吸収マルコフ過程による交通量配分理論

Theory of Traffic Assignment through Absorbing Markov Process

佐佐木 綱: 土木学会論文集, No.121, pp.28-32, 1965.

夏学期ゼミ #6 交通量配分

2021.4.23

B4 増橋 佳菜

0. 目次

1. 概要

街路交通を巨視的に眺めたときの車の流れ

- ✓ 各交差点で一定の確率に従って方向転換
- ✓ 各交差点で吸収・発生

↓

[仮定]※1 各車とも同一方向で交差点に入る場合、その右左折率及び直進率は同じ のもと、

車の流れを **吸収マルコフ連鎖** として考えて**交通量**を求める

※1 各交差点における直進率および右左折率がどの車についても一定であると考えるのは現状を無視した仮定だが、この点は本論文では検討しない。あくまで巨視的に見た場合の議論を展開する。

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

[補足] 吸収マルコフ連鎖 とは？

▶マルコフ性

確率過程※2 の”未来の挙動が現在の状態のみに依存し、過去の状態推移と無関係である” 性質のこと

マルコフ性を持つ確率過程のことを**マルコフ過程**という

※2 **確率過程**：確率論において、時間とともに変化する確率変数$\{X_t\}$のこと

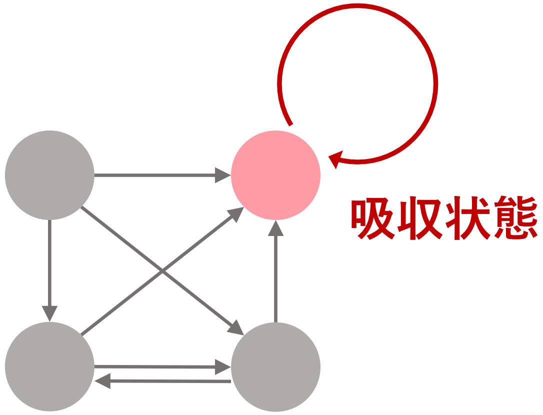
▶マルコフ連鎖

マルコフ過程 $\{X_t\}$ のうち、取り得る状態が離散的なもの（＝離散状態マルコフ過程）のことで

特に時間 t が離散的なものを指すことが多い

▶吸収状態

マルコフ連鎖において、確率1で自分自身に戻ってくる状態のこと



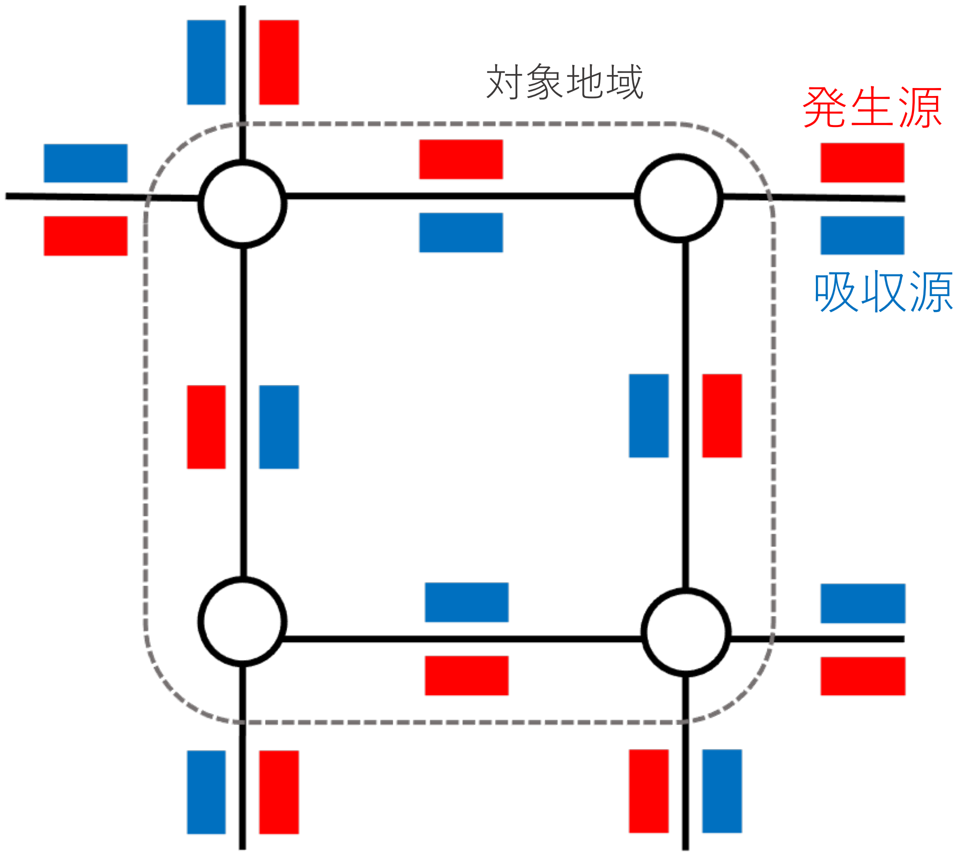
『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

1. 概要

・街路網のモデル

発生源：交通量の発生するところ
吸収源：交通量が吸収される（＝トリップが終了する）ところ

発生交通量：単位時間に各発生源から発生する車の数
吸収交通量：単位時間に各吸収源に吸収される車の数



- **各交差点間に1個ずつ発生源と吸収源を持つ**
- **対象地域外からの連絡道路にはその背後地を代表する発生源と吸収源とを考える**

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

2. 吸収マルコフ連鎖の性質

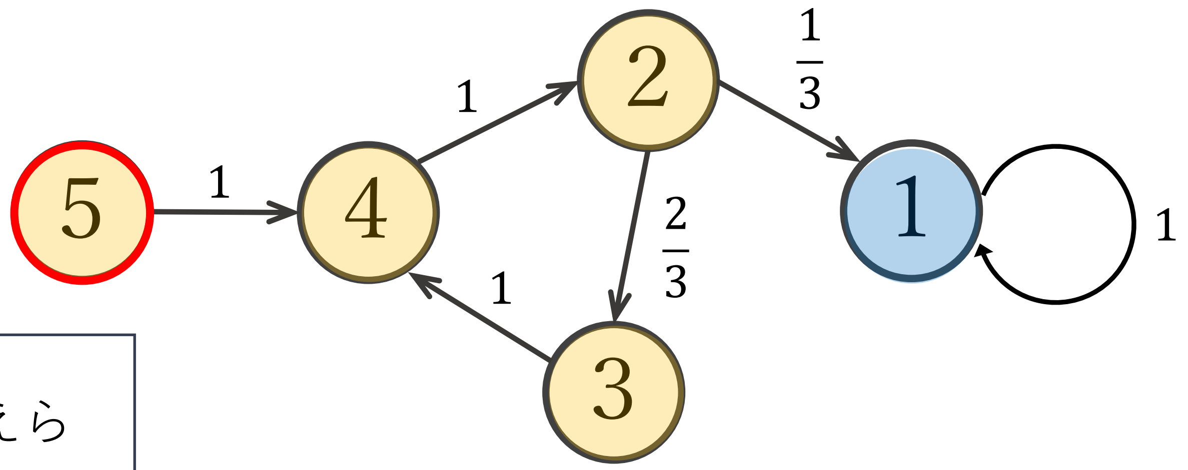
- シャノン線図※3により遷移確率※4を与える

※3 **シャノン線図**：（＝状態遷移図）状態を○、遷移を矢印で表している
※4 **遷移確率**：N個の状態のもとで、状態iにあるとき、次の状態jに遷移する確率 $p(i,j)=p(j|i)$

- 吸収的状態がr個、非吸収的状態がs個あるとする

毎時5台ずつの車が地点⑤から出発（＝発生）し、与えられた遷移確率に従って道路網の中を流れ、最後に地点①に到着（＝吸収）される場合の各道路（地点間）の交通量

シャノン線図



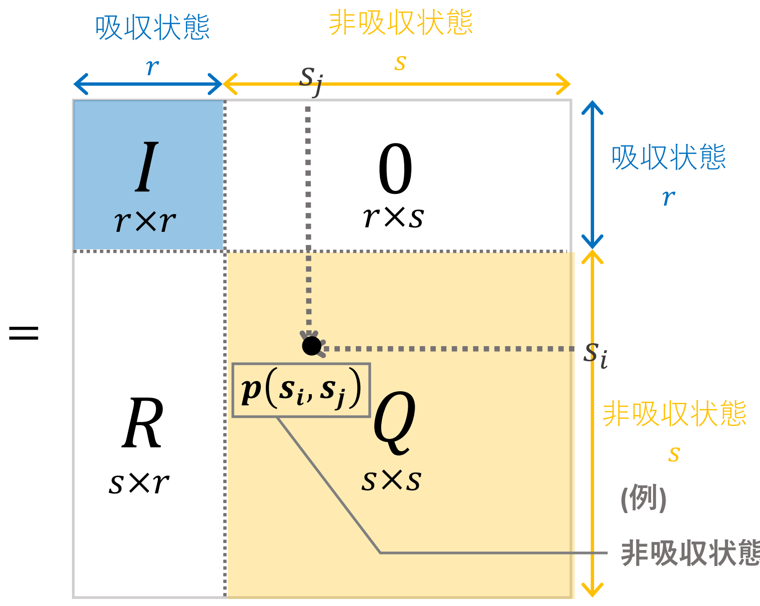
$r=1(①)$　$s=4(②,③,④,⑤)$

2. 吸収マルコフ連鎖の性質

・遷移確率行列※5 Pの標準形

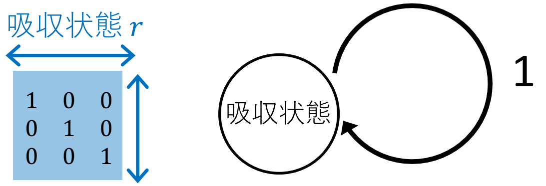
$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \quad (1)$$

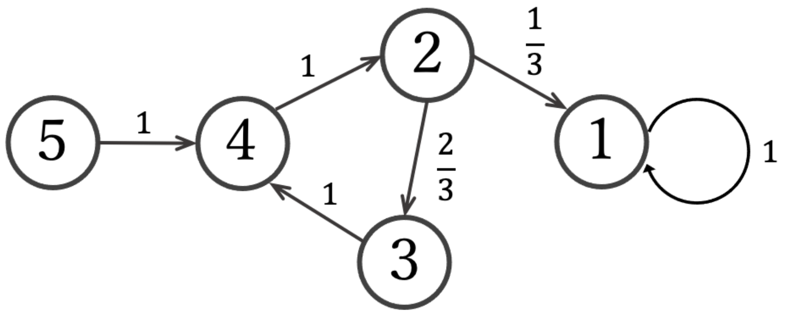
I：吸収状態を表す単位行列 $r \times r$
0：零行列 $r \times s$
R：非吸収状態から吸収状態への遷移確率行列 $s \times r$
Q：非吸収状態相互の遷移確率行列 $s \times r$



単位行列 Iの解釈

吸収状態から吸収状態への遷移確率行列





$r = 1(①) \quad s = 4(②, ③, ④, ⑤)$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

(例)
状態②から状態③への遷移確率
$p(2,3) = p(3|2) = 2/3$

※5 **遷移確率行列**：N個の状態のもとで遷移確率 $p(i,j)$を(i,j)成分とする$N \times N$行列

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

2. 吸収マルコフ連鎖の性質

- 一般に、Q（非吸収状態相互の遷移確率行列)）に対して

$$I + Q + Q^2 + \cdots = \boxed{(I - Q)^{-1}} \quad (2)$$

吸収マルコフ連鎖の基本行列

▶吸収マルコフ連鎖の基本行列 の性質

(i, j)要素は、地点iを出発または通過した1台の車がまわりまわって地点jを通過する回数の期待値を表している

$$(I - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

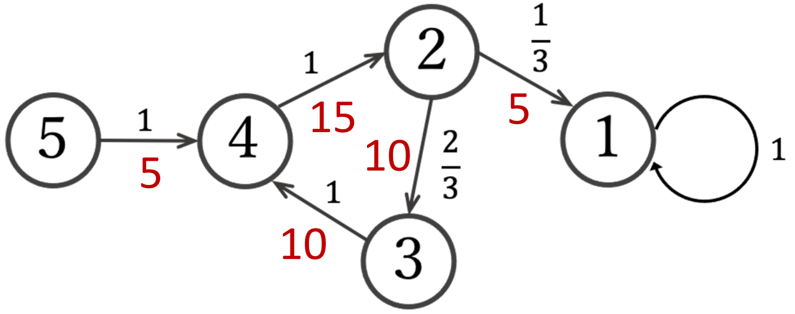
地点③を通過した1台の車は
地点④を3回通る

いま問題にしているのは

地点⑤から5台の車が出発したときの交通量

各リンクの交通量は

$$\begin{cases} ② \to ① : \ 3 \times \frac{1}{3} \times 5 = 5台 \\ ② \to ③ : \ 3 \times \frac{2}{3} \times 5 = 10台 \\ ③ \to ④ : 2 \times 1 \times 5 = 10台 \\ ④ \to ② : 3 \times 1 \times 5 = 15台 \\ ⑤ \to ④ : 1 \times 1 \times 5 = 5台 \end{cases}$$



2. 吸収マルコフ連鎖の性質

- 各地点（＝非吸収状態 s_i $(i=1,2,3,\cdots,s)$）における発生交通量をu_{s_i}と表すとき
  各地点（＝非吸収状態 s_i $(i=1,2,3,\cdots,s)$）を通る交通量は、

$$\underbrace{\left(u_{s_1}, u_{s_2}, u_{s_3}, \cdots, u_{s_s}\right)}_{\text{各地点の発生交通量}}\underbrace{(I-Q)^{-1}}_{\text{各地点を出た車がそれぞれの地点を通る回数}} \qquad (3)$$

- 各吸収源に吸収される交通量 v は、

$$v=\underbrace{\left(u_{s_1}, u_{s_2}, u_{s_3}, \cdots, u_{s_s}\right)}\underbrace{(I-Q)^{-1}}\underbrace{R}_{\text{非吸収状態から吸収状態への遷移確率行列}} \qquad (4)$$

$$P=\begin{array}{cc|l} \overset{\text{吸収状態}}{r} & \overset{\text{非吸収状態}}{s} & \\ \underset{r\times r}{I} & \underset{r\times s}{0} & \text{吸収状態 } r \\ \underset{s\times r}{R} & \underset{s\times s}{Q} & \text{非吸収状態 } s \end{array}$$

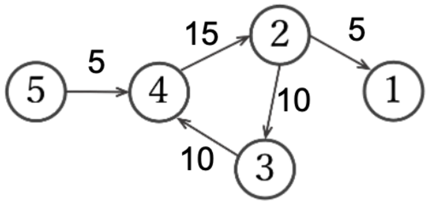
$$\left\{\begin{array}{l} \left(u_{s_1}, u_{s_2}, u_{s_3}, u_{s_4}\right)=\left(u_2, u_3, u_4, u_5\right)=(0,0,0,5) \\ (I-Q)^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \end{array}\right.$$

・各地点の交通量は

$$(0,0,0,5)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ (15,10,15,5) \end{array}$$

・吸収源に吸収される交通量vは

$$v=(15,10,15,5)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=5$$



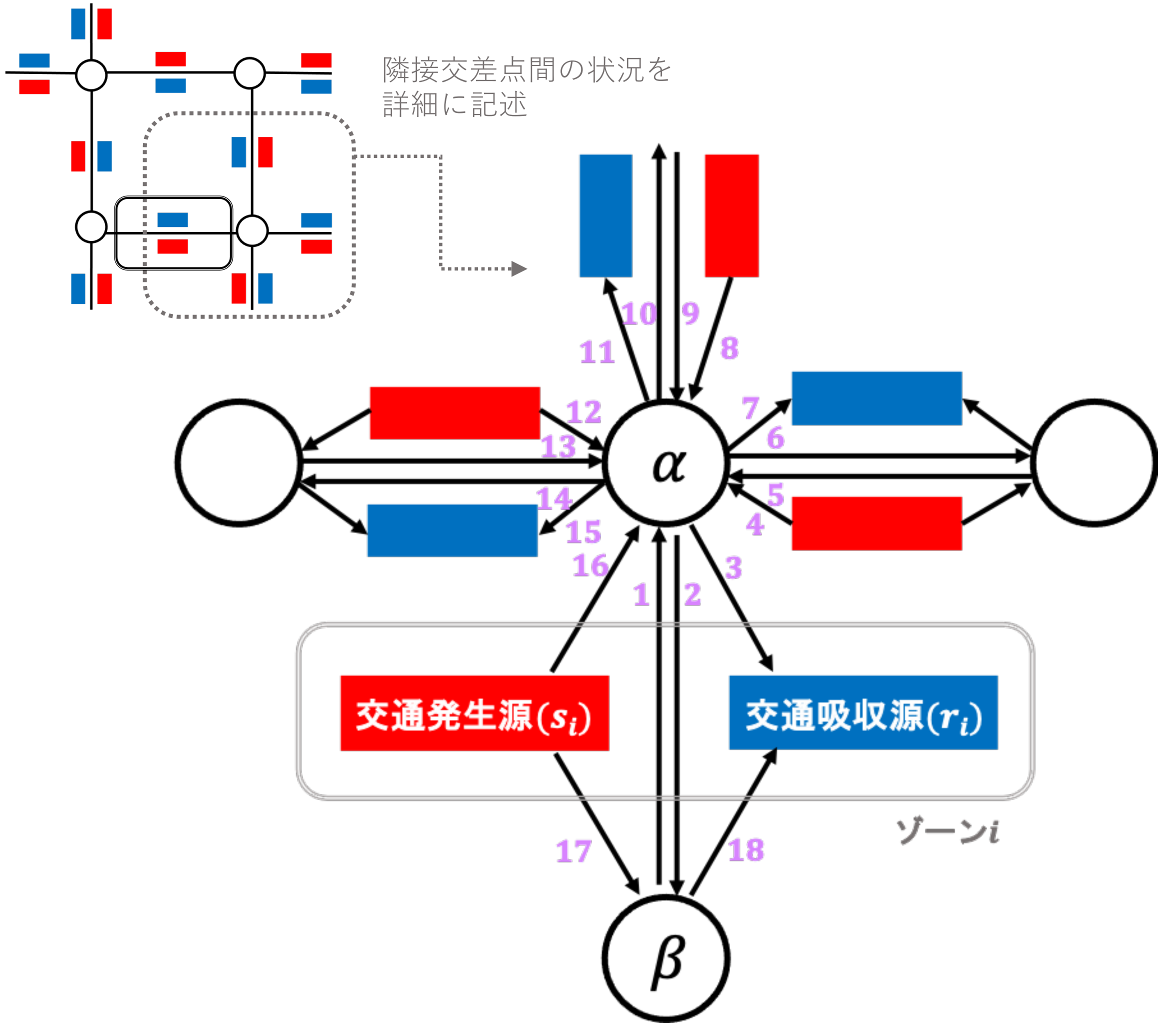
3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 各隣接交差点間を1つのゾーンとして考え、そのゾーンに**1対の発生源と吸収源**が存在すると仮定
- 発生源・過渡状態・吸収源の３つの「状態」を考える

非吸収状態
- 発生源
- 過渡状態

吸収状態（＝吸収源）

- この場合、1つの交差点毎に16個の過渡状態がある
  - ✓ 発生源からの流入 4個
  - ✓ 吸収源への流出 4個
  - ✓ 交差点間の通過交通 8個



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,14} + p_{1,15} = 1$
  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} =$ 右折率
  ✓ $p_{1,10} + p_{1,11} =$ 直進率
  ✓ $p_{1,14} + p_{1,15} =$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

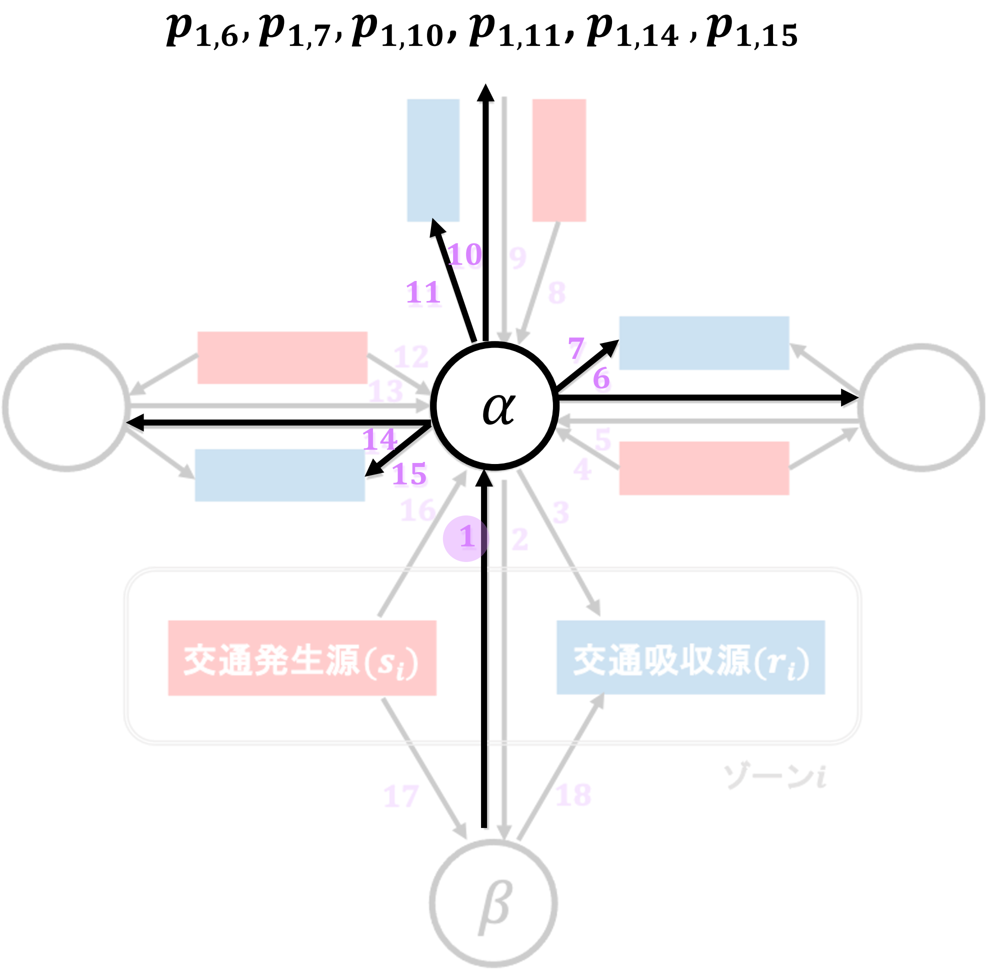
  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  ✓ $p_{s_i,16} + p_{s_i,17} = 1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,14} + p_{1,15} = 1$
  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} =$ 右折率
  ✓ $p_{1,10} + p_{1,11} =$ 直進率
  ✓ $p_{1,14} + p_{1,15} =$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

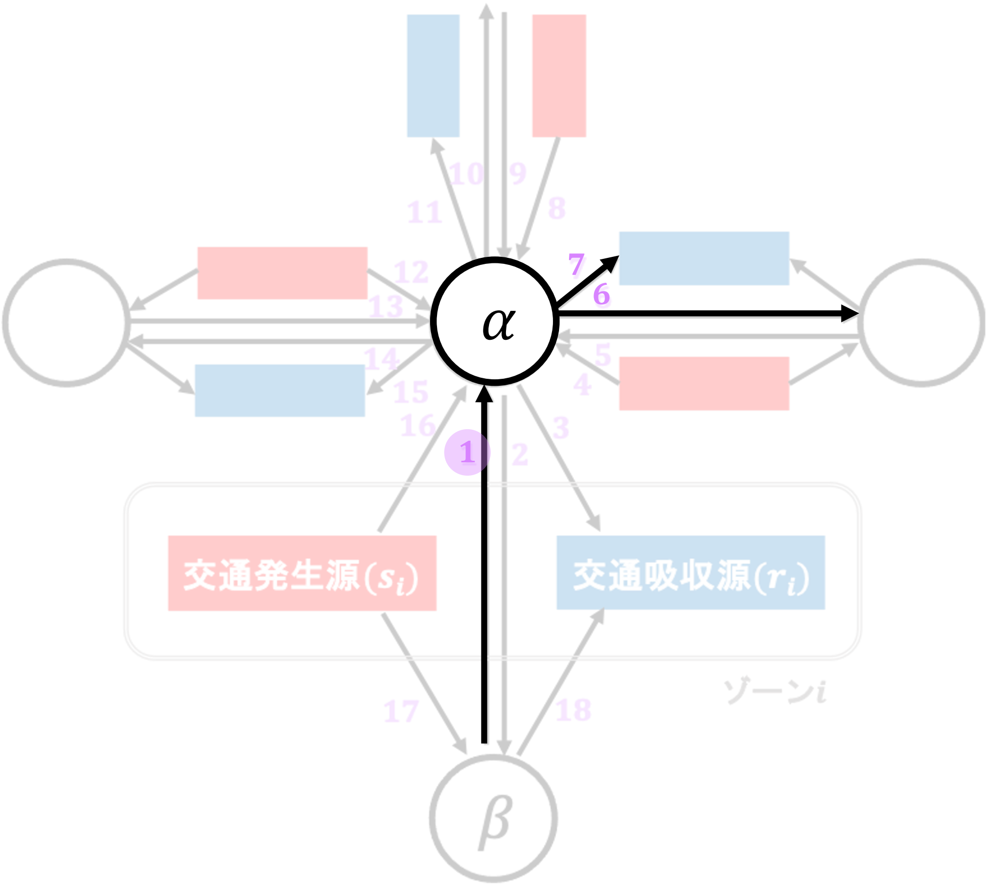
  ✓ $p_{s_i,16} + p_{s_i,17} = 1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$

右折率 $(\boldsymbol{p_{1,6}} + \boldsymbol{p_{1,7}})$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,14} + p_{1,15} = 1$
  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} =$ 右折率
  ✓ $p_{1,10} + p_{1,11} =$ 直進率
  ✓ $p_{1,14} + p_{1,15} =$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

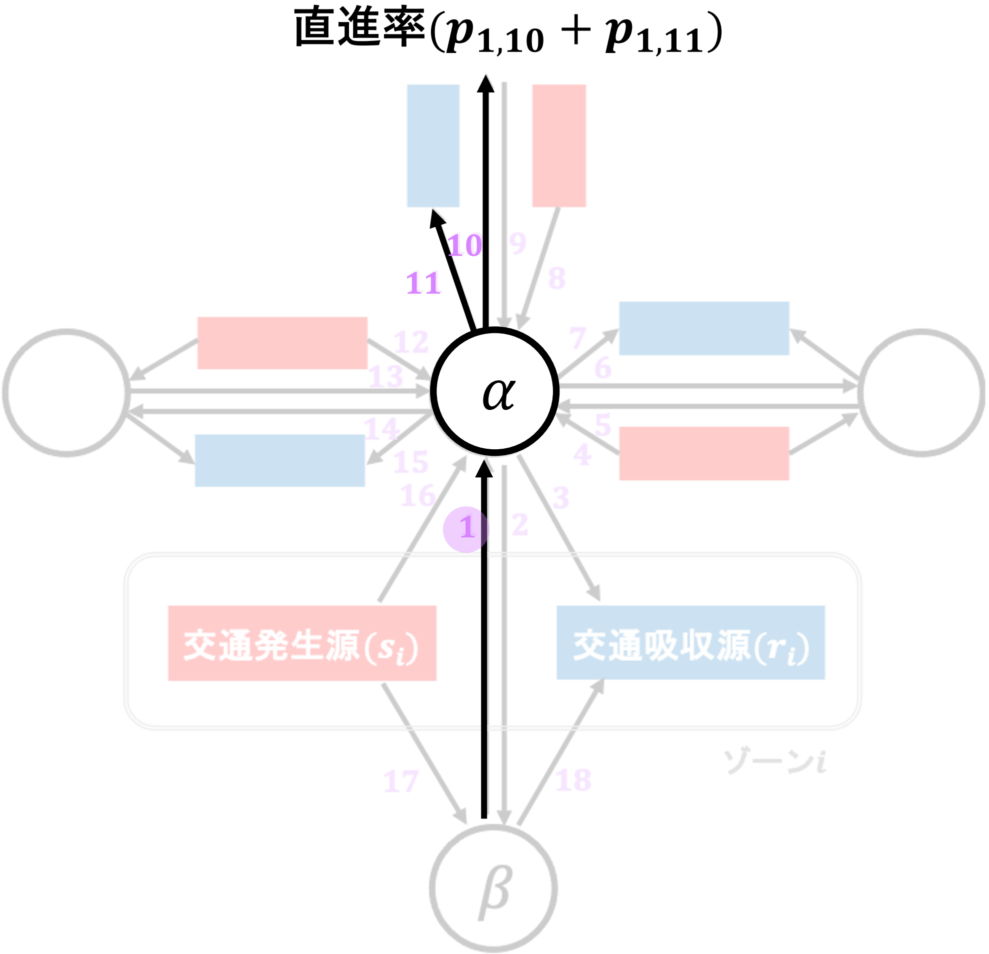
  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  ✓ $p_{s_i,16} + p_{s_i,17} = 1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6}+p_{1,7}+p_{1,10}+p_{1,11}+p_{1,14}+p_{1,15}=1$
  ✓ $p_{1,6}+p_{1,7}=$ 右折率
  ✓ $p_{1,10}+p_{1,11}=$ 直進率
  ✓ $p_{1,14}+p_{1,15}=$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

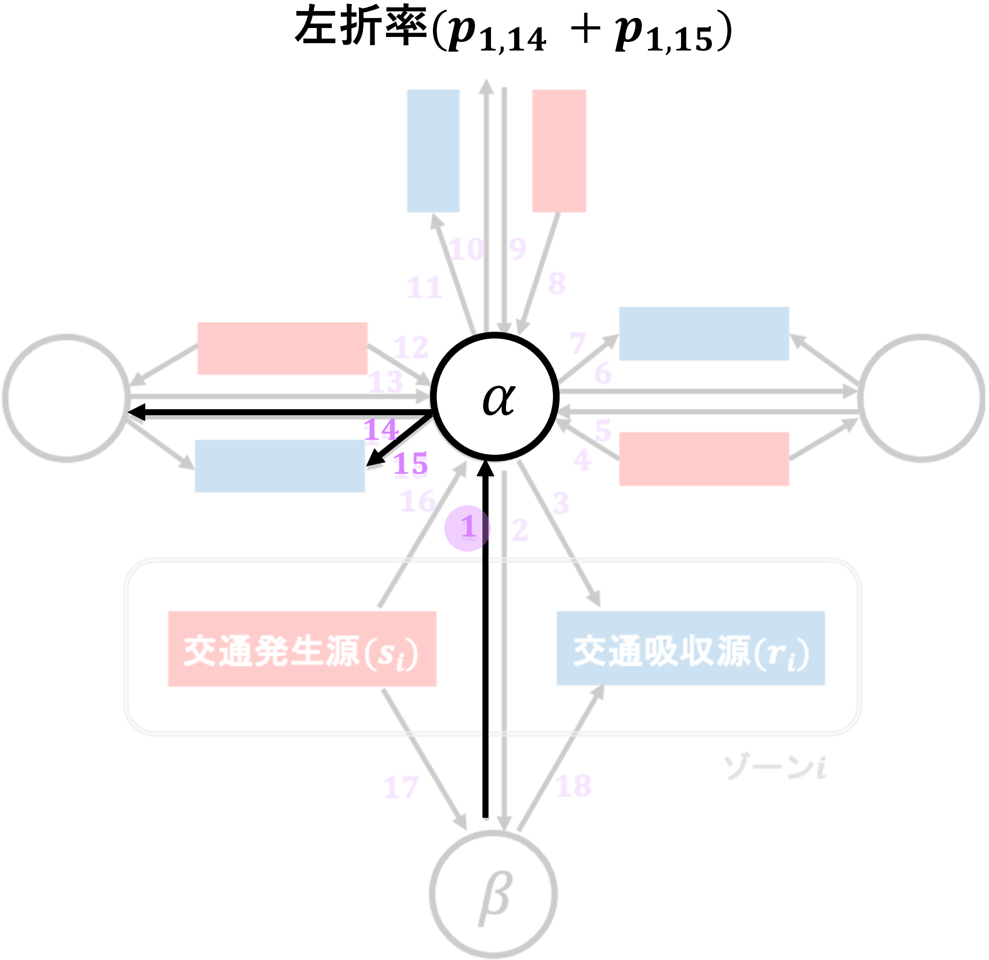
  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  ✓ $p_{s_i,16}+p_{s_i,17}=1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i}=p_{18,r_i}=1$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,14} + p_{1,15} = 1$
  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} =$ 右折率
  ✓ $p_{1,10} + p_{1,11} =$ 直進率
  ✓ $p_{1,14} + p_{1,15} =$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

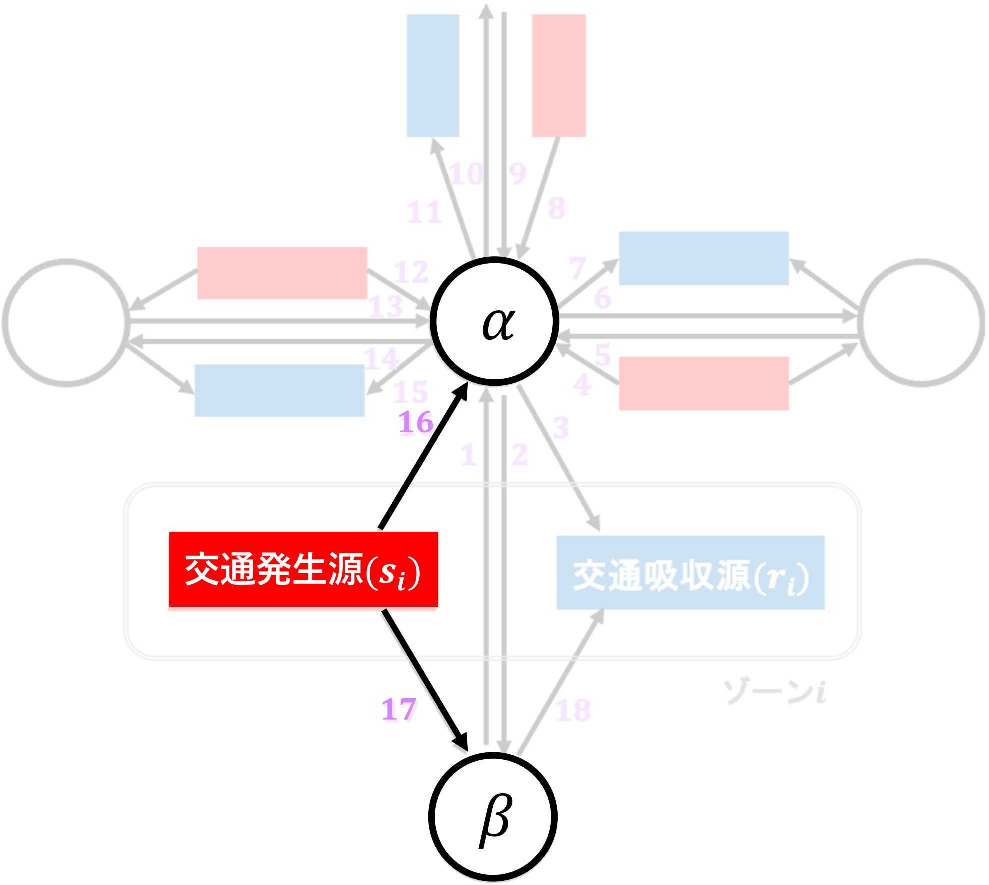
  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  ✓ $p_{s_i,16} + p_{s_i,17} = 1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は

  $p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$ の6個

  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} + p_{1,10} + p_{1,11} + p_{1,14} + p_{1,15} = 1$
  ✓ $p_{1,6} + p_{1,7} =$ 右折率
  ✓ $p_{1,10} + p_{1,11} =$ 直進率
  ✓ $p_{1,14} + p_{1,15} =$ 左折率

- 発生源s_iから隣接交差点 (α および β) への遷移確率

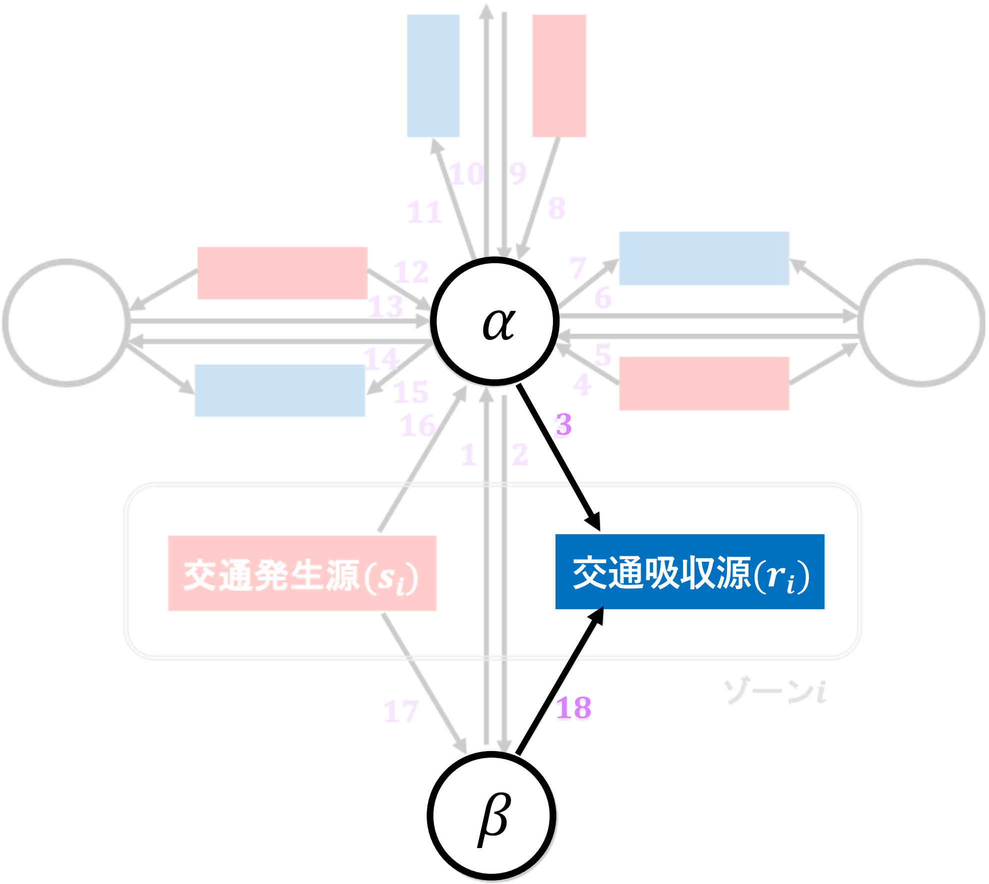
  $p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  ✓ $p_{s_i,16} + p_{s_i,17} = 1$

- 交差点(α および β)から吸収源r_iへの遷移確率

  p_{3,r_i}, p_{18,r_i}

  ✓ $p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$



3. 吸収マルコフ過程としての交通流：遷移確率行列

一般に、各文字を以下のように定義する。

$$(\text{ゾーンの数}) = (\text{発生源の数}) = (\text{吸収源の数}) = r \text{ 個}$$

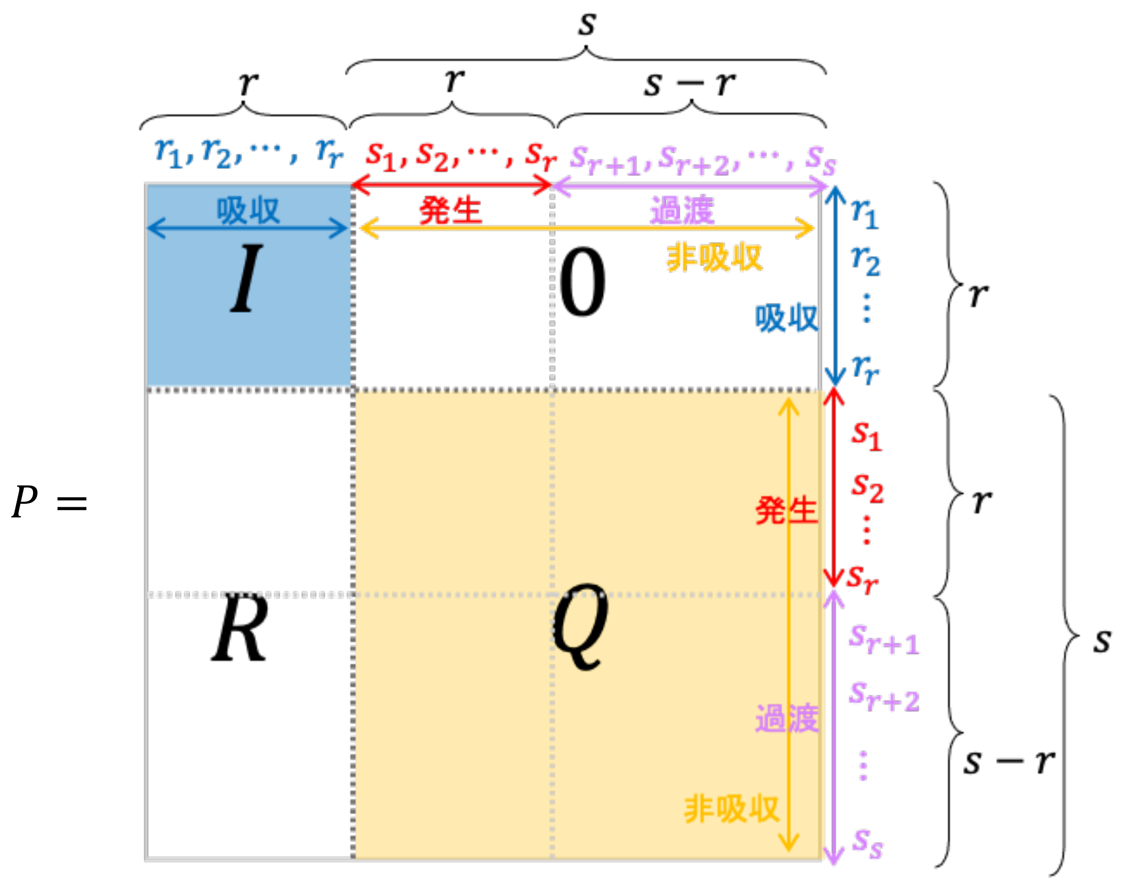
($\because$ 交通量が発生するだけで吸収源がないゾーンは実際には考えられらない)

$$\begin{cases} \text{非吸収状態 } s \text{個} \begin{cases} \text{発生源 } \boldsymbol{r}\text{個}：s_1, s_2, \cdots, s_r \\ \text{過渡状態 } (\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r})\text{個}：s_{r+1}, s_{r+2}, \cdots, s_s \end{cases} \\ \text{吸収状態}(= \text{吸収源}) \ \boldsymbol{r}\text{個}：r_1, r_2, \cdots, r_r \end{cases}$$

u_{s_i}：ゾーンiの発生源s_iから発生する交通量

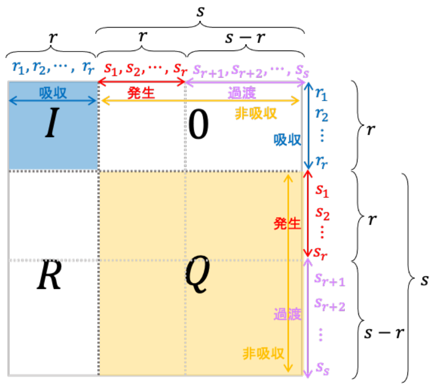
v_{r_j}：ゾーンjの吸収源 r_jに吸収される交通量

遷移確率行列



3. 吸収マルコフ過程としての交通流：遷移確率行列

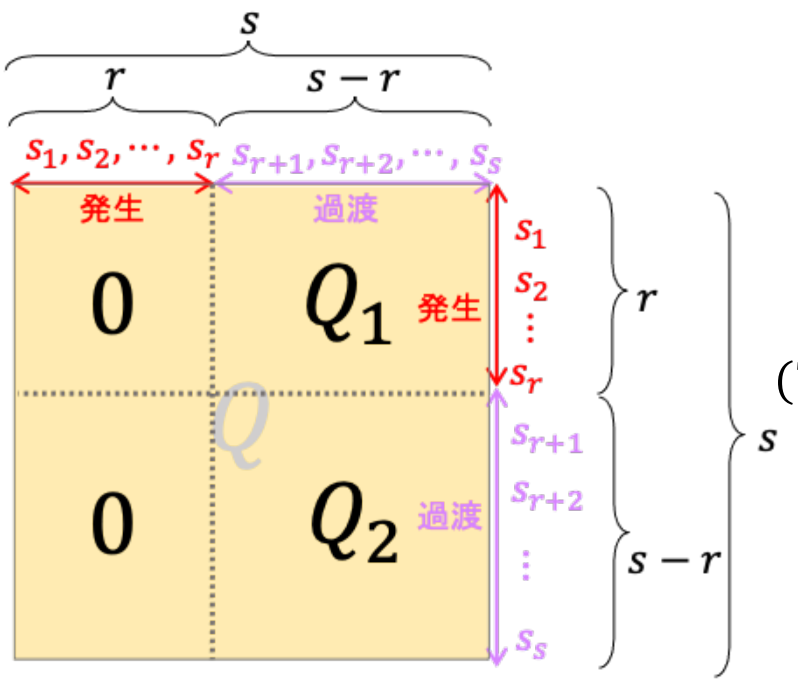
遷移確率行列 $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} =$



(6)　の Q, R を以下のように分割する

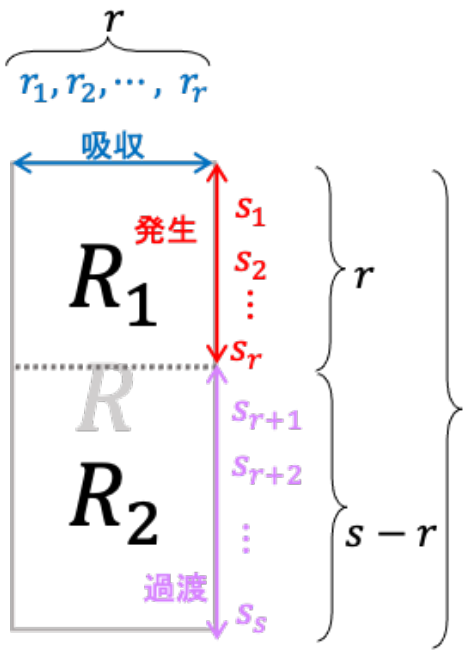
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} =$$

※ 発生源への
遷移確率は 0



(7)

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} =$$



(8)

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：吸収交通量

ここで、過渡状態からの発生交通量は0なので

$$\boldsymbol{v} = \left(u_{s_1}, u_{s_2}, u_{s_3}, \cdots, u_{s_s}\right)(I - Q)^{-1}\, R \qquad (4)$$

にならって、

$$\underbrace{\overset{\text{吸収源}}{\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right)}}_{r} = \underbrace{\Bigl(\underbrace{\overset{\text{発生源}}{u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}}}_{r}, \underbrace{\overset{\text{過渡状態}}{0, 0, \cdots, 0}}_{s-r}\Bigr)}_{s}(I - Q)^{-1}\, R \qquad (5)$$

(5)をベクトル表記すると、 $\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\,(I - Q)^{-1}\, R}$ (9)

このもとで、交通流のもつ必要な2つの性質

制約条件①：各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

制約条件②：各発生源から発生して任意の吸収源に吸収される交通量は与えられた$O.D.$交通量を満足している

について考えていく。

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件①

制約条件①：各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

- 任意のゾーンで発生する交通量と吸収される交通量が等しいためには、以下でなければならない

$$\left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) = \left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) \qquad (10)$$

- ここで　$S = (I - Q)^{-1} R$　(11)　とおく

(Sの(i,j)成分)　　$(i, k = 1,2,3,\cdots,s,\ j = 1,2,\cdots,r)$

$= \sum_{k=1}^{s}\{$(非吸収状態s_iを出発した1台の車が非吸収状態s_kを通過する回数の期待値)×(非吸収状態s_kから吸収源r_jへの遷移確率)$\}$

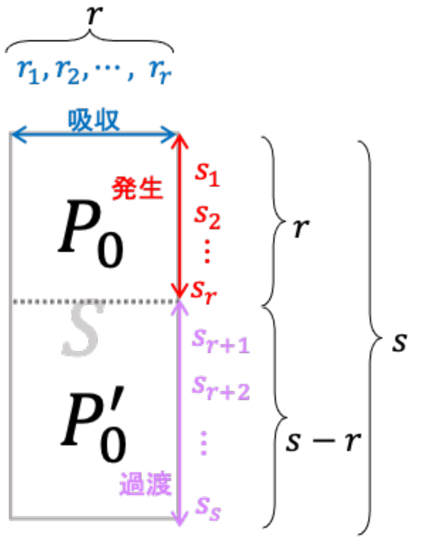
$=$ (非吸収状態s_iを出発した1台の車のうち吸収源r_jに辿り着く台数)

$=$ (非吸収状態s_iから吸収源r_jに遷移する確率)

  - ✓ (11)式は (s×r行列) =(s×s行列)×(s×r行列)
  - ✓ Sの各行の和は1(∵ 必ずどこかに吸収される)

- Sを右(12)のように分割すると
  - ✓ P_oは r×r 行列
  - ✓ P_oはOD間の遷移確率p_{s_i,r_j}の行列 $(i,j \le r, i \neq j)$

$$S = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} =$$



(12)

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件①

制約条件①：各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

- 以下のように$\boldsymbol{u}^*$を定義する

$$\boldsymbol{u}^* = \left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) \quad (14)$$

- 式(10)右辺は式(5)より

$$\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) = \left(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{0}^{\boldsymbol{T}}\right)(I - Q)^{-1}\, R = \left(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{0}^{\boldsymbol{T}}\right)\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^*\, P_0 \quad (13)$$

※$\left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) = \left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) \qquad (10)$

※$\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) = \left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}, 0, 0, \cdots, 0\right)(I - Q)^{-1}\, R \qquad (5)$

- (13)(14)より $\boxed{\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*\, P_0}$ (15)

式(10) (= 発生交通量と吸収交通量に関する制約条件) が、

$\boldsymbol{u}^*$とP_0 の式(15) (= 発生交通量とOD間の遷移確率に関する制約条件) に書き換えられた。

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件①

制約条件①：各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

- 交通量の分布を求める問題では $\boldsymbol{u}^*$ と $P_0(=OD$表$)$を与えるのであるが、
  条件式(15)のもとでは $\boldsymbol{u}^*$ と P_0 を全く独立に考えることはできない

⇩

- 遷移確率 P_0 と交通発生量の和 u を与えて、式(15)と連立させて各発生交通量 $u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}$ を求めれば良い

$$u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_r} \quad (16)$$

- 各車はトリップを終了したゾーンにおいて、次の発生交通量とみなせる
  → N トリップ目の発生交通量 $\boldsymbol{u}^*(N)$ は $(N-1)$ トリップ目の吸収交通量に等しい

$$\boldsymbol{u}^*(N) = \boldsymbol{u}^*(N-1) \cdot P_0 = \boldsymbol{u}^*(N-\mathbf{2}) \cdot P_0^2 = \cdots\cdots = \boldsymbol{u}^*(0) \cdot P_0^N \quad (17)$$

- $N \to \infty$ のとき、 P_0^N は極限行列 W に近づく(P_0は正則と仮定)ので

$$\boldsymbol{u}^*(\infty) = \boldsymbol{u}^*(0) \cdot W \quad (18)$$

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件①

制約条件①： 各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

- ここで、極限行列Wは

$$\begin{cases} (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) = (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) \cdot P_0 & (20) \\ w_{1'} + w_{2'} + \cdots\cdots + w_{r'} = 1 & (21) \end{cases}$$

を解いて得られる行列

$$W = \begin{pmatrix} w_{1'} & w_{2'} & \cdots\cdots & w_{r'} \\ w_{1'} & w_{2'} & \cdots\cdots & w_{r'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1'} & w_{2'} & \cdots\cdots & w_{r'} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

[式(20)(21)の成り立ち]

<u>式(20)</u> $W = W\, P_0 \Leftrightarrow (W\text{の}(i,j)\text{成分}) = \sum_{k=1}^{r} \{(W\text{の}(i,k)\text{成分}) \times (P_0\text{の}(k,j)\text{成分})\} \Leftrightarrow w_{j'} = \sum_{k=1}^{r} w_{k'} \cdot p_{s_k, r_j}$

$\Leftrightarrow (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) = (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) \cdot P_0$

<u>式(21)</u> $w_{1'} + w_{2'} + \cdots\cdots + w_{r'} = \sum_{j=1}^{r} (W\text{の}(i,j)\text{成分}) = \sum_{j=1}^{r} \left(\text{発生源}s_i\text{からまわりまわって吸収源}r_j\text{に遷移する確率}\right) = 1$

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件①

制約条件①： 各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい

- 式(16)のuを1とおくと、式(15)(16)を連立して解くことは、式(20)を解くことに等価

したがって、以下が成立

$$u_{s_1} = uw_1, u_{s_2} = uw_2, \cdots\cdots, u_{s_r} = uw_r \qquad (21)$$

※ $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0 \quad (15)$

※ $u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_r} \quad (16)$

※ $(w_1, \ w_2, \ \cdots\cdots \ w_r) = (w_1, \ w_2, \ \cdots\cdots \ w_r) \cdot P_0 \quad (20)$

・ゾーンi の発生交通量u_{s_i}がw_iによって表される

・各ゾーンごとの発生交通量と吸収交通量が期待値として等しい

制約条件のもとでP_0を与えたときの$\boldsymbol{u}^*(= (u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}))$を決定できた

＝制約条件のもとでOD表を作成できた

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：制約条件②

制約条件②：各発生源から発生して任意の吸収源に吸収される交通量は与えられた$O.D.$交通量を満足している

- P_0(= OD間の遷移確率行列 ≒ OD交通量) を最初に与えて、これと矛盾ない遷移確率行列P(あるいはQ)を作ればよい

$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ (7) とおいたから、 $I - Q = \begin{pmatrix} I & -Q_1 \\ 0 & I - Q_2 \end{pmatrix}$ より

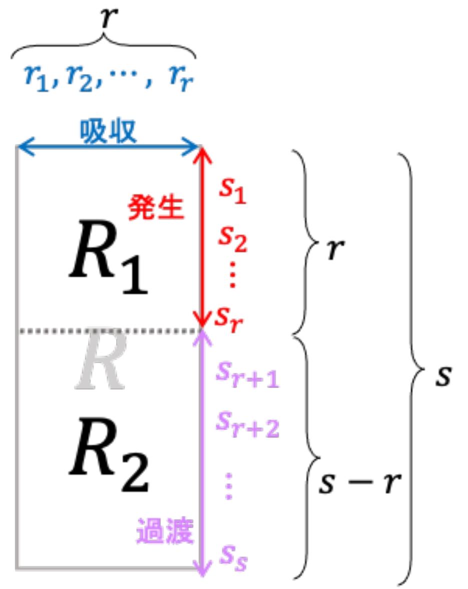
$$(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} I & Q_1(I-Q_2)^{-1} \\ 0 & (I-Q_2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ (8) について $R_1 = 0$ (∵ 発生源から直接吸収源には遷移しない) なので $R = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix}$ に注意して $S = (I-Q)^{-1} R$ (11) に代入すれば、

$$\begin{pmatrix} I & Q_1(I-Q_2)^{-1} \\ 0 & (I-Q_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1(I-Q_2)^{-1}R_2 = P_0 \\ (I-Q_2)^{-1}R_2 = P_0' \end{cases} \quad (23)$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q_1 P_0' = P_0} \quad (24)$$



- これらを満足するようにQ_1, Q_2, R_2(つまり遷移確率行列P)を決定すればよい

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：街路交通量

- 制約条件を満足するような遷移行列Pを用いることで、各街路区間の交通量Xが以下のように求まる

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}^{*} Q_1 (I - Q_2)^{-1}} \qquad (25)$$

※ ($\boldsymbol{X}$のj成分)

$$= \sum_{k=1}^{s-r} \left(\left[\sum_{i=1}^{r} \{(\text{発生源}s_i\text{からの発生交通量}) \times (\text{発生源}s_i\text{から過渡状態}s_{r+k}\text{への遷移確率})\} \right] \times (\text{過渡状態}s_{r+k}\text{を通過した1台の車が過渡状態}s_{r+j}\text{を通る回数の期待値}) \right)$$

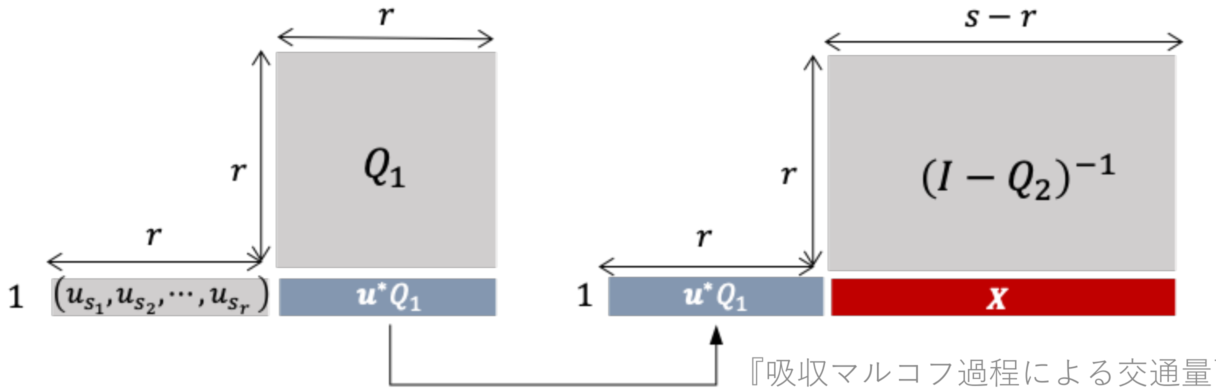
$$= \sum_{k=1}^{s-r} (\text{過渡状態}s_{r+k}\text{の交通量}) \times (\text{過渡状態}s_{r+k}\text{を通過した1台の車が過渡状態}s_{r+j}\text{を通る回数の期待値})$$

$$= (\text{過渡状態}s_{r+j}\text{の交通量})$$

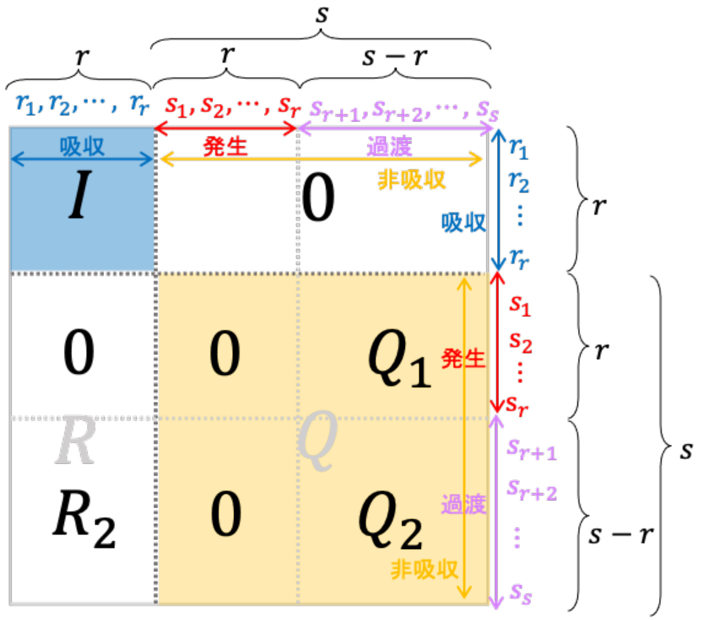
※ $\boldsymbol{u}^{*} = (u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}) = (\text{発生源}s_i\text{からの発生交通量}u_{s_i}\text{の}1\times r\text{ 行列})$ $(i \le r)$

※Q_1: 発生源s_iから過渡状態s_{r+k}への遷移確率 $r\times(s-r)$行列 $(i \le r, k \le s-r)$

※$(I-Q_2)^{-1}$: 過渡状態s_{r+k}を通過した1台の車が過渡状態s_{r+j}を通る回数の期待値 $r\times(s-r)$行列 $(k \le s-r)$



$P =$



『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：実際の街路への適用

交差点における観測資料から遷移確率行列Pを決定

PからP_0を算定

発生交通量$\boldsymbol{u}^*$を決定

OD交通量が決定

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_1 \\ R_2 & 0 & Q_2 \end{array}\right)$$

$$P_0 = Q_1 P_0' \quad (24)$$

$$\begin{cases} (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) = (w_{1'} \quad w_{2'} \quad \cdots\cdots \quad w_{r'}) \cdot P_0 & (20) \\ w_{1'} + w_{2'} + \cdots\cdots + w_{r'} = 1 & (21) \end{cases}$$

解いて得られる

$$u_{s_1} = uw_1, u_{s_2} = uw_2, \cdots\cdots, u_{s_r} = uw_r \quad (21)$$

$$\boldsymbol{u}^* = (u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}) \quad (14)$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^* P_0$$

これが実際のOD交通量と一致していれば、

全体の交通流を1つの吸収マルコフ連鎖として取り扱って差し支えない

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

3. 吸収マルコフ過程としての交通流：実際の街路への適用

- しかし、すべてのOD交通を1つの吸収マルコフ連鎖として考えられるのは交通混雑の著しい場合に限られる
  - ✓ 右左折率によってぐるぐる回り続けてなかなか吸収されない事態が生じ、実際の発生交通量を与えたときに実際の交通量以上に各街路に車が流れることになる

- 実際の交通量以上に配分される交通量の増大の程度を知る1つの尺度として、
  発生源を出発した車が吸収されるまでの時間（＝通過した過渡状態の延数）$\boldsymbol{\tau}$ を考える

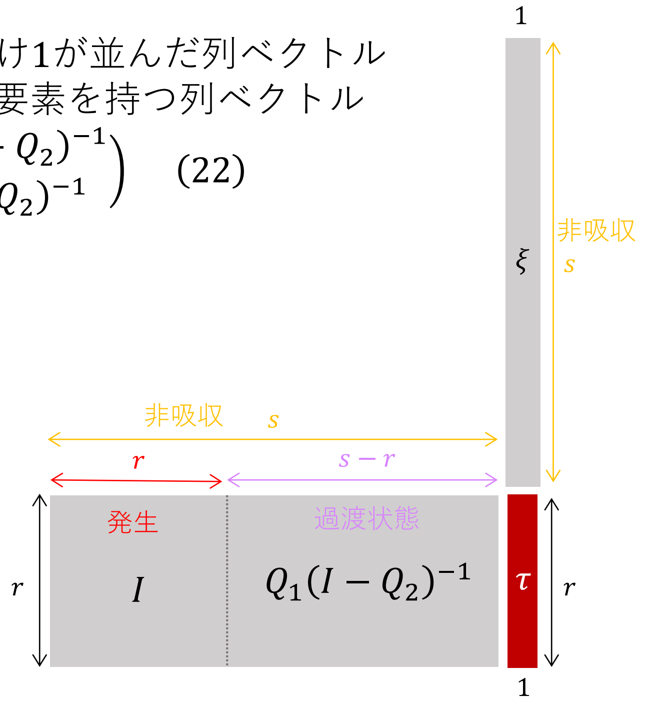
$$\tau = [I, Q_1(I - Q_2)^{-1}]\xi \quad (26)$$

(τのi成分)

$$= \sum_{k=1}^{s} \{(\text{状態}s_i\text{を出発した1台の車が状態}s_k\text{を通る回数の期待値}) \times 1\}$$

$$= (\text{発生源}s_i\text{を出発した1台の車が通過した非吸収状態の延数の期待値})$$

- ✓ ξは非吸収状態の数sだけ1が並んだ列ベクトル
- ✓ τは発生源の数rだけの要素を持つ列ベクトル
- ✓ $(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} I & Q_1(I - Q_2)^{-1} \\ 0 & (I - Q_2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (22)$



- τに交差点間の平均所要時間を乗じ、OD交通量の重みで加重平均すれば、トリップの平均所要時間が得られる

→トリップの平均所要時間が実際のトリップ時間よりも極端に長い場合、全体を1つのマルコフ連鎖として考えることが不都合

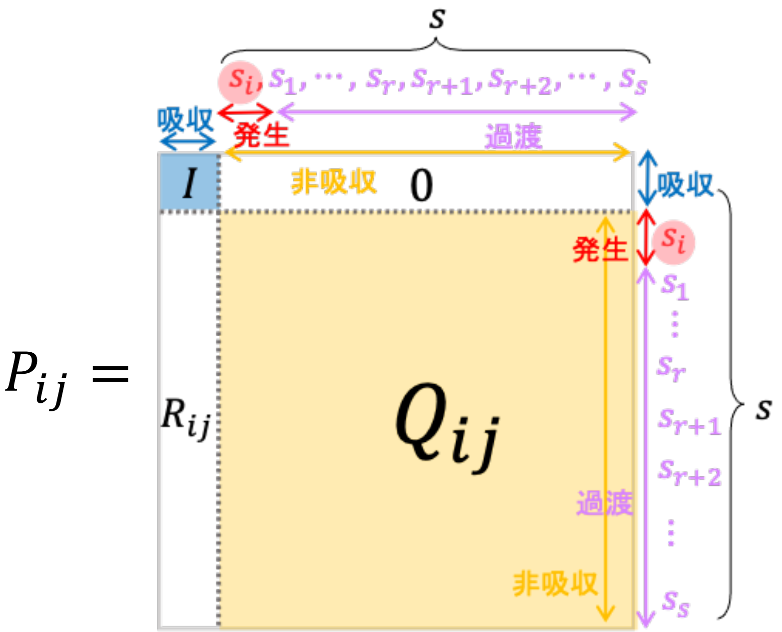
『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

4. 各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖と考える場合

- 交通量の少ない場合には、ほとんどの車は最短経路を選択するので、1つのマルコフ連鎖として考えた交通量は実際の交通量よりもかなり大きくなってしまう

→ OD交通ごとに1つの発生源s_iと1つの吸収源r_jをもつマルコフ連鎖を考え、それらを足し合わせる

- 発生源がs_i、吸収源がr_jのOD交通に対して、式(6)の形の遷移確率行列P_{ij}を以下のように設定する



$$※\ P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \quad (6)$$

4. 各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖と考える場合

- まず、1つのOD交通のみを考える

OD交通量をu_{s_i,r_j}とすると各非吸収状態の交通量は

$$\underbrace{\left(u_{s_i,r_j}, 0, 0, \cdots, 0\right)}_{s}\left(I - Q_{ij}\right)^{-1} \qquad (27)$$

非吸収状態相互間の遷移確率

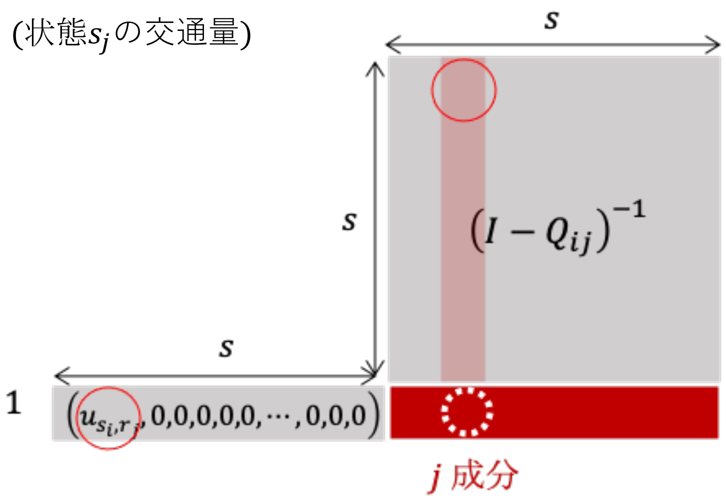
s_iからr_jへの交通に対する基本行列

$(j$ 成分$)$

$= \sum_{k=1}^{s} \{(k\text{成分}) \times ((k,j)\text{成分})\}$ 　$k = 1$のとき以外0

$= u_{s_i,r_j} \times$(状態s_iを出発した1台の車がs_jを通過する回数の期待値)

$=$ (状態s_jの交通量)



- 次に、各OD交通を重ねたときを考える

各ODの組に対して(27)をつくり、

$\left(u_{s_1,r_2}, 0, 0, \cdots, 0\right)\left(I - Q_{12}\right)^{-1} \rightarrow$ 　$s_1 \rightarrow r_2$

$\left(u_{s_1,r_3}, 0, 0, \cdots, 0\right)\left(I - Q_{13}\right)^{-1} \rightarrow$ 　$s_1 \rightarrow r_3$

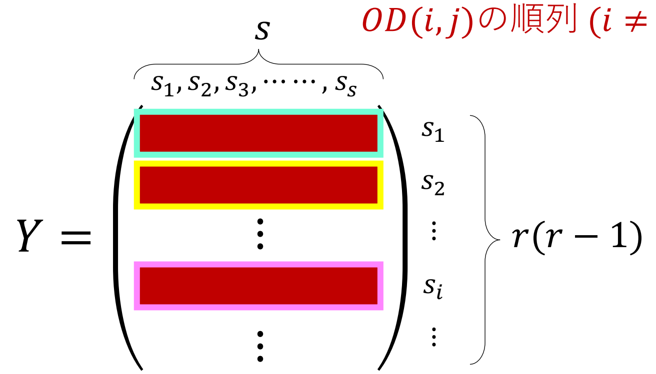
$\vdots$

$\left(u_{s_i,r_j}, 0, 0, \cdots, 0\right)\left(I - Q_{ij}\right)^{-1} \rightarrow$ 　$s_i \rightarrow r_j$

$\vdots$

これらを順序よく並べると$r(r-1) \times s$の新しい行列Yができる

$OD(i,j)$の順列 $(i \neq j)$



$(Y$の(i,j)成分$)$

$=$ (i番目のODについて、発生源を出発した1台の車が状態s_jを通る回数の期待値)

4. 各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖と考える場合

- ここでベクトル$\boldsymbol{u}$を以下のように定義すると、

$$\boldsymbol{u} = (u_{s_1,r_2}, u_{s_1,r_3} \cdots, u_{s_r,r_{r-1}})$$

- 各非吸収状態の交通量$\boldsymbol{X}$は以下のように表せる。

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}Y} \qquad (28)$$

※ $Y = \begin{array}{c} \overbrace{s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots, s_S}^{S} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{s_1 \to r_2} \\ \boldsymbol{s_1 \to r_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{s_i \to r_j} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \end{array}\right\} r(r-1) \end{array}$

($\boldsymbol{X}$のj成分)

$$= \sum_{k=1}^{r(r-1)} \{(k\text{番目の}OD\text{交通量}) \times (k\text{番目の}OD\text{交通を考えたときの、発生源を出発した1台の車が状態}s_j\text{を通る回数の期待値})\}$$

$$= \sum_{k=1}^{r(r-1)} (k\text{番目の}OD\text{交通を考えたときの、状態}s_j\text{の交通量}) \quad = (\text{すべての}OD\text{交通を考えたときの、状態}s_j\text{の交通量})$$

→各ODごとにルートに配分されているので、 ODの組合せの数だけのマルコフ連鎖が重合した状態で解かれている

- ✓ 観測によってP_{ij}が求められれば、式(28)で交通量分布が求まる
- ✓ 理論的にP_{ij}を与えることが今後の中心課題
- ✓ 各OD交通ごとの遷移確率行列P_{ij}が他のOD交通量の経路選択によって影響を受ける場合が大きな問題

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965

5. 結論

- 交通混雑が著しい場合は全体を1つのマルコフ連鎖として考えて差し支えない
  - ➢ 各交差点における出入交通の遷移確率行列を考えることで、短期的な交通予測ならびに右折禁止、一方通行の実施の影響などを求めることができる
  - ➢ 各ODごとに最短経路に配分していく考え方と対照的であり、可能な最長経路にまで残らず配分される点に特徴がある

- 遷移確率行列による交通量分布の算出

  ① まず総発生交通量u及びゾーン間遷移行列P_oの推定をする

  ② 次に式(20)を用いてP_oからw_iを、さらに式(21)からu_{s_i}が求められる

  ③ 式(24)を満足するようにQ_1, Q_2, R_2(ただし$R_1 = 0$)を決定すると遷移確率行列Pが決定される

  ④ 与えられたOD交通量に対応する街路上の交通量分布を式(25)を用いて決定できる

  ※ 各ゾーンの発生交通量と吸収交通量とは期待値として等しい

- 実際の街路網への適用
  - ➢ 過渡状態の数が非常に多くなるので計算に多大な時間を要する
  - ➢ 適当に大きなゾーンを考え、主要交差点を取り上げることで実際の都市に適用できる

『吸収マルコフ過程による交通量配分理論』佐佐木, 1965