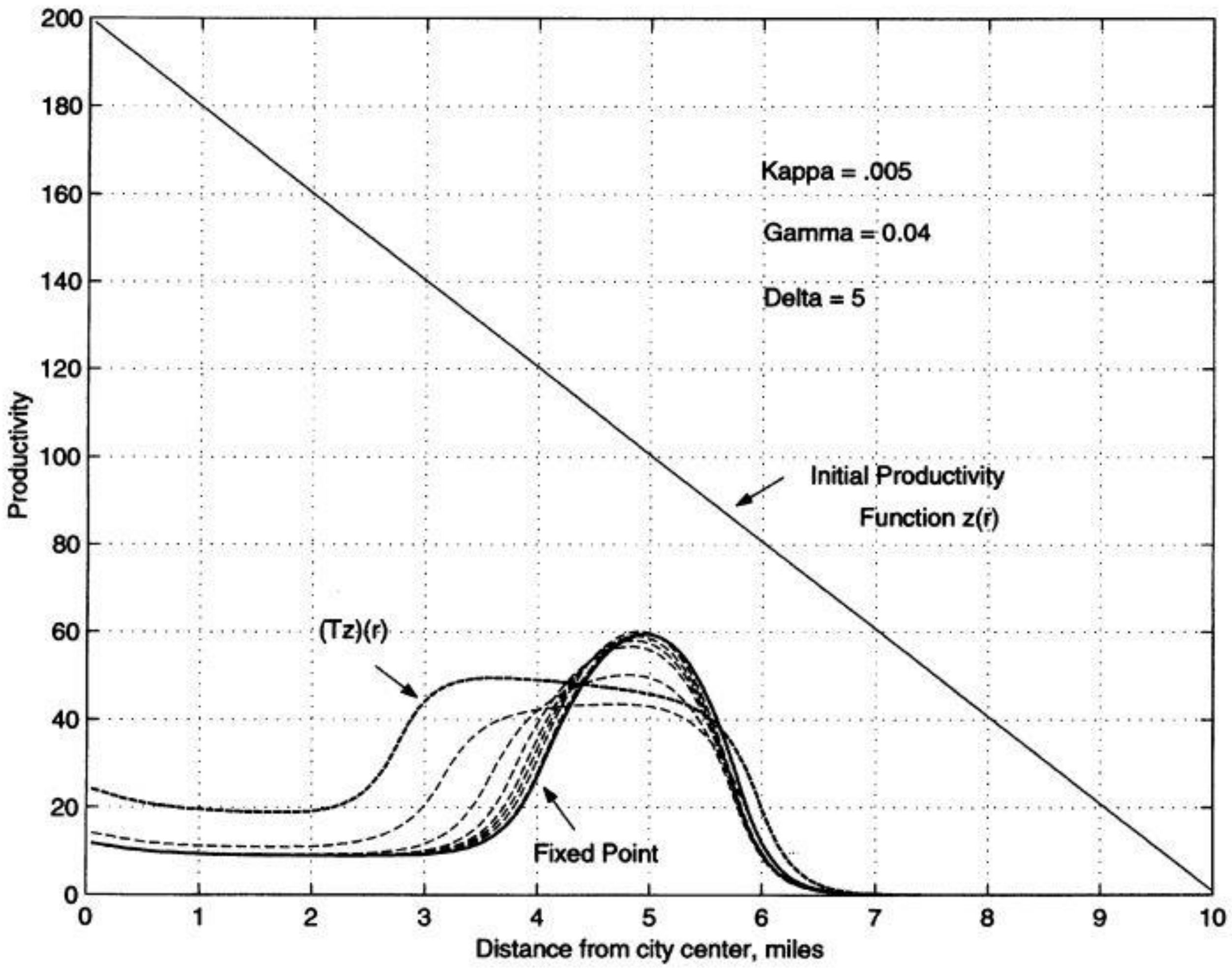


FIGURE 8.—Iterates of the operator T.

5. Numerical Experiments

■数値実験

第５章では，第３章と第４章の内容を元に，実際にコンピュータで計算を行って諸パラメータが都市の内部構造にどのような影響を与えるのかを明らかにする．

パラメータに関する補足

$$0 < \gamma < 1 - \alpha$$

$$-\kappa \leq \frac{\gamma(1-\beta)z'(r)}{(1-\alpha\beta)z(r)} \leq \kappa$$

$$\theta(r)\hat{n}\big(w_m(r), z(r)\big) = \big(1-\theta(r)\big)\widehat{N}\big(w_m(r)\big)$$

$$\theta(r) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$$

5. Numerical Experiments

■諸パラメータに関する説明

本モデルは，選好とテクノロジーを表すパラメータを 6 つ含む.

$1-\beta$: 労働者の土地利用選好
$1-\alpha$: 企業の土地利用選好
A: 生産関数fの切片
γ, δ: 外部性のパラメータ
κ: 移動コストパラメータ

$$\beta = 0.9$$
$$\alpha = 0.95$$
$$\gamma = 0.04$$
$$A = 1$$
$$\bar{u} = 1$$
$$S = 10$$

に固定.

また，生産関数zの初期値z_0は$z_0(r) = -20r + 200$に設定

5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

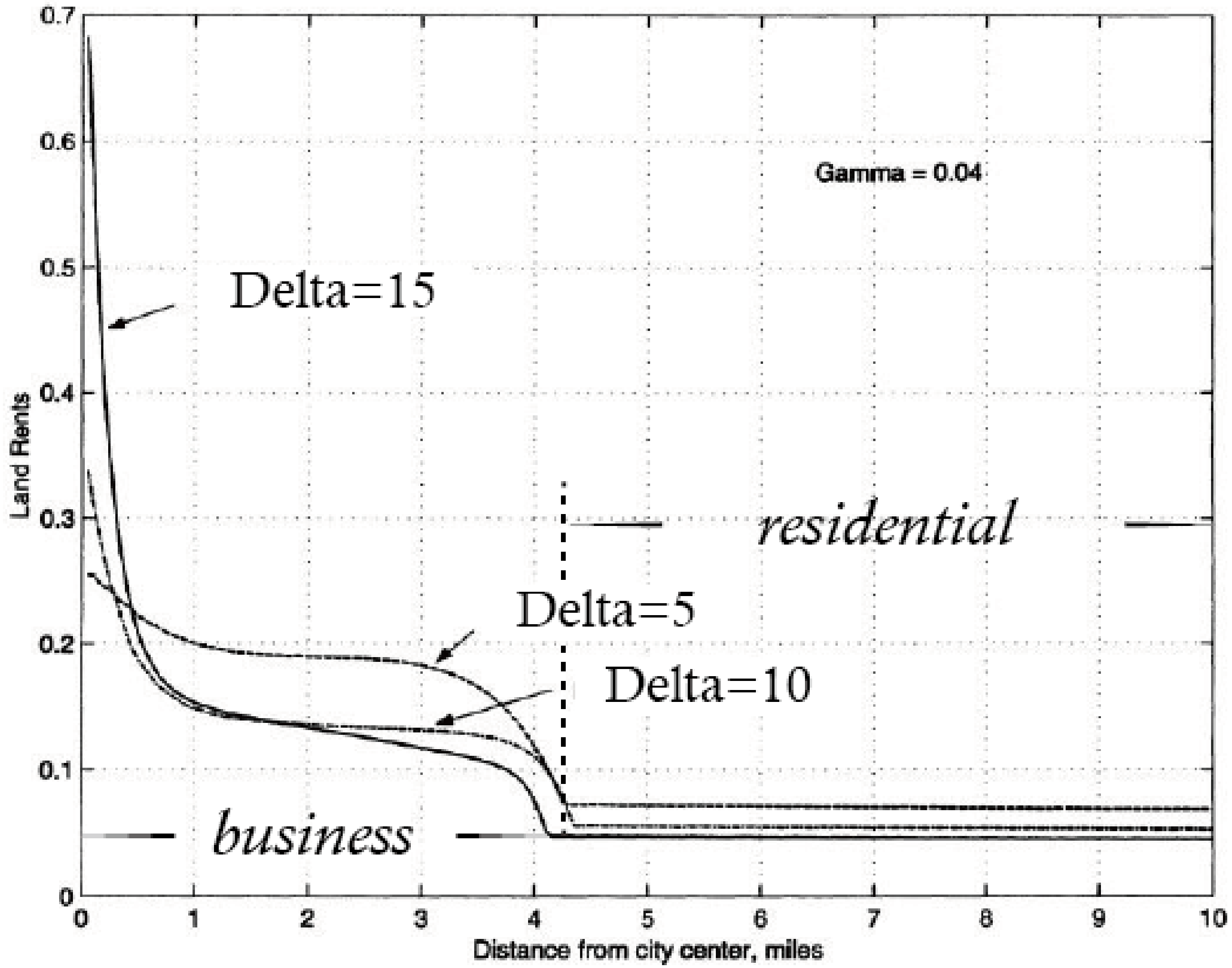
1) $\kappa = 0.001$のとき

半径約4マイルの純粋な企業用地と，その周縁の純粋な居住用地に分化.

→通勤費用が著しく低いとこのような都市構造となる.

※δについて

外部効果の距離減衰度を表すδが高いほど，中心部地価が高くなる.



5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

2) $\kappa = 0.005$のとき

半径約4マイルの混合用地が出現.

半径4～6マイルの地域は企業専用用地となり，その周縁は純粋な居住用地となる.

※δについて

δが高いほど，企業専用用地の地価のピークは安くなる.

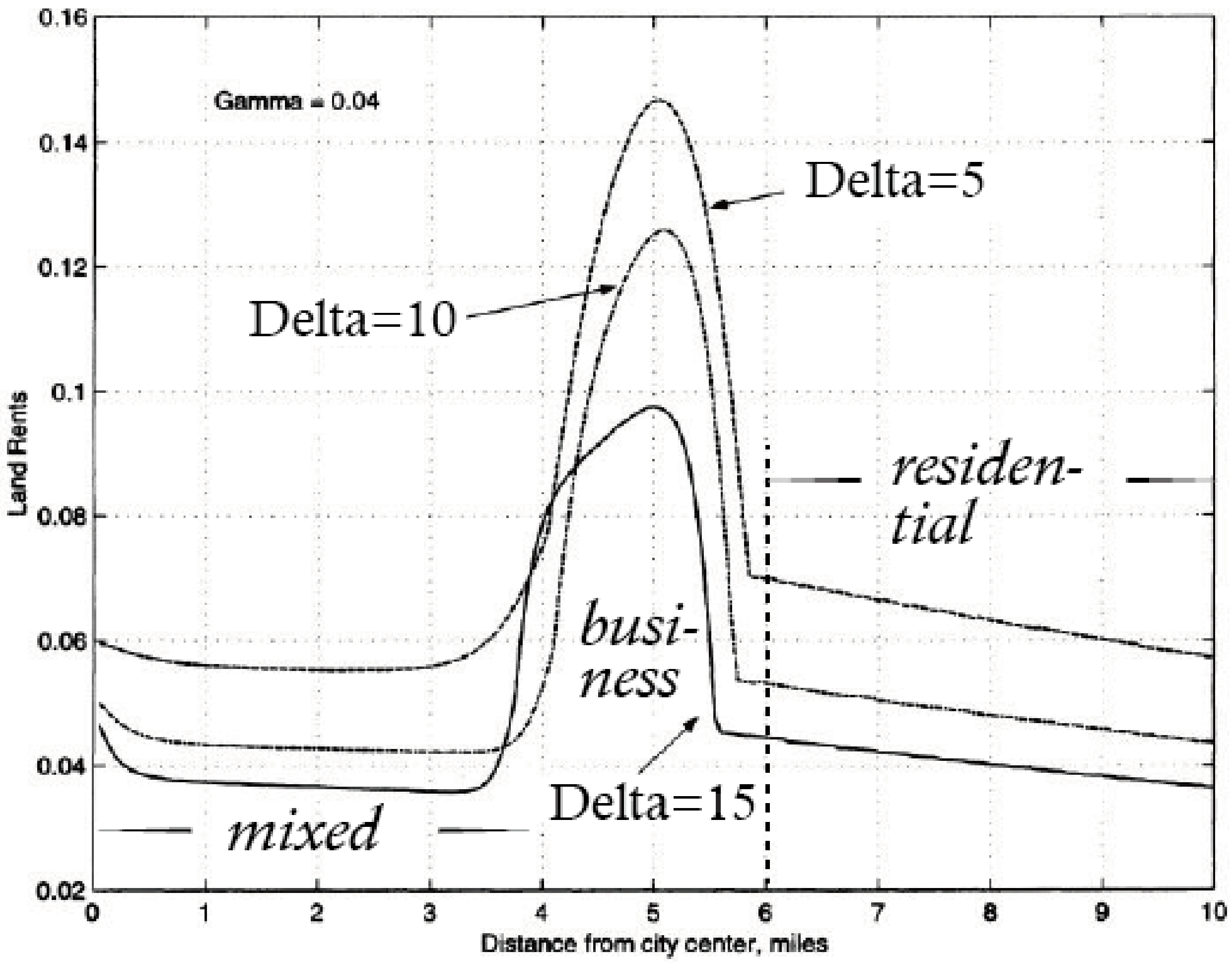


FIGURE 10.—Land rents, various delta values, kappa = 0.005.

5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

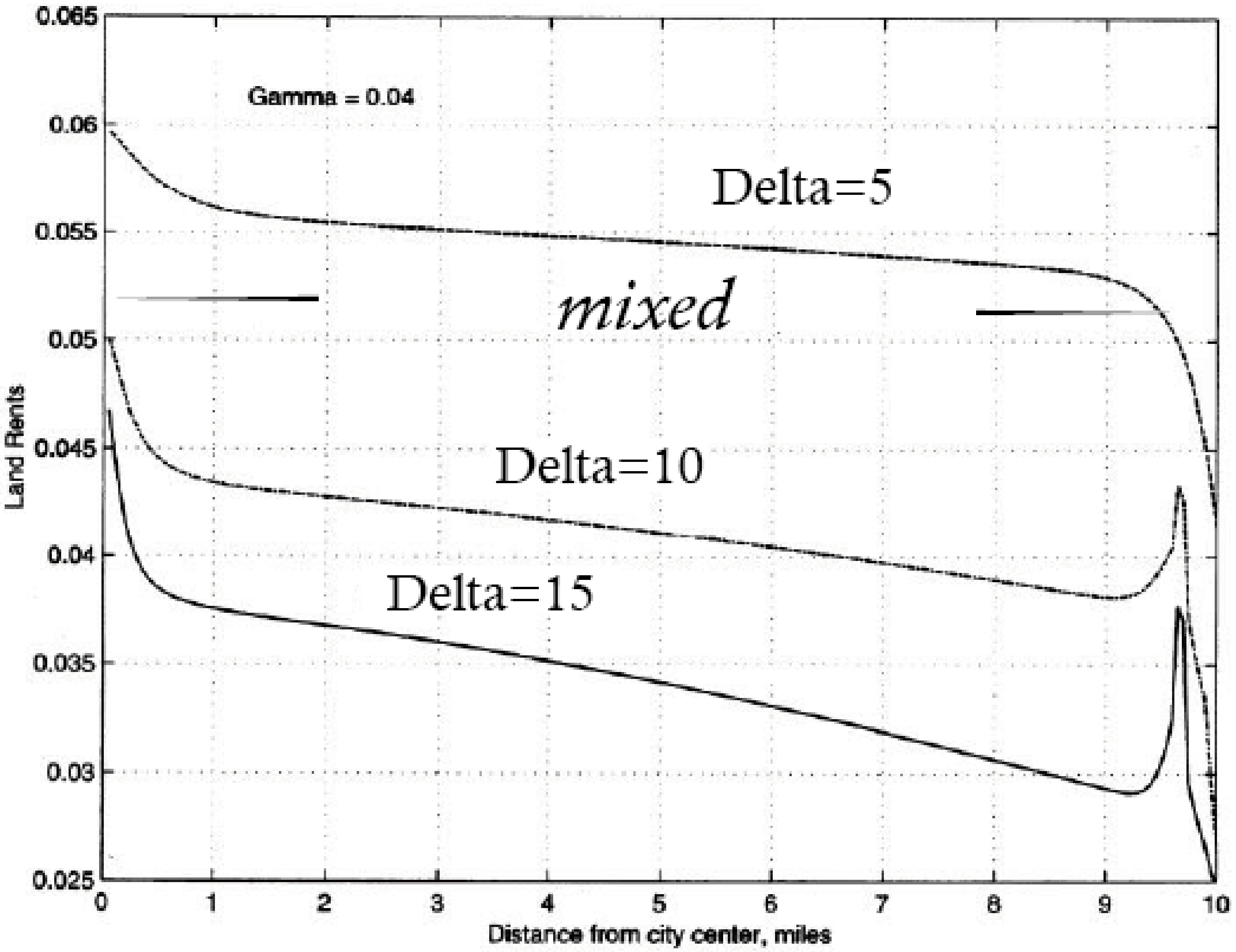
3) $\kappa = 0.07$のとき

混合用地が都市のほぼ全域を占めるようになる.

※δについて

$\delta = 5$のとき，都市の全域が混合用地となり，

$\delta = 10,15$のときは中心から9.5マイルのところに小さな企業専用用地が出現，その外側は居住専用用地となる.



5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

1. κについて

移動コストκが大きいと混合的な土地利用が広がり，小さくなると企業用地と居住用地に分化した都市構造が出現する．

$\boldsymbol{\kappa}$: 小

$\boldsymbol{\kappa}$: 大

2. δについて

ここまでの結果では解釈が難しいので，追加実験

5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

2') $\kappa = 0.005$のとき

$\delta = 25$までは2)に類似した都市構造が得られる．

$\delta = 30$では都市の中心に地価が著しく高い企業専用用地が出現し，$r \in [0.9,2.8]$は混合用地，そして$r \in [2.8,5.3]$に企業専用用地が再び出現する．

$\delta = 40$では，中心部と$r \in [2.5,4.0]$の２箇所に企業専用用地が出現し，それ以外は居住専用用地となる．

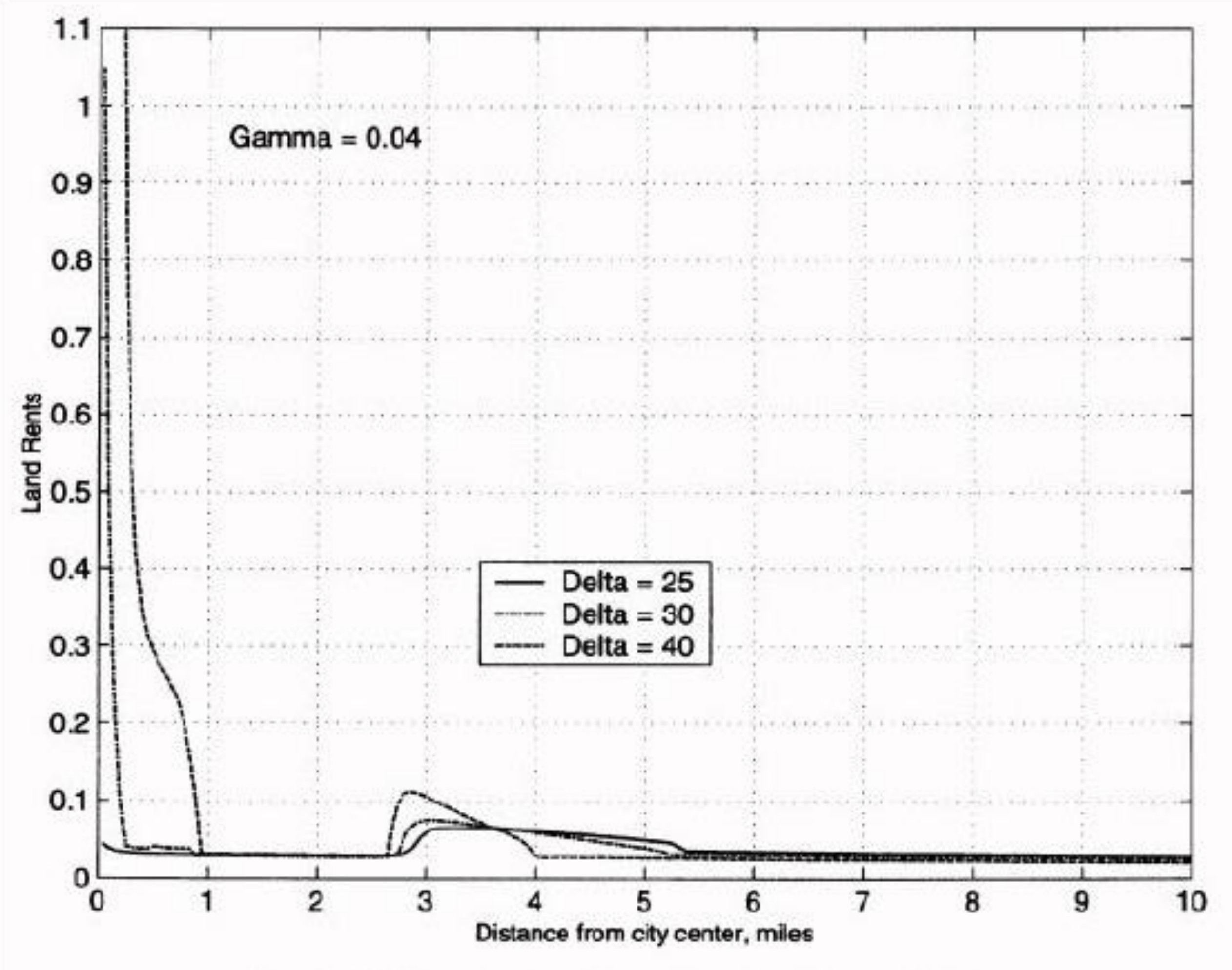


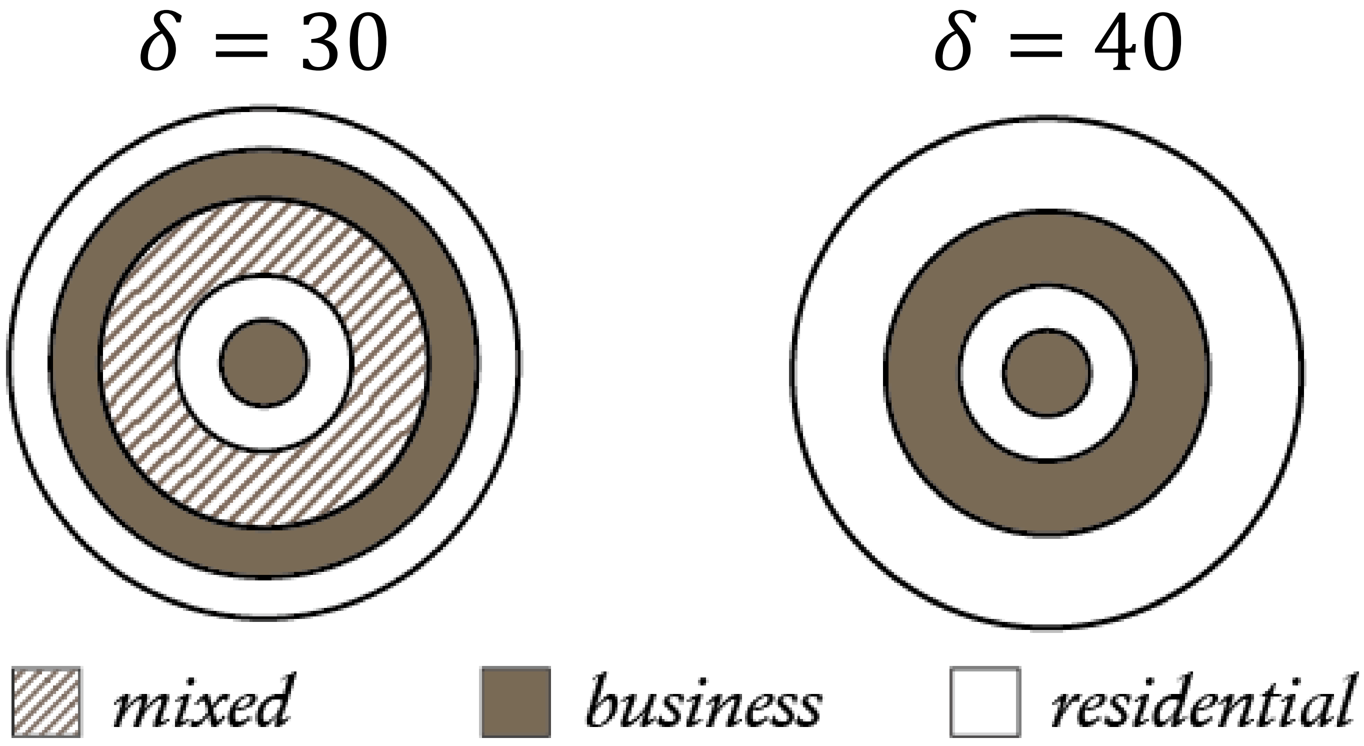
FIGURE 12.—Land rents, various delta values, kappa = 0.005.

5. Numerical Experiments

■κ, δと都市構造の関係

2. δについて

δが大きくなると生産関数の外部効果が減衰しやすくなり，混合用地が消滅するとともに，**都市内に複数の純粋な企業用地が出現**する.



6. Conclusion

■本論文の成果

・**生産関数に外部効果を導入**し，都市の中心部に企業が集積する実態を再現した．

・土地利用について初期状態を設定せず，**企業と労働者の競争による結果として**（ゾーニング等土地利用制限のない）都市の内部構造を記述した．

・**移動コストκと外部効果の減衰度δが都市の内部構造に与える影響**について，数値実験によって明らかにした．