Risk-averse user equilibrium traffic assignment: an application of game theory

Michael G.H. Bell, Chris Cassir

Transportation Research Part B, Vol. 36, (2002), pp.671-681

2021夏学期ゼミ #4

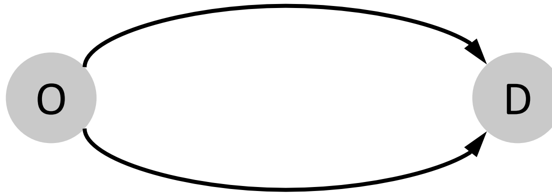
4月16日

M1　増田慧樹

Introduction

- 均衡配分の前提：各利用者は最大効用（＝最小コスト）の経路を選択

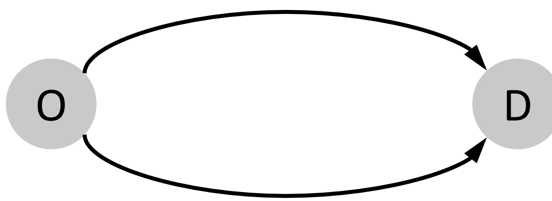
経路1：30分



経路2：20分

- 実際には，経路コストの不確実性（**リスク**）を考慮して経路を選択

経路1：30分　※渋滞したら45分



経路2：20分　※渋滞したら3時間

→どっちの経路を選ぶ？？

Introduction

- 配分にネットワーク利用者のリスク回避性を考慮する方法
  - 各利用者は起こりうる全てのリスクを考慮
  - **リスクには悪意が働くと考える＝最悪のケースを考える（悲観的）**

  →期待コストが最小になるように経路を選択する

- ネットワークの信頼性の定義(Bell(2000))

  「利用者が極端に悲観的だとしても利用者の期待コストが許容できるなら，ネットワークは信頼性がある」

→利用者が悲観的な場合の期待コストはネットワーク信頼性の指標

- Bell(2000)は悪意の主体として**demon**を考え，1利用者1demonの非協力ゲームを記述

- 本論文は，n人の利用者とm体のdemonの非協力ゲームへと拡張．リスク回避的な利用者均衡配分との等価性を示す．

リスク回避性の考慮～従来の方法～

■ Hall(1983)：ネットワーク利用者は**余裕時間（safety margin）**を考慮

実効旅行時間　=　到着すべき時刻　−　出発時刻
　　　　　　　=　平均旅行時間　+　余裕時間

知覚旅行時間が正規分布に従うと仮定

Optimal safety margin

$$= \begin{cases} \sigma\phi^{-1}(\sigma/\gamma) & \text{if } \sigma/\gamma < (2\pi)^{-1/2}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

σ：知覚旅行時間の標準偏差
$\phi^{-1}(\cdot)$：標準正規確率密度関数の逆関数
γ：遅刻のペナルティ

■ Uchida & Iida(1993)

- 到着すべき時刻
- 遅刻ペナルティ
- 旅行時間分布

が所与なら，最適な出発時刻が計算できて，最適な余裕時間もわかる．

→実効旅行時間で等時間配分を行う

問題点：
分布を得るために十分な旅行時間のデータが必要．分布の安定性の問題．

参考：飯田恭敬,内田敬:リスク対応行動を考慮した道路網経路配分,土木学会論文集,No.464/IV-19,pp.63-72,1993

均衡配分とゲーム理論

配分問題…各ネットワーク利用者（プレーヤー）のコスト（利得の逆）が，他の利用者の行動によって変わる→ゲーム理論の枠組み

UE・マクロ的		ゲーム理論・ミクロ的
n人利用者均衡配分	① =	n人非協力ゲーム
		↓ ②demonの導入
		n+1人非協力ゲーム
		↓ ③複数ODへ拡張
リスク回避的な利用者均衡配分	=	n+m人非協力ゲーム

均衡配分とゲーム理論

配分問題…各ネットワーク利用者（プレーヤー）のコスト（利得の逆）が，他の利用者の行動によって変わる→ゲーム理論の枠組み

UE・マクロ的

ゲーム理論・ミクロ的

①

n人利用者均衡配分 ＝ n人非協力ゲーム

②demonの導入

n+1人非協力ゲーム

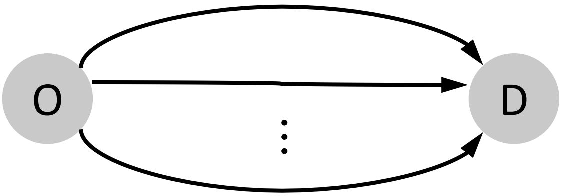
③複数ODへ拡張

リスク回避的な利用者均衡配分 ＝ n+m人非協力ゲーム

n人非協力ゲームと均衡配分

Prop.1
n人による決定論的利用者均衡は，nが大のとき，
n人非協力ゲームの混合戦略ナッシュ均衡と等価である．

条件
- 単一ODペア
- 複数経路
- n人の同質な利用者



h_j ：経路 j の交通量
$\boldsymbol{h}$ ：経路交通量ベクトル
g_j ：経路 j のコスト

前提：利用者均衡 の必要十分条件（マクロ）

$$h_j = 0 \Leftarrow g_j(\boldsymbol{h}) > \min_k g_k(\boldsymbol{h}) \text{ for all paths } j,$$

：最小コストでない経路は選択されない（交通量0）

$$h_j > 0 \Rightarrow g_j(\boldsymbol{h}) = \min_k g_k(\boldsymbol{h}) = g_{\mathrm{OD}}(\boldsymbol{h}).$$

：利用されている経路のコストは最小

これがn人非協力ゲームの混合戦略ナッシュ均衡と等価であることを示す

n人非協力ゲームと均衡配分

n人非協力ゲームとして考える．（ミクロ）

利用者aはどの経路を選択するか（戦略）を確率的に選ぶ（混合戦略）

利用者aの混合戦略 $s_a = \sum_j \underbrace{\pi_{aj}}_{\text{利用者aが経路 } j \text{ を選択する純粋戦略}} \underbrace{p_{aj}}_{\text{利用者aが経路 } j \text{ を選択する確率}}$

純粋戦略：一つの選択肢を確定的に選ぶ戦略

混合戦略：確率的に選択肢を選ぶ戦略

利用者aの被るコストの期待値 $c_a(\boldsymbol{s}) = \sum_j p_{aj} \underbrace{c_a(\underbrace{\boldsymbol{s}_{-a}}_{\text{利用者a以外の利用者の混合戦略ベクトル}}, \pi_{aj})}_{\text{他の利用者の戦略を所与としたとき．利用者aが経路 } j \text{ を選択して被るコスト}}$

n人非協力ゲームと均衡配分

- 利用者は同質と仮定→認知コストは全員同じ
- 全員同じ選択肢集合
- 全員コストを最小化しようと行動する

➡ 利用者は入れ替え可能

$$p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{nj} = p_j$$

$$c_1(\boldsymbol{s}_{-1}, \pi_{1j}) = c_2(\boldsymbol{s}_{-2}, \pi_{2j}) = \cdots = c_n(\boldsymbol{s}_{-n}, \pi_{nj}).$$

nが大ならば，大数の法則により $\boldsymbol{h} \cong \boldsymbol{p}n$

$$\underbrace{c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})} \cong \underbrace{g_j(\boldsymbol{h})}$$

利用者aが経路 j を選ぶときのコスト　　交通量に基づく経路 j のコスト

ミクロ　　マクロ

利用者 a が経路 j を選んだ時のコストは他の人の混合戦略（どの経路にどれくらいの確率で行くか）によるが，各利用者の選択確率が等しいので，混合戦略は全員同じ．nが大ならば各利用者の混合戦略の結果として，確率に基づく交通量が出てくる（大数の法則）．
よって，nが大ならば，他の人の戦略にもとづいて利用者 a が経路 j を選ぶコストは，交通量（他の人の戦略が実現した結果）に基づくコストとほぼ同じ．

n人非協力ゲームと均衡配分

利用者均衡の必要十分条件 $\begin{cases} g_j(\boldsymbol{h}) > g_{\mathrm{OD}}(\boldsymbol{h}) \Rightarrow p_j = 0 \\ g_j(\boldsymbol{h}) = g_{\mathrm{OD}}(\boldsymbol{h}) \Leftarrow p_j > 0 \end{cases}$ を書き直すと

$$\begin{cases} p_{aj} = 0 \Leftarrow c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj}) > \min_k c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{ak}) \ \forall a \ and \ \forall j \\ \text{：利用者aが最小コストでない経路} j \text{を選択する確率はゼロ} \\ p_{aj} > 0 \Rightarrow c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \min_k c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{ak}) \ \forall a \ and \ \forall j. \\ \text{：利用者aの経路} j \text{の選択確率が正ならばコストは最小} \end{cases}$$

これは混合戦略ナッシュ均衡の必要十分条件である.

※ナッシュ均衡

自分以外のプレーヤーの戦略を所与とした場合、どのプレーヤーも自分の戦略を変更することによってより高い利得（より低いコスト）を得ることができない戦略の組み合わせのこと

均衡配分とゲーム理論

配分問題…各ネットワーク利用者（プレーヤー）のコスト（利得の逆）が，他の利用者の行動によって変わる→ゲーム理論の枠組み

UE・マクロ的

ゲーム理論・ミクロ的

①

n人利用者均衡配分

n人非協力ゲーム

②demonの導入

n+1人非協力ゲーム

③複数ODへ拡張

リスク回避的な
利用者均衡配分

n+m人非協力ゲーム

n+1人ゲーム～ Demonの導入～

- 単一ODペア
- 複数経路
- n人の同質な利用者

+1体のdemon

1つのリンクにダメージを与えて，
利用者のコストを最大化したい

リンクへのダメージ＝シナリオkの発生

G$_1$：n+1人ゲーム

$$\operatorname*{Min}_{\boldsymbol{p}a} \; c_a(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) = \sum_j p_{aj} \sum_k q_k c_{ak}(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})$$

期待コスト最小化

シナリオkの発生確率

シナリオkのもとで利用者aが
経路 *j* を選択して被るコスト

$$\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{q}} \; c_{n+1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}) = \sum_k q_k c_{n+1,k}(\boldsymbol{s})$$

demonがシナリオkを選択する
ことで得る効用

期待コスト最大化

$$c_{n+1,k}(\boldsymbol{s}) = \underbrace{\sum_a \sum_j p_{aj} c_{ak}(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})}_{} = \sum_a c_{ak}(\boldsymbol{s})$$

シナリオkのもとで利用者が被るコストの期待値の総和

nが大きいと均衡を見つけるのが難しい→二段階最適化問題へと書き換え

n+1人ゲーム～ Demonの導入～

B$_1$：二段階最適化問題

Upper：demonの期待コスト最大化

$$U : \mathop{\mathrm{Max}}_{\boldsymbol{q}} \sum_j \sum_k q_k g_{jk}(\boldsymbol{h}) h_j \quad \text{subject to} \quad \sum_k q_k = 1, \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0},$$

シナリオkのときの経路 j のコスト

Lower：UEの最適化問題への変換とほぼ同じ

$$L : \mathop{\mathrm{Min}}_{\boldsymbol{h}} \sum_u \sum_k q_k \int_0^{vu(\boldsymbol{h})} t_{uk}(x)dx \quad \text{subject to} \quad v_u = \sum_j a_{uj} h_j, \sum_j h_j = n, \boldsymbol{h} \geq \boldsymbol{0},$$

リンクuの交通量

シナリオkのときリンクuの
リンクパフォーマンス関数

リンクuが経路 j に含まれて
いるか（True:1, False:0）

Prop.2
nが大のとき，B$_1$を解くことでG$_1$のマクロな解を得られる．

→次ページ以降で証明

n+1人ゲーム～ Demonの導入～

mutually consistent pointにおいて以下の条件が成立

For $U:\forall k$ 

$$q_k = 0 \Leftarrow \boxed{\sum_j g_{jk}(\boldsymbol{h})h_j} < \max_r \sum_j g_{jr}(\boldsymbol{h})h_j,$$

：総コストが最大でないシナリオの発生確率は0

$$q_k > 0 \Rightarrow \boxed{\sum_j g_{jk}(\boldsymbol{h})h_j} = \max_r \sum_j g_{jr}(\boldsymbol{h})h_j.$$

：シナリオkの発生確率が正ならば総コスト最大

For $L:\forall j$ 

$$h_j = 0 \Leftarrow \boxed{\sum_k g_{jk}(\boldsymbol{h})q_k} > \min_r \sum_k g_{rk}(\boldsymbol{h})q_k,$$

：期待コストが最小でない経路の交通量は0

$$h_j > 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k g_{jk}(\boldsymbol{h})q_k} = \min_r \sum_k g_{rk}(\boldsymbol{h})q_k.$$

：経路 *j* の交通量が正なら，期待コスト最小

大数の法則より， nが大ならば，総期待コストは，個人の期待コストの和に近接

$$\boxed{\sum_j g_{jk}(\boldsymbol{h})h_j} \cong c_{n+1,k}(\boldsymbol{s}) \longleftarrow$$

demonの得る利得

総コスト

大数の法則が，個々人の選択確率（ミクロ）と集団としてみた交通量（マクロ）を繋いでいる．

$$c_{n+1,k}(\boldsymbol{s}) = \sum_a \sum_j \underline{p_{aj} c_{ak}(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})}$$

利用者aがシナリオkのもとで経路jを選ぶときの期待コスト

$$h_j \cong p_j n$$

$$g_j(\boldsymbol{h}) \cong c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})$$

←大数の法則より（スライド8ページ）

$$\boxed{\sum_k g_{jk}(\boldsymbol{h})q_k} \cong \sum_k c_{ak}(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj})q_k = c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj}),$$

交通量に基づく経路jの総期待コスト

利用者aが経路jを選ぶときのコスト

n+1人ゲーム～ Demonの導入～

以上より，前ページの式はミクロレベルの式に書き換えられる

Upper：$\forall k$

$$\begin{cases} q_k = 0 \Leftarrow c_{n+1,k}(\boldsymbol{s}) < \max_r c_{n+1,r}(\boldsymbol{s}), \\ q_k > 0 \Rightarrow c_{n+1,k}(\boldsymbol{s}) = \max_r c_{n+1,r}(\boldsymbol{s}) \end{cases}$$

Lower：$\forall a$ and $\forall j$

$$\begin{cases} p_{aj} = 0 \Leftarrow c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj}) < \max_r c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{ar}), \\ p_{aj} > 0 \Rightarrow c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \max_r c_a(\boldsymbol{s}_{-a}, \pi_{ar}) \end{cases}$$

これは，n+1人非協力ゲームの混合戦略ナッシュ均衡の必要十分条件である
→B_1を解くことによりG_1の近似的・マクロ的な解が得られる．

均衡配分とゲーム理論

配分問題… 各ネットワーク利用者（プレーヤー）のコスト（利得の逆）が，他の利用者の行動によって変わる→ゲーム理論の枠組み

UE・マクロ的

ゲーム理論・ミクロ的

①

n人利用者均衡配分

n人非協力ゲーム

②demonの導入

n+1人非協力ゲーム

③複数ODへ拡張

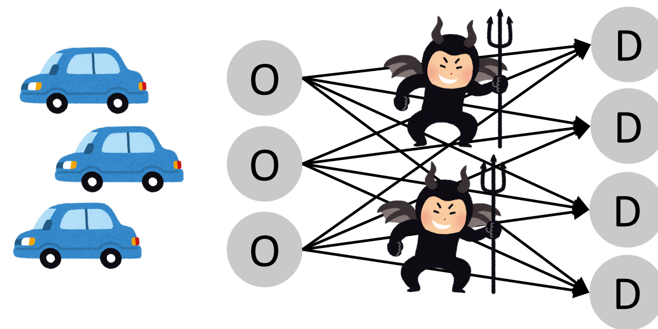
リスク回避的な
利用者均衡配分

n+m人非協力ゲーム

n+m人ゲーム〜複数OD〜

- 複数ODペア
- 複数経路
- n人の同質な利用者

+m体のdemon（ODペア固有）



B_2：B_1の二段階最適化問題をODペアごとに並列

For each origin–destination pair OD $\in (1, \ldots, m)$ solve simultaneously :

$$U_{\mathrm{OD}} : \underset{\boldsymbol{q}_{\mathrm{OD}}}{\mathrm{Max}} \sum_j \sum_k q_{k\mathrm{OD}} g_{jk\mathrm{OD}}(\boldsymbol{h}) h_{j\mathrm{OD}} \quad \text{subject to} \quad \sum_k q_{k\mathrm{OD}} = 1, \boldsymbol{q}_{\mathrm{OD}} \geq \boldsymbol{0},$$

$$L_{\mathrm{OD}} : \underset{\boldsymbol{h}_{\mathrm{OD}}}{\mathrm{Min}} \sum_u \sum_k q_{k\mathrm{OD}} \int_0^{vu(\boldsymbol{h})} t_{uk}(x) dx \quad \text{subject to} \quad v_u = \sum_j a_{uj} h_j, \sum_j h_{j\mathrm{OD}} = n_{\mathrm{OD}},$$

$$\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots .\boldsymbol{h}_m) \qquad \sum_{\mathrm{OD}} n_{\mathrm{OD}} = n$$

次ページでB_2の求解アルゴリズムを示す

求解アルゴリズム

逐次平均法（MSA）により求解

Step0. 初期設定
反復回数 t= 1, リンク交通量= 0, リンク障害確率= 1/リンク数

Step1. 期待リンクコストの計算
直近のリンク交通量とリンク障害確率に基づいて，期待リンクコストを計算

Step2. 各ODペアについて，最小コストの経路にOD表の交通量を配分

Step3. ODごとのリンク交通量をMSAにより更新
$\mathrm{h}_{OD}^{t+1} = h_{OD}^{t} + \frac{1}{t}(h_{OD}^{*} - h_{OD}^{t})$　　h_{OD}^{*}：Step2で得られたOD交通量

Step4. 各ODペアについて，期待コスト最大になるシナリオを特定し，
該当するリンクの障害確率を1,その他のリンクを0とする.

Step5. ODごとのリンク障害確率をMSAにより更新

Step6. 収束するまでStep1~Step6を繰り返し

数値実験

簡易NWの条件

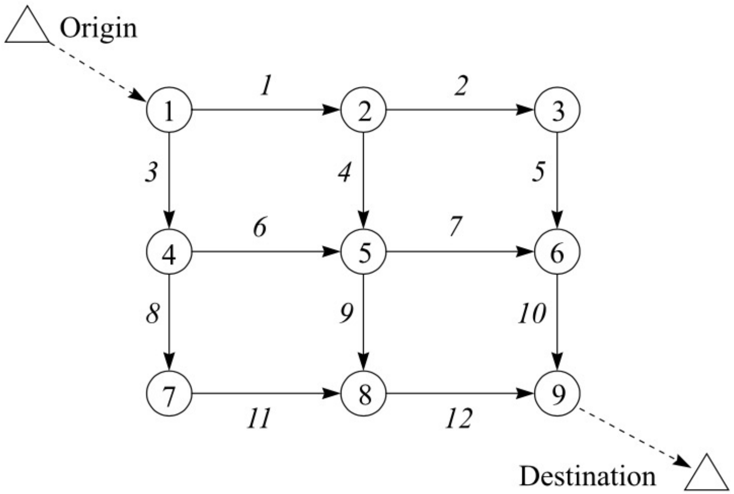


Fig. 1. Example network.

- リンクコスト

$$\mathrm{Cost}_i = 10 + 10(\mathrm{flow}_i/\mathrm{capacity}_i)^4, \quad i = 1, \ldots, 12$$

- リンク容量
  500台/時．ダメージを受けると50%減少

- OD交通量
  1000台/時

＜結果＞

- 期待コスト

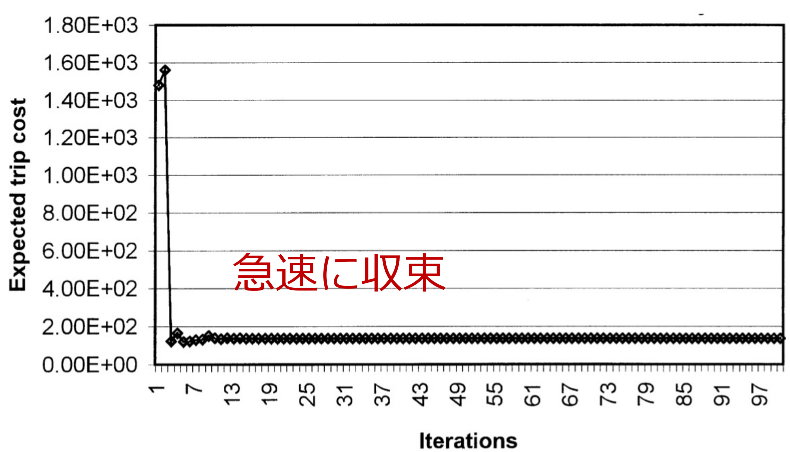


Fig. 2. Expected trip cost.

数値実験

リンク選択確率 

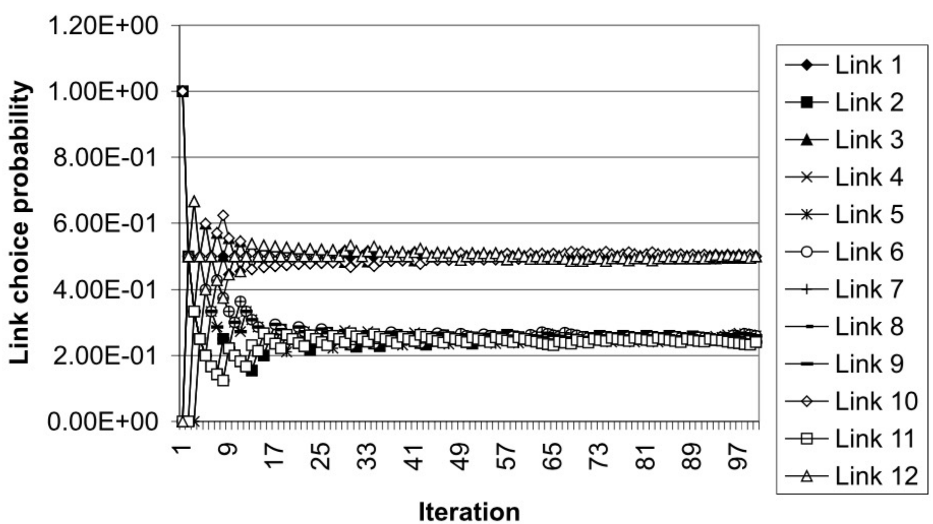


Fig. 3. Link choice probabilities.

シナリオ選択確率 

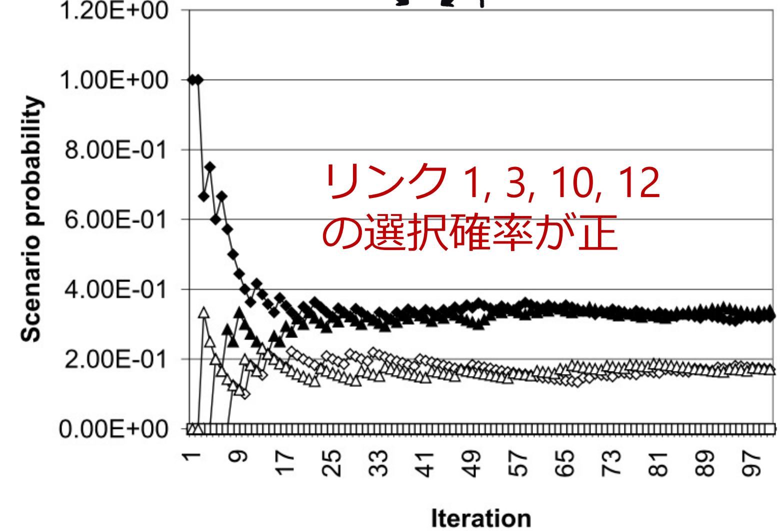


Fig. 4. Scenario probabilities.

- リンク 1, 3, 10, 12 の選択確率が 0.5
- その他のリンクの選択確率は0.25

- NWの対称性により収束しない

$$q_1 + q_{10} = q_3 + q_{10} = q_1 + q_{12} = q_3 + q_{12} = 0.5,$$
$$q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = q_9 = q_{11} = 0.$$

- リンク 1, 3, 10, 12のダメージが致命的

結論

ネットワーク利用者とdemonの間の非協力ゲームを考えることで，
リスク回避的な均衡配分の新手法を提案

- ゲームのナッシュ均衡は，リスク回避的な交通流と，各ODペアについて脆弱なリンクを示す.
- 悲観的な旅行者の予想を反映しているため，期待コストはネットワークの信頼性を測る有効な指標

<u>課題</u>

- demonは利用者のコストを最大化
→世界観が過度に悲観的
- demonがダメージを与えるのは**ひとつのリンクのみ**
→災害や渋滞を考えると複数のリンクが同時にダメージを受けそう
- どのプレーヤーも他のプレーヤーの次の動きを予想できない