行動モデルの推定法

山梨大学

山梨大学
佐々木邦明

最尤推定法

- 点推定量を求める一般的な方法
- 右上の式をθの関数とみなしたものが尤度関数
- 尤度関数を最大化する θの値を最尤推定量とするのが最尤推定法

$$L_n(\theta \mid x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

平均値の推定を例にすると

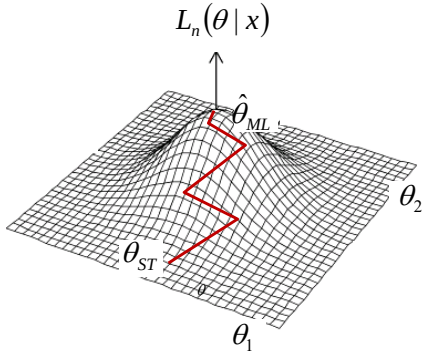
データ(**x：3,5,4**)が得られたとき，
平均をいくつとするのがよいか？

⇒平均がいくつの分布だったら
データ(**x：3,5,4**)が得られやすいか？

最大化アルゴリズムの考え方

周りが見えない中で，近傍の情報から頂点を目指す

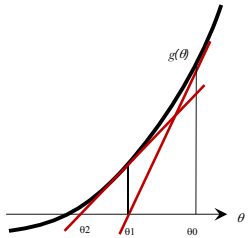
- 対数尤度関数の段階的な最大化
  1. 初期値を与える
  2. 初期値周りで勾配(1次微分)等を用いて次の推定値の方向を決める
  3. 初期値付近で１次微分，２次微分を用いて適切に次の点を決めて推定値を得る
  4. 収束基準(一時微分ベクトル)で判定し，収束していない場合は，現在の値を初期値として2に進む



代表的な繰り返し計算法

尤度関数を最大化
　　尤度関数の一階微分＝０を解く

- Newton-Raphson法
  - テイラー展開の１次近似を利用して進める
- 準Newton法（BFGS，L-BFGS法）
  - ヘッセ行列を，パラメータの差分と一回微分の差分を用いて逐次近似する．
  - L-BFGSはヘッセ行列の更新式を展開して，初期値と差分の関数和で表す．複雑な場合にメモリの節約などが可能
- 焼きなまし法（SANN）
  - 適当にパラメータを遷移しつつ，関数が大きくなる遷移を選ぶ．
  - 悪化する遷移もある確率で許容し，**局所解**を避ける



$$\theta_{n+1} = \theta_n - H^{-1} g_1$$

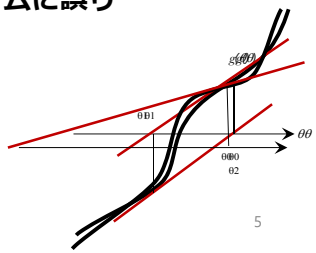
H:尤度関数の二階微分
ヘッセ行列
g: 尤度関数の一階微分

パラメータ推定がうまくいかない

- 収束するとはθ_{n+1}とθ_nが同じになる
  - g_1が0になる
- 収束しない
  - 無限に繰り返す
  - θ_2が計算不能
- 局所最適解
  - 見かけ上の最大化

- H^{-1}が計算できない
  - 変数が完全相関
  - 変数が効用関数に影響しない式形
- 関数の近似状況
  - 初期値の問題

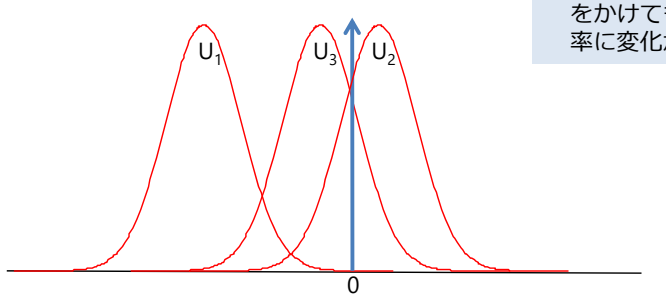
- **推定プログラムに誤り**



そもそも識別不可

- 最大値において唯一解が求まらない可能性がある（最大値となるパラメータベクトルが無数にある）
  - 意思決定者間では異なるが，選択肢間では異ならない変数
  - 選択肢間では異なるが，意思決定者間で異ならない変数
  - 異なるモデル間でのパラメータの直接比較は無意味

例



- 効用に適当な数を足しても選択確率に変化はない
- 効用に適当な倍率をかけても選択確率に変化がない

シミュレーションによるパラメータの推定

シミュレーションによる尤度計算

手順

1. 誤差項の密度関数から選択肢の数の次元の(準)乱数を発生させる
2. この乱数を誤差の値として，各代替案の効用値を計算（積分）する
3. 代替案iの効用値とその他の代替案の効用との値を比較し，それらの大小関係を1-0の変数Gで記述する．
4. 1～3のステップを繰り返す．その反復回数をRとする．
5. シミュレーションされた確率は $P_i = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} G^r$ となり，この値は不偏推定量である．

効用を確定値にする

確定的に選択を決定

比率を確率に置き換える

これを尤度として最大になるようにパラメータをアップデートする

準乱数の例

- 準乱数の例としてHalton数列がある．
  - 計算方法は素数pに対して

$$s_{t+1} = \left\{ s_t, s_t + 1/p^t, s_t + 2/p^t \cdots, s_t + (p-1)/p^t \right\}$$

例えばp=3ならば，初期値0として 1 /3, 2/3, 1/9, 4/9, 7/9, 2/9, 5/9, 8/9・・・

- 多次元化
  - 数列の異なる素数pを決めて，それぞれに応じて数列を作り多次元化する．
- 正規分布化
  - 数列を制約つきの乱数発生と同様の変換をして正規分布化

シミュレーションベースのパラメータ推定法

- シミュレーション尤度最大化（MSL）
  - シミュレーションによって計算された確率を尤度として，最大化を行う．
- 特性
  - サンプル数と乱数発生回数に依存する．
  - 乱数発生回数が十分大きいと一致性や漸近的有効性を持ち解析積分と一緒の特性を持つ．
  - 乱数発生回数がサンプル数に対して小さく固定されると一致性もない．

データ更新に対応する

ベイズ推定

ベイズの定理と事後確率

A（原因）→B（結果）の確率（尤度）

Aの起こる確率＝事前確率（主観確率）

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

B(結果)が得られた時にAが原因である確率＝事後確率

Bの起こる確率

x：知りたい量，z：データ

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{\int p(z|x)p(x)dx}$$

センサ普及→尤度

ストレージ大容量化→事前情報

コンピュータ性能向上

ベイズでパラメータ推定

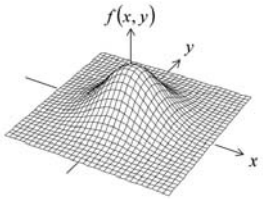
- パラメータ推定は可能？
  - そもそもはパラメータの事後分布を推定
- どうしても点推定
  - Expected a Posteriori (EAP)推定量

$$\int f(\theta|D) \times \theta \, d\theta = \int \frac{f(D|\theta)f(\theta)}{f(D)} \times \theta \, d\theta$$

モデルが複雑になると積分で．．．

MCMC法による推定

- 前の状態に基づいて（Markov Chain）新しいパラメータをランダムにサンプリング（Monte Carlo）する
- 最尤推定と何が違うの？
  - 最尤推定⇒最適化＝どっかで止まる
  - MCMC⇒分布を再現＝いつまでも動く
- 乱数を使った単純操作の繰り返しで確率密度の大きいところを探しながらサンプルを生成する
  - Gibbs Sampling
  - Metropolis-Hastings Sampling



ロジット・プロビットモデルのMCMC推定プログラム（兵藤2009参照）

ロジット

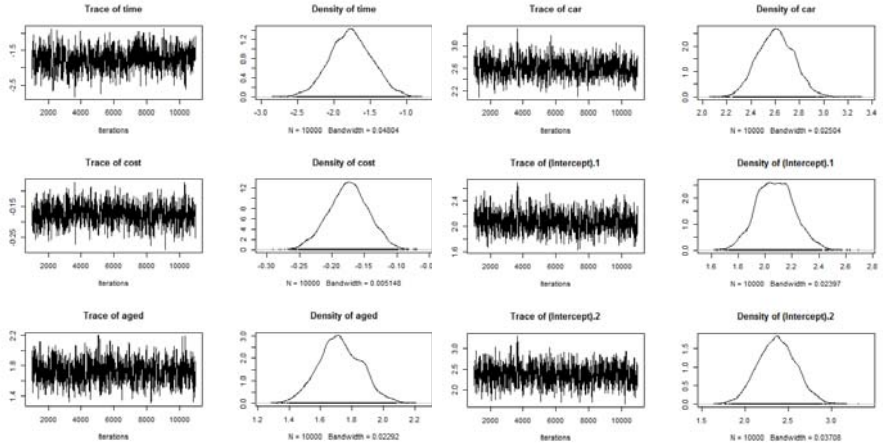
```
library(MCMCpack)
###データファイルの読み込み
Dat<-read.csv("H:/2014/data.csv",header=TRUE)
hh<-nrow(Dat) ##データ数:Data の行数を数える
  rtime <- Dat[, 6]/100; btime <- Dat[, 9]/100; ctime <- Dat[,12]/100
  rcost <- Dat[, 7]/100; bcost <- Dat[,10]/100; ccost <- Dat[,13]/100
  raged <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); baged <- 1*(Dat[,3]>=6); caged <- raged
  rcar  <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); bcar <- rcar; ccar <- 1*(Dat[,4]>=2)
##選択結果
  ch <- matrix(0,nrow=hh,ncol=3)
  colnames(ch) <- c("1", "2", "3")
  for (i in 1:hh){
    if (Dat[i, 5]==0) ch[i,1] <- -999
    if (Dat[i, 2]==1) ch[i,1] <- 1
    if (Dat[i, 8]==0) ch[i,2] <- -999
    if (Dat[i, 2]==2) ch[i,2] <- 1
    if (Dat[i,11]==0) ch[i,3] <- -999
    if (Dat[i, 2]==3) ch[i,3] <- 1
  }
post <- MCMCmnl(ch ~
  choicevar(rtime, "time", "1") +
  choicevar(btime, "time", "2") +
  choicevar(ctime, "time", "3") +
  choicevar(rcost, "cost", "1") +
  choicevar(bcost, "cost", "2") +
  choicevar(ccost, "cost", "3") +
  choicevar(raged, "aged", "1") +
  choicevar(baged, "aged", "2") +
  choicevar(caged, "aged", "3") +
  choicevar(rcar , "car" , "1") +
  choicevar(bcar , "car" , "2") +
  choicevar(ccar , "car" , "3") ,
  baseline="3", burnin=1000,
  mcmc.method="RWM",
  b0=0, B0=0, seed=2348,
  verbose=1000, mcmc=10000, B=0.001)
plot(post)
summary(post)
```

プロビット

```
library(bayesm)
###データファイルの読み込み

Dat<-read.csv("h:/2014/data.csv",header=TRUE)
hh<-nrow(Dat) ##データ数:Data の行数を数える
alt <- 3
  rtime <- Dat[, 6]/100; btime <- Dat[, 9]/100; ctime <- Dat[,12]/100
  rcost <- Dat[, 7]/100; bcost <- Dat[,10]/100; ccost <- Dat[,13]/100
  raged <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); baged <- 1*(Dat[,3]>=6); caged <- raged
  rcar  <- matrix(0,nrow=hh,ncol=1); bcar <- rcar; ccar <- 1*(Dat[,4]>=2)
  cres <- Dat[,2]
na <- 4
Xa <- cbind(rtime,btime,ctime,rcost,bcost,ccost,raged,baged,caged,rcar,bcar,ccar)
nd <- 0
X <- createX(alt, na=na, nd=nd, Xa=Xa, Xd=NULL, DIFF=TRUE, base=3)
dat1 <- list(p=alt, y=cres, X=X)
mcmc1 <- list(R=5000,k=1)
res1 <- rmnpGibbs(Data=dat1, Mcmc=mcmc1)
 plot(res1$betadraw)
 plot(res1$sigmadraw)
```

推定例（MH・ロジット）



兵藤　2009を用いた

MCMC推定のメリットデメリット

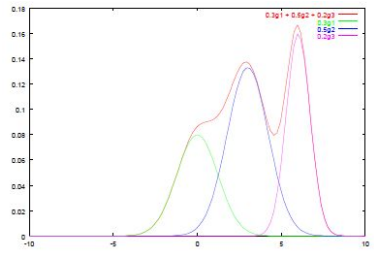
- メリット
  - 解析的にはパラメータが求まらない複雑なモデルもパラメータ分布が求まる
    - 例：パネルデータの個人モデルを考慮した階層モデル
  - パラメータの分布がやんわりわかる
- デメリット
  - 時間がかかる
    - MNLの推定例　MCMC：15秒　最尤推定：7秒
  - パラメータの分布が収束しない場合もある

不完全データの最尤推定

EMアルゴリズム

不完全データの最尤推定？

- 潜在クラスモデル
  - 母集団が異質な複数の集団の混合によって構成されていることを想定した上で、観測されたデータを用いて分析対象を複数の潜在クラス（グループ）に分割し、各クラスの特徴を把握する手法
  - マーケティング分野で潜在クラス分析を活用する利点の１つは，消費者セグメントの抽出と各セグメントの特徴把握ができること
- クラスター分析との違い
  - 消費者の購入状況を確率モデルとして表現できることから他の分析モデルと組合せて拡張しやすい.
  - 分析対象となる各顧客の各クラスへの振り分けをクラスへの所属確率として把握できる



混合ガウス分布の例

$$Pr(X_{i1} = x_{i1}, \ldots, X_{iM} = x_{iM}) = \Sigma^{W}_{s=1} \pi_s \Pi^{M}_{j=1} P_{i\,|\,s}(j)^{xij} \quad (1 - P_{i\,|\,s}(j))^{1-xij}$$

EMアルゴリズム

- 不完全データに基づく対数尤度に対して用いられた最尤推定のための方法
- Eステップ（Expectation-step）：欠測値として扱う変数の期待値の推定
  - 個人iがクラスsに属する場合に1となるy_{is}の期待値y_{is}^{*}をベイズの定理を利用して求める
- Mステップ(Maximization-step)：その期待値を用いたパラメータ推定
  - y_{is}^{*}を用いてパラメータ（π_sと$P_{i|s(j)}$）を推定する
  - 推定されたπ_sと$P_{i|s(j)}$をもちいてy_{is}^{*}を更新する

２つのプロセスを繰り返して最尤推定

政策シミュレーション

政策シミュレーション

- 行動モデルを推定し，そのパラメータを用いて，変数の変化による選択の変化を見る．
- 回遊行動の分析
  - マイクロシミュレーションを用いることで，複雑なモデルの組み合わせを政策評価可能
  - シミュレーションなので，複数回実施して平均的な評価を行う

Step 1	サンプルのデータ，個人属性や発ゾーン，LOSデータなどを各段階のモデルに個人nの個人属性やLOS，各種ダミー等といった説明変数データを代入し，全ての選択肢ごとの選択確率P_{in}を求める．求めた選択確率から確率分布F_{in}を作成する．
Step 2	$[0,1]$の一様乱数γ_nを発生させ，γ_nの値が，$F_{(i-1)n} \leq \gamma_n < F_{in}$を満たす選択肢$i$を選択するものとする． 滞在時間モデル等も同様の手法で可能

参考文献

- Discrete Choice Methods with Simulation　K. Train
- 入門ベイズ統計学　松原望
- ベイズモデリングによるマーケティング分析　照井伸彦
- R による離散選択モデルの推定方法メモ　兵藤哲朗
- マーケティングのデータ分析　岡太彬訓，守口剛
- ベイズ推論とMCMCのフリーソフト　岩波データサイエンス